

功能梯度薄壁圆柱壳的自由振动*

杜长城 李映辉

(西南交通大学力学与工程学院, 成都 610031)

摘要 研究了由功能梯度材料制成的薄壁圆柱壳的自由振动. 采用幂律分布规律描述功能梯度材料沿厚度的梯度性质, 根据 Donnell 壳体理论, 导出了功能梯度材料薄壁圆柱壳线性振动的简化控制方程. 基于此理论分析了功能梯度圆柱壳的自由振动特性, 给出了两端简支功能梯度材料薄壁圆柱壳小挠度固有振动的频率公式. 以简支圆柱壳作为算例, 与前人结果及有限元法对比验证了该简化功能梯度薄壁圆柱壳理论的正确性, 同时讨论了周向波数及梯度指数对其频率的影响.

关键词 功能梯度材料, 薄壁圆柱壳, 线性振动, 简化理论

引言

功能梯度材料(FGM)因其组分体积分数的连续变化导致其宏观力学及热学性质的梯度分布. 由于具有诸多优越的材料性能, 并且其性能梯度具有可设计性, 功能梯度结构可在多种学科和工程领域中得到广泛应用. 然而由于存在梯度性质, 功能梯度结构的振动特性较各向同性结构^[1]复杂, Loy等^[2]最先研究了功能梯度圆柱壳的自振特性; 基于 Love 壳体理论的应变-位移几何描述, 利用 Rayleigh-Ritz 法计算了两端简支功能梯度圆柱壳的自振频率, 讨论了材料体积分数和组分材料配置对频率的影响; 陈伟球及其合作者^[3,4]采用分层近似理论研究了功能梯度矩形板和柱壳的自由振动, 沈惠申等^[5,6]及 Matsunaga H^[7,8]分别建立了考虑结构横向剪切变形的功能梯度板壳结构的动力分析模型, 分析了功能梯度板壳结构的振动特性. 然而, 对于功能梯度材料(如金属-陶瓷功能梯度材料)薄壁板壳, 其弹性模量与横向剪切模量在量级上可以与各向同性材料相比拟, 因此其横向剪切变形为相对小量, 此时考虑板壳横向剪切效应或采用层合近似模型不仅无法获得精度上的大幅提高, 还严重增加了问题的复杂性.

本文研究功能梯度薄壁圆柱壳的自由振动. 采用沿厚度的幂律分布规律描述功能梯度热物性质. 试图根据 Donnell 壳体理论推导功能梯度薄壁圆柱

壳小挠度振动的控制方程, 分析功能梯度圆柱壳的自由振动特性, 并给出两端简支功能梯度材料薄壁圆柱壳小挠度固有振动的频率公式.

1 FGM 薄壁圆柱壳运动方程

考虑中曲面半径为 R , 厚度为 h , 长度为 L 的 FGM 薄壁圆柱壳(如图 1 所示). 在其中曲面上建立参考柱坐标系 (x, θ, z) , u, v, w 分别为圆柱壳中曲面沿 x, θ, z 方向的位移.

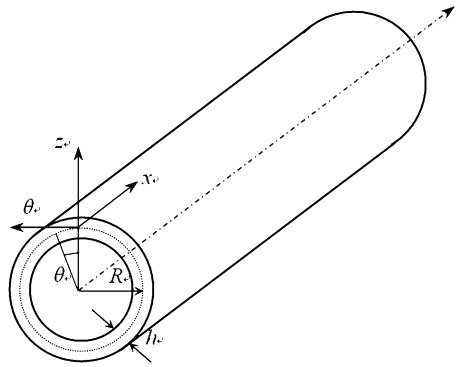


图1 圆柱壳几何模型及其参考坐标系

Fig. 1 Geometry of a cylindrical shell and the reference coordinate

采用幂律分布规律描述功能梯度材料的等效热物性质^[2,9], 其材料参数 P 表示为

$$P = (P_1 - P_2) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^N + P_2 \quad (1)$$

式中, P_1, P_2 分别为两种组分材料 1、2 的物性参数, N 为梯度指数, $N \in [0, \infty)$.

柱壳沿 x, θ 方向的应力分量及面内剪应力分别为: $\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}$; 应变分量为: $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$. 根据 Donnell 壳理论^[10], 薄壁圆柱壳的位移-应变关系可表示为:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\kappa_x, \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta + z\kappa_\theta, \gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta}^0 + z\kappa_{x\theta} \quad (2)$$

式中, $\varepsilon_x^0 = u_{,x}, \varepsilon_\theta^0 = (v_{,\theta} + w)/R, \gamma_{x\theta}^0 = v_{,x} + u_{,\theta}/R$ 分别为壳中曲面薄膜应变分量; $\kappa_x = -w_{,xx}, \kappa_\theta = -w_{,\theta\theta}/R^2, \kappa_{x\theta} = -2w_{,x\theta}/R$ 分别为壳中曲面曲率分量(下标前加“,”表示对变量的一阶或二阶偏导数).

