

非线性 San Venant 方程组数值稳定性分析*

吴作平

(五凌电力有限公司,长沙 410004)

摘要 分析了非线性 San Venant 方程组的解的特性,并在统一考虑阻力项的影响的基础上,分析了用 Pressmainn 格式求解非线性 San Venant 方程组的数值稳定性和收敛性.研究了 φ 和 θ 不同取值情况下,差分方程数值解的收敛情况与相对时间步长 $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ 和相对波长 $\frac{L}{\Delta x}$ 的关系.指出数值解总是存在衰减和弥散现象,在实际模拟过程中,应合理选择 φ 和 θ 值,以兼顾数值衰减幅度和模拟速度.

关键词 非线性, 稳定性, 收敛性

引言

在利用差分方法求解非线性 San Venant 方程组时,由于初始条件的离散等影响,不可能求出差分方程的准确解^[1~2].使用差分方程计算时,在任一时间层的任何一个空间点,都可能引入误差,如果这个误差在计算中逐步放大,最终就会掩盖准确解,因此用非线性方程解决实际问题时,一般需要进行数值实验,分析数值解的稳定性.目前大多资料、文献[3~6]在分析用 Pressmainn 格式求解非线性 San Venant 方程组的数值稳定性问题时,都作了定性分析,本文从研究非线性 San Venant 方程组数值解小扰动波幅与波速出发,对这一问题进行全面的分析.

1 方程的离散

对于 San Venant 方程组

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q_1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + (gA - B \frac{Q^2}{A^2}) \frac{\partial z}{\partial x} = -g \frac{|Q|Qn^2}{AR^{4/3}} + u_1 q_1 \quad (2)$$

按 Preissman 格式将水流连续方程和运动方程按格式离散并线性化,得:

$$a_j \Delta Z_{j+1} + b_j \Delta Q_{j+1} = c_j \Delta Z_j + d_j \Delta Q_j + t_j \quad (3)$$

$$a'_j \Delta Z_{j+1} + b'_j \Delta Q_{j+1} = c'_j \Delta Z_j + d'_j \Delta Q_j + t'_j \quad (4)$$

式中,系数 a_j, b_j, c_j, d_j, t_j 和 $a'_j, b'_j, c'_j, d'_j, t'_j$ 由前一时刻(即第 n 时刻)断面 j 和 $j+1$ 的值以及 φ 和 θ 确定.

首先对微分方程进行线性化,依据小扰动原理:

$$Q = Q_0 + \tilde{Q} \quad (5)$$

$$Z = Z_0 + \tilde{Z} \quad (6)$$

代入微分方程,与方程(1)、(2)比较(不考虑源、汇项),并略去高阶小量,得:

$$B \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = q_1 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{2Q_0}{A_0} \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} + (gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}) \frac{\partial \tilde{Z}}{\partial x} = -g \frac{2n^2 Q_0 B^{4/3}}{A^{7/3}} \tilde{Q} + \frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0^2 B^{4/3}}{A^{10/3}} \tilde{A} \quad (8)$$

其中 $\tilde{A} = B * \tilde{Z}$

方程(7)、(8)即为线性化后的(1)、(2),其物理意义相同.

2 微分方程解的特性

由于方程(7)、(8)是线性的,其解可由 Fourier 级数表示为如下形式,解的特性可由特解

$$\tilde{Z} = \tilde{Z}_0 e^{i(\beta t + \sigma x)} \quad \tilde{Q} = \tilde{Q}_0 e^{i(\beta t + \sigma x)}$$

表征,式中, Q_0, Z_0 为幅常数,与 x, t 无关, σ 为波数, L 为波长, $\sigma = \frac{2\pi}{L}, \beta$ 为波频率, $\beta = \frac{2\pi}{T}, T$ 为周

期,代入(7)、(8),有:

$$\sigma \bar{Q}_0 + \beta B \bar{Z}_0 = 0 \quad (9)$$

$$i\beta \bar{Q}_0 + \frac{2Q_0}{A_0} i\sigma \bar{Q}_0 + i\sigma(gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}) \bar{Z}_0 = -2g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A^{7/3}} \bar{Q}_0 + \frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{10/3}} \bar{Z}_0 \quad (10)$$

可见 β 为复数,由于幅常数 \bar{Q}_0 、 \bar{Z}_0 不为 0,所以有:

$$\sigma [i\sigma(gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}) - \frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{10/3}}] - B\beta(i\beta + i\sigma \frac{2Q_0}{A_0} + 2g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A^{7/3}}) = 0 \quad (11)$$

$$\text{令 } D_1 = iB, D_2 = B(i\sigma \frac{2Q_0}{A_0} + 2g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A^{7/3}}), D_3 = -\sigma$$

$$[i\sigma(gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}) - \frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{10/3}}]$$

