

平面薄膜自由振动的有限元分析*

林文静 陈树辉

(中山大学工学院应用力学与工程系, 广州 510275)

摘要 构造6节点三角形单元, 适合于平面薄膜自由振动的有限元分析. 文中采用面积坐标, 给出单元的形函数, 根据哈密顿原理建立薄膜自由振动方程, 推导其单元刚度矩阵和单元质量矩阵. 3个典型算例表明, 6节点三角形单元的计算结果比 ANSYS 三角形单元更接近理论解, 具有更高的精度.

关键词 平面薄膜振动, 有限元分析, 6节点三角形单元

引言

薄膜结构在建筑上得到越来越多的应用, 薄膜通过施加预张力实现复杂多变的造型, 实现建筑设计时尚的外观和风格. 薄膜结构的受力特点属于典型的强非线性结构, 重量轻, 在风荷载作用下产生风振是薄膜结构主要的破坏形式, 因此, 研究薄膜结构的自由振动特性尤其必要. 对于平面薄膜结构自由振动分析, 仅有矩形、圆形、等腰直角三角形等几种规则形状的固有频率和振型有理论解^[1-4], 因此, 数值分析是研究不同形态的薄膜自由振动不可缺少的方法. 国内有部分文献以数值方法计算膜的自振特性^[5-7], 工程应用主要采用 ANSYS 计算. 但是, 采用 ANSYS 计算, 薄膜的预张力不是预先指定, 而是通过施加温度变化来得到的, 对于任意边界形状和空间的薄膜, 用这种方式很难获得张力. 而且, ANSYS 计算自振特性的单元仅限于4节点矩形单元或3节点三角形单元, 计算精度有待提高. 因此, 有必要研究新的单元, 方便有限元计算, 提高计算精度. 文[8], [9]构造复杂的计算单元对薄膜结构进行数值分析, 文[10], [11]用极坐标单元和椭圆坐标单元研究圆形膜与椭圆形膜的自由振动.

本文提出了一种6节点三角形薄膜单元, 它可以提高计算精度. 该单元采用面积坐标推导刚度矩阵和质量矩阵. 3个典型算例的计算结果与矩形膜、等腰直角三角形膜、圆形膜的理论解^{[1], [2], [3]}相比较, 6节点三角形单元的计算结果比 ANSYS 的

结果更接近理论解, 具有更高的精度.

1 拉格朗日方程

薄膜是指不能抵抗弯曲变形和剪切变形的平面薄片, 它完全依靠张力来平衡垂直荷载. 因此, 可设薄膜是一个完全柔性的等厚度薄片, 在任何方向被均匀的拉力张拉着.

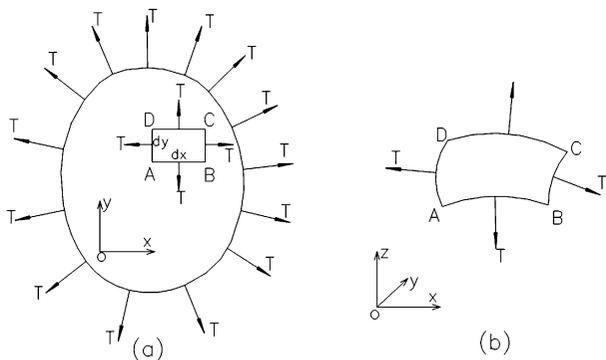


图1 薄膜的横向振动

Fig. 1 Transverse vibration of membrane

取 xoy 平面与薄膜变形前的平面一致, z 轴垂直于薄膜平面, 构成右手坐标系, 如图1所示. 记薄膜单位长度上的张力为 T , 单位面积上的质量为 ρ , 沿 z 轴方向的位移为 w .

薄膜振动前的表面积为

$$A_0 = \iint_A dA_0 = \iint_A dx dy \quad (1)$$

振动中处于挠曲后位置时, 薄膜的表面积成为

$$A_1 = \iint_A \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2} dx dy \approx \iint_A [1 +$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \Big] dx dy \tag{2}$$

振动过程中,薄膜的势能为

$$U_p = T\Delta A = \frac{1}{2} T \iint_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \tag{3}$$

动能为

$$T_k = \frac{\rho}{2} \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx dy \tag{4}$$

根据拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j}, (j=1, \dots, n) \tag{5}$$

经运算可得薄膜自由振动的动力学方程. 式中,拉格朗日函数 $L = U_p - T_k$.