功能梯度薄壁圆柱壳为平面应力状态, 其应力-应变关系可表示为

$$\sigma_x = Q(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_\theta), \sigma_\theta = Q(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_x), \tau_{x\theta} = G\gamma_{x\theta} \quad (3)$$

式中, $Q = E/(1-\nu^2), E, \nu$ 分别为功能梯度材料的等效弹性模量, 泊松比, 为柱壳横向坐标 z 的函数, 与组分材料相应模量具有形如(1)式的关系; G 为剪切模量, 且 $G = E/2(1-\nu)$.

对(3)式沿厚度积分得到内力分量 $N_x, N_\theta, N_{x\theta}$; 等号两边乘以 z 再积分得到弯曲力 $M_x, M_\theta, M_{x\theta}$

$$(N_x, N_\theta, N_{x\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}) dz \quad (4a)$$

$$(M_x, M_\theta, M_{x\theta}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}) z dz \quad (4b)$$

内力分量及弯曲力包含下列模量

$$(D_0^*, D_1^*, D_2^*) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} (1, z, z^2) dz \quad (5a)$$

$$(D_0^*, D_1^*, D_2^*) = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\nu E}{1-\nu^2} (1, z, z^2) dz \quad (5b)$$

根据内力与应变的关系, 可将柱壳中面的薄膜应变表示为内力分量和曲率的函数, 从而弯曲力也可以表示成内力分量和曲率的函数. 引入 Airy 应力函数 φ , 使得 $N_x = \varphi_{,\theta\theta}/R^2, N_\theta = \varphi_{,xx}, N_{x\theta} = -\varphi_{,x\theta}/R$; 将弯曲力和薄膜应变分别代入薄壁圆柱壳的 Donnell 简化内力平衡方程和应变协调方程^[10], 整理后得到功能梯度薄壁圆柱壳的小挠度振动方程

$$\bar{\rho} w_{,tt} + D_2 \nabla^2 \nabla^2 w + \nabla_1^2 \varphi = D_1 \nabla^2 \nabla^2 \varphi + q_z \quad (6a)$$

$$D_1 \nabla^2 \nabla^2 \varphi + D_2 \nabla^2 \nabla^2 w = \nabla_1^2 w \quad (6b)$$

式中, $\bar{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz$ 为功能梯度薄壁圆柱壳的等效面密度, $\nabla^2(\cdot) = (\cdot)_{,xx} + (\cdot)_{,yy}$ 为 Laplace 算子, q_z 为横向载荷; D_0 为功能梯度薄壁圆柱壳的拉伸柔度, D_1 为拉-弯耦合模量, D_2 为弯曲刚度,

分别定义为

$$D_0 = \frac{D_0^*}{(D_0^*)^2 - (\bar{D}_0^*)^2}, D_1 = \frac{D_0^* \bar{D}_0^* - \bar{D}_0^* D_1^*}{(D_0^*)^2 - (\bar{D}_0^*)^2}, \\ D_2 = D_2^* - \frac{D_0^* [(D_1^*)^2 + (\bar{D}_1^*)^2] - 2\bar{D}_0^* D_1^* \bar{D}_1^*}{(D_0^*)^2 - (\bar{D}_0^*)^2} \quad (7)$$

对于各向同性弹性材料, 有 $D_0 = 1/Eh, D_1 = 0, D_2 = Eh^3/12(1-\nu^2), \bar{\rho} = \rho h$, 从而式(6)退化为经典的 Donnell 圆柱壳振动简化控制方程. 同时, 分析发现耦合模量 D_1 具有长度量纲, 表征功能梯度圆柱壳面内力与弯曲力间的耦合程度.