则:

$$\beta = \frac{-D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1 D_3}}{2D_1} \quad (12)$$

由上式可见, σ 和 β 的关系式较为复杂,可用隐函数表示如下:

$$\beta = f_1(Q_0, A_0, B, n, \sigma) \quad (13)$$

记 $\text{Re}\beta$ 和 $\text{Im}\beta$ 分别为 β 的实部和虚部, $\text{Ref}_1(Q_0, A_0, B, n, \sigma)$ 和 $\text{Imf}_1(Q_0, A_0, B, n, \sigma)$ 分别为 $f_1(Q_0, A_0, B, n, \sigma)$ 的实部和虚部,则微分方程(7)、(8)的扰动幅因子 λ_1 和小扰动波速 c 分别为:

$$\lambda_1 = e^{-\text{Im}\beta t} = e^{-\text{Imf}_1(Q_0, A_0, B, n, \sigma)t} \quad (14)$$

$$c = \frac{\text{Re}\beta}{\sigma} = \frac{\text{Ref}_1(Q_0, A_0, B, n, \sigma)}{\sigma} \quad (15)$$

3 差分方程稳定性分析^[7,8]

将方程(7)、(8)按 Preissmann 格式展开

$$\frac{B}{\Delta t} [\varphi(\tilde{Z}_{j+1}^{n+1} - \tilde{Z}_{j+1}^n) + (1-\varphi)(\tilde{Z}_j^{n+1} - \tilde{Z}_j^n)] + \frac{1}{\Delta x} [\theta(\tilde{Q}_{j+1}^{n+1} - \tilde{Q}_j^{n+1}) + (1-\theta)(\tilde{Q}_{j+1}^n - \tilde{Q}_j^n)] = 0 \quad (16)$$

$$\frac{1}{\Delta t} [\varphi(\tilde{Q}_{j+1}^{n+1} - \tilde{Q}_{j+1}^n) + (1-\varphi)(\tilde{Q}_j^{n+1} - \tilde{Q}_j^n)] + \frac{2Q_0}{A_0} \frac{1}{\Delta x} [\theta(\tilde{Q}_{j+1}^{n+1} - \tilde{Q}_j^{n+1}) + (1-\theta)(\tilde{Q}_{j+1}^n - \tilde{Q}_j^n)] + (gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}) \frac{1}{\Delta x} [\theta(\tilde{Z}_{j+1}^{n+1} - \tilde{Z}_j^{n+1}) +$$

$$(1-\theta)(\tilde{Z}_{j+1}^n - \tilde{Z}_j^n)] = -2g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A^{7/3}} \times \{ \varphi[\theta \tilde{Q}_{j+1}^{n+1} + (1-\theta)\tilde{Q}_{j+1}^n] + (1-\varphi)[\theta \tilde{Q}_j^{n+1} + (1-\theta)\tilde{Q}_j^n] \} + \frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{10/3}} \{ \varphi[\theta B \tilde{Z}_{j+1}^{n+1} + (1-\theta)B \tilde{Z}_{j+1}^n] + (1-\varphi)[\theta B \tilde{Z}_j^{n+1} + (1-\theta)B \tilde{Z}_j^n] \} \quad (17)$$

差分方程(16)、(17)解的基本特性与差分方程(3)、(4)相同,在各网格点上的值分别为:

$$\tilde{Z}_j^n = \bar{Z}_0 e^{i(\beta n \Delta t + \sigma j x)}, \tilde{Z}_{j+1}^n = \bar{Z}_0 e^{i[\beta n \Delta t + \sigma(j+1)x]}$$

$$\tilde{Z}_j^{n+1} = \bar{Z}_0 e^{i[\beta(n+1)\Delta t + \sigma j x]},$$

$$\tilde{Z}_{j+1}^{n+1} = \bar{Z}_0 e^{i[\beta(n+1)\Delta t + \sigma(j+1)x]}$$

$$\tilde{Q}_j^n = \bar{Q}_0 e^{i(\beta n \Delta t + \sigma j x)}, \tilde{Q}_{j+1}^n = \bar{Q}_0 e^{i[\beta n \Delta t + \sigma(j+1)x]}$$

$$\tilde{Q}_j^{n+1} = \bar{Q}_0 e^{i[\beta(n+1)\Delta t + \sigma j x]},$$

$$\tilde{Q}_{j+1}^{n+1} = \bar{Q}_0 e^{i[\beta(n+1)\Delta t + \sigma(j+1)x]}$$

将以上各式代入差分方程(16)、(17),并令: $\lambda = e^{i\beta \Delta t}$, $\gamma = e^{i\sigma \Delta x} - 1$,有