2 6 节点三角形单元

图2所示为6节点三角形单元. 为方便单元刚度矩阵、质量矩阵的计算,我们采用面积坐标. 各节点的直角坐标为 $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, 6$. 面积坐标如图2所示.

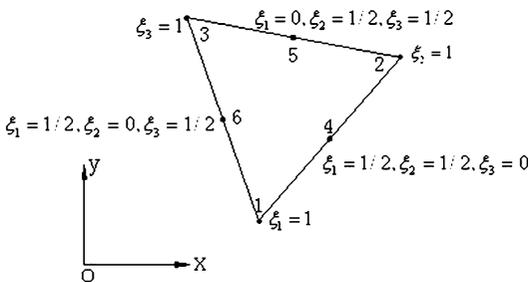


图2 6节点三角形单元

Fig.2 Triangular element with 6 nodes

面积坐标与直角坐标的关系为

$$\xi_i = \frac{1}{2A_e} (a_i + b_i x + c_i y), \quad (i=1, 2, 3) \tag{6}$$

且满足如下关系式

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \tag{7}$$

其中, A_e 为单元的面积

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{8}$$

a_i, b_i, c_i 分别表示行列式(8)第 i 行第 1, 2, 3 个元素的代数余子式, (x_i, y_i) 分别为第 i 节点的整体坐标.

三角形单元的位移模式取为:

$$w = Nw_e \tag{9}$$

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6] \tag{10}$$

$$w_e = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4 \quad w_5 \quad w_6] \tag{11}$$

其中,

$$N_1 = 2\xi_1(\xi_1 - 1/2), N_2 = 2\xi_2(\xi_2 - 1/2),$$

$$N_3 = 2\xi_3(\xi_3 - 1/2), N_4 = 4\xi_1\xi_2,$$

$$N_5 = 4\xi_2\xi_3, N_6 = 4\xi_1\xi_3$$

于是

$$\frac{\partial w}{\partial t} = N \frac{\partial w_e}{\partial t} = N \dot{w}_e \tag{12}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} w_e = G_x w_e \tag{13}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial y} w_e = G_y w_e \tag{14}$$

其中,

$$G_x = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{15}$$

$$G_y = \frac{\partial N}{\partial y} \tag{16}$$

由公式(3)、(13)、(14), 单元体的势能为

$$U_{pe} = \frac{1}{2} T \iint_A [w_e^T G_x^T G_x w_e + w_e^T G_y^T G_y w_e] dx dy = \frac{1}{2} w_e^T K_e w_e \tag{17}$$

其中, K_e 称为单元刚度矩阵.

$$K_e = T \iint_A [G_x^T G_x + G_y^T G_y] dx dy \tag{18}$$

根据积分公式

$$\iint_{A_e} \xi_1^\alpha \xi_2^\beta \xi_3^\gamma dx dy = \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!} 2A_e \tag{19}$$

不难求得 K_e 的各个元素.

由公式(4)、(12), 单元体的动能为

$$T_{ke} = \frac{1}{2} \rho \iint_A \dot{w}_e^T N^T N \dot{w}_e dx dy = \frac{1}{2} \dot{w}_e^T M_e \dot{w}_e \tag{20}$$

其中, M_e 称为单元质量矩阵,

$$M_e = \rho \iint_A N^T N dx dy \tag{21}$$

3 频率方程

将公式(18)、(21)代入公式(5), 再经过运算, 可得薄膜自由振动方程:

$$M\dot{w} + Kw = 0 \tag{22}$$

其中, K 和 M 为薄膜总刚度矩阵和总质量矩阵, 它们分别由单元刚度矩阵 K_e 和单元质量矩阵 M_e 迭

加而成, w 为薄膜总位移列阵. 薄膜的振动频率方程为:

$$KA = \omega MA \quad (23)$$

此为广义特征值问题, 其特征值为固有频率的平方, 特征向量为振型. 可以利用标准程序求解.

4 算例

算例 1: 计算图 3 所示的矩形薄膜的固有频率, 其中 $A = 2.0\text{m}$, $B = 1.0\text{m}$, 单位长度上张力 $T = 13800\text{N/m}$, 单位面积质量 $\rho = 7.805\text{kg/m}^2$. 数值计算网格 50×50 , 计算单元总数 5000 个.