2 自由振动分析

柱壳自由振动时方程(6)中 $q_z = 0$, 对于封闭圆柱壳, 可设挠度为如下形式:

$$w_{mn}(x, \theta, t) = \sin(\omega_{mn} t) W_m(x) \cos n\theta \quad (8)$$

将(8)式代入(6)式, 消去 Airy 应力函数 φ , 整理可得到关于 $W_m(x)$ 的微分方程

$$(D_0 D_2 + D_1^2) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^4 W_m + \frac{1}{R^2} \frac{d^4 W_m}{dx^4} - \frac{2D_1}{R} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 \frac{d^2 W_m}{dx^2} - D_0 \bar{\rho} \omega_{mn}^2 \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{n^2}{R^2} \right)^2 W_m = 0 \quad (9)$$

按常微分方程理论, 可设解为 $W_m(x) = e^{\lambda x}$, 代入(9)式整理得到关于 λ 的八次代数方程

$$\lambda^8 + a_1 \lambda^6 + a_2 \lambda^4 + a_3 \lambda^2 + a_4 = 0 \quad (10)$$

式中

$$a_1 = -\frac{4n^2}{R^2} - \frac{2D_1}{R(D_0 D_2 + D_1^2)} \quad (11a)$$

$$a_2 = \frac{6n^4}{R^4} + \frac{4n^2 D_1}{R^3 (D_0 D_2 + D_1^2)} + \frac{1}{R^2 (D_0 D_2 + D_1^2)} - \Omega^2 \quad (11b)$$

$$a_3 = -\frac{4n^6}{R^6} - \frac{2n^4 D_1}{R^5 (D_0 D_2 + D_1^2)} + \frac{2n^2}{R^2} \Omega^2 \quad (11c)$$

$$a_4 = \frac{n^8}{R^8} - \frac{n^4}{R^4} \Omega^2 \quad (11d)$$

其中

$$\Omega^2 = \frac{D_0 \bar{\rho} \omega_{mn}^2}{D_0 D_2 + D_1^2}$$

可以解得 λ 的八个根:

$$\lambda_j = \pm \xi_1, \pm i\xi_2, \pm (\xi_3 + i\xi_4), \pm (\xi_3 - i\xi_4) \\ j = 1, 2, \dots, 8 \quad (12)$$

从而得到 $W_m(x)$ 的一般解:

$$W_m(x) = C_1 \sinh \xi_1 x + C_2 \cosh \xi_1 x + C_3 \sin \xi_2 x + C_4 \cos \xi_2 x + C_5 e^{\xi_3 x} \sin \xi_4 x + C_6 e^{\xi_3 x} \cos \xi_4 x + C_7 e^{-\xi_3 x} \sin \xi_4 x + C_8 e^{-\xi_3 x} \cos \xi_4 x \quad (13)$$

其中常数 $C_1 - C_8$ 仅与边界条件有关. 根据圆柱壳两端八个边界条件可建立关于 $C_1 - C_8$ 的齐次线性代数方程组, 由其系数行列式为零, 可得到功能梯度薄壁圆柱壳的频率方程以及各阶频率与振型.

对于两端简支圆柱壳, 可以证明关于 $W_m(x)$ 的表达式中 $C_3 \neq 0, C_i = 0 (i \neq 3)$; 因此对于两端简支圆柱壳, 可设其满足边界条件的挠度函数为:

$$w_{mn}(x, \theta, t) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos n\theta \quad (14)$$

从而有

$$\nabla^2 \nabla^2 w_{mn} = \alpha w_{mn}, \nabla_1^2 w_{mn} = -\beta w_{mn} \quad (15)$$

式中 $\alpha = \left(\frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2}{R^2}\right)^2, \beta = \frac{m^2 \pi^2}{RL^2}$.

将(14)式代入功能梯度薄壁圆柱壳自由振动控制方程, 可以求得两端简支薄壁圆柱壳小挠度振动的固有频率为

$$\omega_{mn} = \left[\frac{(D_0 D_2 + D_1^2) \alpha^2 + 2D_1 \alpha \beta + \beta^2}{D_0 \rho \alpha} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

从(16)式可明显看出耦合模量 D_1 对功能梯度薄壁柱壳振动频率的影响.

3 算例与结果比较

本节给出柱壳 $h/R = 0.05, L/R = 20$, 轴向半波数 $m = 1$ 的算例结果. 考虑 FGM 圆柱壳的组分材料为不锈钢 (Stainless Steel) 和镍 (Nickel), 其常温下 ($T = 300K$) 的材料常数分别为: $E_{SS} = 2.07788 \times 10^{11} Pa, \nu_{SS} = 0.317756, \rho_{SS} = 8166 kg \cdot m^{-3}; E_N = 2.05098 \times 10^{11} Pa, \nu_N = 0.31, \rho_N = 8900 kg \cdot m^{-3}$. FGM 圆柱壳内表面材料为镍, 外表面为不锈钢.