$$\frac{1}{\Delta x} [\theta \lambda \gamma + (1-\theta)\gamma] \bar{Q}_0 + \frac{B}{\Delta t} (\lambda - 1) (\varphi \gamma + 1) \bar{Z}_0 = 0 \quad (18)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (\lambda - 1) (\varphi \gamma + 1) \bar{Q}_0 + \frac{2Q_0}{A_0} \frac{1}{\Delta x} [\gamma \theta \lambda + \gamma(1-\theta)] \bar{Q}_0 + (gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}) \frac{1}{\Delta x} [\gamma \theta \lambda + \gamma(1-\theta)] \bar{Z}_0 - \frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{10/3}} (\varphi \theta \gamma \lambda - \varphi \theta \gamma + \varphi \gamma + \theta \lambda - \theta + 1) \bar{Z}_0 + 2g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{7/3}} (\varphi \theta \gamma \lambda - \varphi \theta \gamma + \varphi \gamma + \theta \lambda - \theta + 1) \bar{Q}_0 = 0 \quad (19)$$

$$\text{令 } F_1 = \frac{2Q_0}{A_0}, F_2 = 2g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{7/3}}, F_3 = gA_0 - B \frac{Q_0^2}{A_0^2}, F_4 = -\frac{7}{3} g \frac{n^2 Q_0 B^{4/3}}{A_0^{10/3}}, \text{则式(19)变为:}$$

$$\frac{1}{\Delta t} (\lambda - 1) (\varphi \gamma + 1) \bar{Q}_0 + \frac{F_1}{\Delta x} [\gamma \theta \lambda + \gamma(1-\theta)] \bar{Q}_0 + F_2 (\varphi \theta \gamma \lambda - \varphi \theta \gamma + \varphi \gamma + \theta \lambda - \theta + 1) \bar{Q}_0 + \frac{F_3}{\Delta x} [\gamma \theta \lambda + \gamma(1-\theta)] \bar{Z}_0 + F_4 2 (\varphi \theta \gamma \lambda - \varphi \theta \gamma + \varphi \gamma + \theta \lambda - \theta + 1) \bar{Z}_0 = 0 \quad (20)$$

求线性方程组(18)(20)的平凡解,有:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta x} \gamma (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) & \frac{B}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi) \\ \frac{1}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi) + \frac{F_1}{\Delta x} \gamma (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) + F_2 (1 + \gamma \varphi) (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) & \frac{F_3}{\Delta x} \gamma (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) + F_4 (1 + \gamma \varphi) (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (21)$$

令 $P = \theta + \frac{1}{\lambda - 1}$, 则:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta x} \gamma P & \frac{B}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi) \\ \frac{1}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi) + \frac{F_1}{\Delta x} \gamma P + F_2 (1 + \gamma \varphi) (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) & \frac{F_3}{\Delta x} \gamma P + F_4 (1 + \gamma \varphi) (\theta + \frac{1}{\lambda - 1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (22)$$

上式可转化为关于未知数 P 的一元二次方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma}{\Delta x} \left[\frac{F_3}{\Delta x} \gamma + F_4 (1 + \gamma \varphi) \right] P^2 + \frac{B}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi) \left[\frac{F_1}{\Delta x} \gamma + F_2 (1 + \gamma \varphi) \right] P + \frac{B}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi)^2 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{记: } E_1 = \frac{\gamma}{\Delta x} \left[\frac{F_3}{\Delta x} \gamma + F_4 (1 + \gamma \varphi) \right],$$

$$E_2 = \frac{B}{\Delta t} (1 + \gamma \varphi) \left[\frac{F_1}{\Delta x} \gamma + F_2 (1 + \gamma \varphi) \right],$$

$$E_3 = \frac{B}{\Delta t^2} (1 + \gamma \varphi)^2,$$

$$\text{则: } P = \frac{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3}}{2E_1} \quad (24)$$

而 $P = \theta + \frac{1}{\lambda - 1}$, 则:

$$\lambda = \frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1 \quad (25)$$

由于 $\lambda = e^{i\beta\Delta t}$, 令 $\text{Re}\beta$ 和 $\text{Im}\beta$ 分别为 β 的实部和虚部, $\text{Re} \left(\frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1 \right)$ 和 $\text{Im} \left(\frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1 \right)$ 分别为

$$\frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1 \text{ 分别为 } \frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1$$

1 的实部和虚部, 与式(25)比较, 得:

$$e^{-\text{Im}\beta\Delta t} \cos(\text{Re}\beta\Delta t) = \text{Re} \left(\frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1 \right) \quad (26)$$

$$e^{-\text{Im}\beta\Delta t} \sin(\text{Re}\beta\Delta t) = \text{Im} \left(\frac{2E_1}{-E_2 \pm \sqrt{E_2^2 - 4E_1E_3} - 2E_1\vartheta} + 1 \right) \quad (27)$$

将(26)(27)两边平方并分别相加, 可得数值解幅因子 $e^{-\text{Im}\beta\Delta t}$ 的表达式:

$$\tilde{\lambda} = e^{-\text{Im}\beta\Delta t} = f_2(Q_0, A_0, n, B, \Delta t, \Delta x, \sigma) \quad (28)$$

式中 $f_2(Q_0, A_0, n, B, \Delta t, \Delta x, \sigma)$ 为式(26)(27)右边平方和的正的平方根, 然后两式相除, 可得数值解小扰动波速 \tilde{c} :

$$\tilde{c} = \frac{\text{Re}\beta}{\sigma} = f_3(Q_0, A_0, n, B, \Delta t, \Delta x, \sigma) \quad (29)$$

根据 Von Neumann 规则, 如果 $|\lambda_1| \leq 1$ 和 $|\tilde{\lambda}_1| \leq 1$ 同时成立, 则微分方程(7)(8)和差分方程(3)(4)的解是稳定的, 但是由于式(14)(15)(19)(29)较为复杂, 难以判断其特性, 因此需要作进一步分析. 而由 Leanderts 收敛准则^[7]可知, 当幅态因子 $R_1 = \frac{\tilde{\lambda}}{\lambda_1}$ 和相态因子 $R_1 = \frac{\tilde{c}}{c_1}$ 同时趋于 1 时, 差分方程数值解完全收敛于微分方程解析解. 下面对此进行数值分析.

取 $B = 100\text{m}$, $Q_0 = 500\text{m}^3/\text{s}$, $A_0 = 250\text{m}^2$, $n = 0.025$, $\Delta x = 500\text{m}$, $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 100$, φ 分别取 0.5 和 1.0 (相应取值 0, 0.5, 1.0), 对收敛因子 R_1 和 R_2 与相对波长 $\frac{L}{\Delta x}$ 的关系进行数值分析, 计算结果如图 1~4 所示.

由图 1~4 可以看出, 一方面, 差分方程数值解的收敛情况与 φ 和 θ 的取值情况密切相关, 当 $\theta = 0$ 时, 收敛性相对较差; 另一方面, 差分方程数值解的收敛情况与相对波长 $\frac{L}{\Delta x}$ 的关系很大, 一般来讲, 对于短波而言, 时间步长不宜过大, 而对于长波, 时间步长则不宜过小, 这一点在物理意义方面也是很好解释的; 另外, 由于 R_1 和 R_2 永远只能是趋近于 1, 因此差分方程数值解总是存在着衰减和弥散现象, 数值解减幅和离散程度不可能与微分方程完全

相同.同时从图中还可以看出,不同的 φ 和 θ 值,数值解的收敛速度也是不一样的,因此在实际模拟中,需要选择合理的 φ 和 θ 值,在控制数值衰减幅度的同时,兼顾模拟的速度.

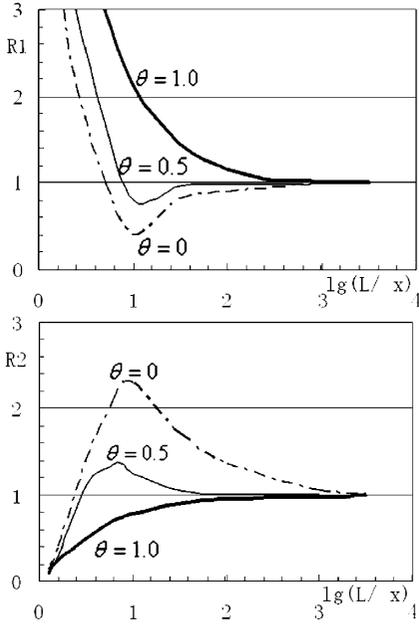


图1~2 $\varphi=0.5$ 时 R_1 和 R_2 与相对波长 $\frac{L}{\Delta x}$ 关系曲线图

Fig. 1~2 Graph of R_1 (and R_2) and wave length $\frac{L}{\Delta x}$ when $\varphi=0.5$