由于材料为各向同性时, 本文理论即是 Donnell 壳体理论, 所以表 1 给出了由文献[2]、有限元法以及 Donnell 理论分析所得的各向同性均匀材料薄壁圆柱壳不同周向波数时的固有频率, 以验证本文理论的正确性. 由表中数据可以看出: 对于各向同性材料薄壁圆柱壳振动的基频(周向波数 $n = 1$), 有限元法所得结果是文献[2]的两倍, 而相对的, Donnell 理论的结果与有限元结果更加接近;

对于任意大于 1 的周向波数 n , Donnell 理论所得频率与文献[2]存在约 16 ~ 18Hz 的绝对误差, 这一误差使得当周向波数较少 ($n \leq 6$) 时, 两者之间的差异较大; 而有限元法结果在较少周向波数时与文献[2]较为吻合, 而当周向波数较大 ($n \geq 8$) 时与 Donnell 理论更接近. 与有限元法相比较, Donnell 理论所得柱壳振动的基频及高阶频率具有一定的精度, 从而说明本文理论具有一定的正确性.

表 1 各向同性简支圆柱壳固有频率 (Hz) 比较

Table 1 Comparison of natural frequencies (Hz) for a simply supported isotropic cylindrical shell

Material	Circumference wave number					
	n=1	n=2	n=4	n=6	n=8	
Stainless Steel	Loy, et al ^[2]	13.572	33.296	178.06	422.05	763.98
	FEM	27.422	34.444	179.01	426.23	776.6
	Donnell	23.034	49.432	195.85	440.27	782.47
Nickel	Loy, et al ^[2]	12.917	31.603	168.99	400.56	725.08
	FEM	26.111	32.698	169.9	404.55	737.11
	Donnell	21.903	46.917	185.88	417.85	742.63

对于 FGM 柱壳, 其有限元近似模型以六面体三维实体单元建模, 将壳体在厚度方向上均分为八层, 认为每一层材料为各向同性弹性材料, 其材料参数(弹性模量、泊松比、密度)设为各层中面上的功能梯度材料等效材料参数, 可由式(1)求得. 表 2 和图 2 分别给出了文献[2]、有限元法以及本文理论所得不同梯度指数下 FGM 圆柱壳固有频率随周向波数 n 变化的结果比较.

表 2 固有频率 (Hz) 随梯度指数 N 及周向波数 n 变化的结果比较

Table 2 Comparison of natural frequencies (Hz) against power-law exponential N and circumferential wave number n

Power-law exponential	Circumference wave number					
	n=1	n=2	n=4	n=6	n=8	
N=0.5	Loy, et al ^[2]	13.345	32.702	91.319	174.83	414.39
	FEM	26.856	33.845	91.883	176.2	420.74
	Present	22.639	48.542	108.33	192.32	432.33
N=1	Loy, et al ^[2]	13.235	32.43	90.553	173.36	410.91
	FEM	26.633	33.557	91.095	174.69	417.12
	Present	22.451	48.136	107.43	190.71	428.72
N=5	Loy, et al ^[2]	13.021	31.91	89.109	170.6	404.36
	FEM	26.201	33.01	89.619	171.86	410.38
	Present	22.089	47.367	105.71	187.66	421.87

从表 2 和图 2 可以看出, 对于 FGM 圆柱壳的固有振动, 文献[2]、有限元法以及本文理论表现出如下的误差性质:

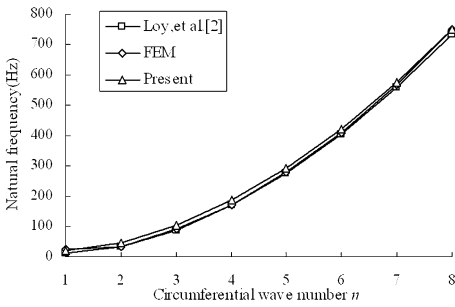


图2 FGM 柱壳固有频率随周向波数变化的结果比较 ($N=5$)

Fig. 2 Comparison of natural frequencies (Hz) against circumferential wave number n ($N=5$)

a、对于 FGM 圆柱壳振动的基频(周向波数 $n=1$),有限元法所得结果约是文献[2]的两倍,而相对的,本文理论的预测结果与有限元结果更加接近;

b、当周向波数 $n > 1$ 时,本文理论所得频率与文献[2]存在约 16 ~ 18Hz 的绝对误差,这一绝对误差限不随周向波数 n 的改变而有所改变,从而使得当周向波数较少($n \leq 6$)时,本文理论与文献[2]的差异较大;

c、 $n > 1$ 时,有限元法结果在较少周向波数($n \leq 6$)时与文献[2]较为吻合,而当周向波数较大($n \geq 7$)时与本文理论更吻合。

综上,由于有限元法在工程中已经得到广泛认可,我们认为可应用本文理论分析 FGM 圆柱壳振动的基频和高阶频率,而当周向波数 $1 \leq n \leq 6$ 时,需要与其他理论对比以校核本文理论的正确性。