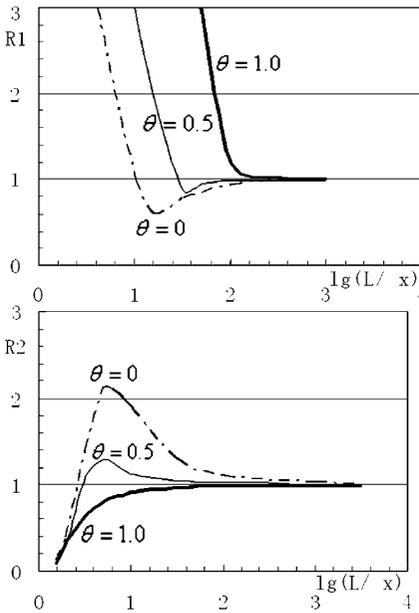


图3~4 $\varphi=1.0$ 时 R_1 和 R_2 与相对波长 $\frac{L}{\Delta x}$ 关系曲线图

Fig. 3~4 Graph of R_1 (and R_2) and wave length $\frac{L}{\Delta x}$ when $\varphi=1.0$

4 结论

(1) 根据线性化的思想和小扰动原理,分析了

San Venant 方程组的解的特性;

(2) 在统一考虑阻力项影响的基础上,全面、完整地分析了用 Pressmann 格式求解非线性 San Venant 方程组的数值稳定性和收敛性;

(3) 分析了在不同的 φ 和 θ 时差分方程数值解的收敛情况与时间步长和相对波长 $\frac{L}{\Delta x}$ 的关系;

(4) 数值解总是存在衰减和弥散现象,在实际模拟过程中,应合理选择 φ 和 θ 值,兼顾数值衰减幅度和模拟速度.

参 考 文 献

- 1 杨国录. 四点时空偏心 Preissmann 格式的应用问题. 泥沙研究, 1991, 12(4): 88 ~ 98 (Yang Guolu. Utility of pressmann four-point-space-time eccentric format. *Journal of Sediment Reserch*, 1991, 12(4): 88 ~ 98 (in Chinese))
- 2 杨国录. 河流数学模型. 北京: 海洋出版社, 1993 (65-98): 317 ~ 325 (Yang Guolu. *Mathematic model of river*. Beijing: Sea Press, 1993 (65-98): 317 ~ 325 (in Chinese))
- 3 吴作平, 杨国录, 甘明辉. 河网水流数值模拟方法研究. 水科学进展, 2003, 5(3): 350 ~ 354 (Wu Zuoping, Yang Guolu, Gan Minghui. Research of flow numerical model to river systems. *Journal of Advances in Water Science*, 2003, 5(3): 350 ~ 354 (in Chinese))
- 4 吴作平, 杨国录, 甘明辉. 复杂河网水沙数学模型研究. 水科学进展, 2004, 5(3): 336 ~ 340 (Wu Zuoping, Yang Guolu, Gan Minghui. Research of Water-Sediment Numerical Model to Complex River Systems. *Journal of Advances in Water Science*, 2004, 5(3): 336 ~ 340 (in Chinese))
- 5 陆金浦, 关治. 偏微分方程数值解. 北京: 清华大学出版社, 1987 (Lu Jinpu, Guan Yi. *Numerical Solution Methods of differential eguations*. Beijing: Qinghua University Press, 1987 (in Chinese))
- 6 Leenderts, J J. Aspects of computational for long period water-wave propagation. Rand. Memorandum, RM 5294-Pr, 1967
- 7 李荣华, 冯果忱主编. 微分方程数值解法. 北京: 高等教育出版社, 1996 (Li Huarong, Feng Guochen. *Numerical solution methods of differential eguations*. Beijing: High Education Press, 1996 (in Chinese))
- 8 李俊余, 王在华. 一类时滞系统 Hurwitz 稳定的简单判据. 动力学与控制学报, 2009, 6(2): 136 ~ 141 (Li Junyu, Wang Zaihua. Simple criteria for the Hurwitz of stability of

NUMERICAL STABILITY ANALYSIS OF NON-LINEAR SAN VENANT EQUATIONS *

Wu Zuoping

(*Wuling Power Corporation. Changsha 410004, China*)

Abstract The characteristics of non-linear San Venant equation solutions and their stability and astringency with Preissmainn format considering the influence of resistance were analyzed, and then relations between numerical solution astringency and $\Delta t/\Delta s$ and $L/\Delta x$ in different φ and θ was also discussed. At the end, it's pointed out that attenuation and dispersion were always exist, and it's important to choose appropriate φ and θ in order to control numerical solutions' dispersing range and modeling velocity in actual model.

Key words non-linear, stability, astringency