同时,对比表 1 和表 2 的结果可以发现:FGM 圆柱壳的各阶频率介于不锈钢和镍之间;并且由于梯度指数 N 增大时,镍在功能梯度柱壳中所占的体积分数不断增大,所以当梯度指数 N 增大时,功能梯度柱壳的各阶振动频率向镍制成的各向同性薄壁圆柱壳的固有频率靠近。

4 结论

1) 本文采用幂律分布规律描述功能梯度材料参数沿厚度的梯度性质,根据 Donnell 壳体理论,导出了功能梯度材料薄壁圆柱壳小挠度振动的简化控制方程。

2) 基于此简化理论分析了功能梯度材料圆柱壳的自由振动特性,给出了两端简支功能梯度材料薄壁圆柱壳小挠度固有振动的频率公式。

3) 给出了简支圆柱壳的算例比较,结果证明本文理论在分析功能梯度圆柱壳振动的基频和高阶频率时具有较好的精度。

4) 本文理论以经典的柱壳简化理论为基础,所得模型形式简单,物理意义明确,具有较好的分析精度,可作为研究功能梯度薄壁板壳结构的动力学行为的理论分析模型。

参 考 文 献

- 1 钟阳,张永山. 四边固支弹性矩形薄板的自由振动. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 66 ~ 70 (Zhong Y, Zhang Y S. Free vibration of rectangular thin plate with completed clamped supported. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 66 ~ 70 (in Chinese))
- 2 Loy C T, Lam K Y, Reddy J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1999, 41: 309 ~ 324
- 3 陈伟球,叶贵如,蔡金标,丁皓江. 横观各向同性功能梯度材料矩形板的自由振动. 振动工程学报, 2001, 14(3): 263 ~ 267 (Chen W Q, Ye GR, Cai J B, Ding H J. Free vibration of Transversely isotropic FGM rectangular plates. *Journal of Vibration Engineering*, 2001, 14(3): 263 ~ 267 (in Chinese))
- 4 边祖光,陈伟球,丁皓江. 正交各向异性功能梯度圆柱壳的自由振动. 应用力学学报, 2004, 21(3): 75 ~ 78 (Bian Z G, Chen W Q, Ding H J. Free vibration of orthotropic functionally graded cylindrical shells. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2004, 21(3): 75 ~ 78 (in Chinese))
- 5 黄小林,沈惠申. 热环境下功能梯度材料板的自由振动和动力响应. 工程力学, 2005, 22(3): 224 ~ 227 (Huang X L, Shen H S. Free Vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments. *Engineering Mechanics*, 2005, 22(3): 224 ~ 227 (in Chinese))
- 6 夏贤坤,沈惠申. 功能梯度材料剪切板热屈曲后的非线性振动. 振动工程学报, 2008, 21(2): 120 ~ 125 (Xia X K, Shen H S. Nonlinear vibration of thermally postbuckled FGM plates. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, 21(2): 120 ~ 125 (in Chinese))
- 7 Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2 - D higher - order deformation theory. *Composite Structures*, 2008, 82(4): 499 ~ 512
- 8 Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally

- graded circular cylindrical shells according to a 2D higher order deformation theory. *Composite Structures*, 2009, 88(4): 519 ~ 531
- 9 Suresh S, Mortensen A. *Fundamentals of Functionally Graded Materials*. London: Maney, 1998
- 10 曹志远. 板壳振动理论. 北京: 中国铁道出版社, 1989 (Cao Z Y. *Vibration theory of plates and shells*. Beijing: China Railway Publishing House, 1989 (in Chinese))

FREE VIBRATION OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL THIN SHELLS *

Du Changcheng Li Yinghui

(*School of Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

Abstract The free vibration of cylindrical thin shells made of functionally graded materials was studied. The gradient properties of functionally graded material were expressed as volume fraction power-law distributions in the thickness direction. Based on Donnell's shell theory, the simplified governing equations for linear vibration of functionally graded cylindrical thin shells were derived. Free vibration of functionally graded cylindrical thin shells was analyzed with the present shell theory. Frequency formula for simply supported functionally graded cylindrical thin shells was obtained. By comparing the results for simply supported cylindrical shells with both previous works and finite element method, the present simplified functionally graded cylindrical thin shell theory was validated. The influence of circumference wave number and power-law exponential on frequencies was also discussed.

Key words functionally graded material, cylindrical thin shells, linear vibration, simplified theory