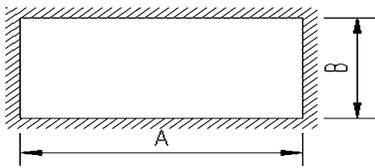


图 3 周边固定矩形薄膜的自由振动

Fig. 3 Free vibration of rectangular membrane with fixed sides

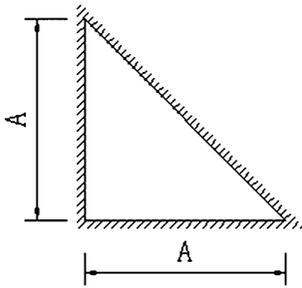


图 4 周边固定的等腰直角三角形薄膜的自由振动

Fig. 4 Free vibration of isosceles right triangular membrane

矩形薄膜自由振动有理论解^[1], 其固有频率 ω_{mn} 和振型 w_{mn} 为:

$$w_{mn} = \phi_{mn} \sin \frac{m\pi x}{A} \sin \frac{n\pi y}{B} \quad (24)$$

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\pi^2 T}{\rho} \left(\frac{m^2}{A^2} + \frac{n^2}{B^2} \right) \quad (25)$$

$$f = \omega / (2\pi) \quad (26)$$

表 1 所示为矩形薄膜自由振动固有频率 6 节点三角形有限元的计算结果和理论解的比较. 可以看出, 有限元结果非常接近理论解, 有限元结果略大于理论解. 这是正确的, 因为, 根据有限元理论, 有限元法计算所得的固有频率是实际频率的上限. 6 节点三角形有限元的计算结果比 ANSYS 更精确.

算例 2: 计算图 4 所示的等腰三角形薄膜的固

有频率及其相应的振型. 其中, 边长 $A = 1.0\text{m}$, 膜张力和质量数据同算例 1. 数值计算网格 50×50 , 计算单元总数 2500 个.

表 1 周边固定矩形薄膜自由振动的
前 8 个固有频率和固有振型

Table 1 Lowest 8 natural frequencies and mode shapes of rectangular membrane with fixed sides

m n	Theoretical Solution	ANSYS mesh = 50 x 50	6 - node elements mesh = 50 x 50	Theoretical Solution	6 - node elements
1 1	23.5060	23.510	23.5060		
2 1	29.7330	29.745	29.7330		
3 1	37.902	37.943	37.9023		
1 2	43.3429	43.370	43.3429		
2 2	47.0119	47.043	47.0120		
4 1	47.0119	47.113	47.0121		
3 2	52.5609	52.611	52.5611		
5 1	56.6099	56.812	56.6103		

等腰直角三角形薄膜自由振动有理论解^[2], 其固有频率 ω_{mn} 和振型 Φ_{mn} 为:

$$\Phi_{mn} = \sin \left[\frac{\pi}{A} (m+n)x \right] \sin \left(\frac{\pi}{A} ny \right) - (-1)^m \sin \left[\frac{\pi}{A} (m+n)y \right] \sin \left(\frac{\pi}{A} nx \right) \quad (27)$$

$$\Omega_{mn}^2 = \left(\frac{\pi}{A} \right)^2 [(m+n)^2 + n^2] \quad (28)$$

$$\omega_{mn} = \Omega_{mn} \sqrt{T/\rho} \quad (29)$$

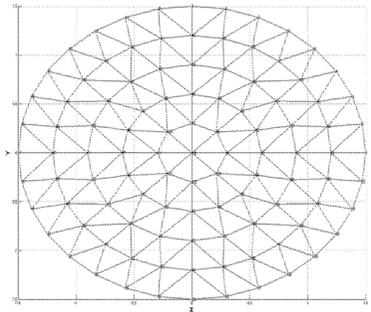


图 5 周边固定的圆形薄膜的自由振动

Fig. 5 Free vibration of circular membrane with fixed sides

表 2 所示为等腰直角三角形薄膜自由振动固有频率和固有振型有限元的数值结果和理论解的

比较.可以看出,有限元数值结果非常接近理论解,有限元结果略大于理论解.6节点三角形有限元的计算结果比 ANSYS 更精确.

算例3:计算图5所示的圆形薄膜的固有频率及其相应的振型.其中,半径 $l = 1.5\text{m}$,膜张力和单位面积质量数据同算例1.单元划分方法:沿半径方向等分 n 份,每份长度为 l/n ,再以 l/n 长度在圆周方向等分节点,从最外侧圆环向内圆环划分单元.本计算取 $n = 30$,单元总数 5760.

周边固定的圆形薄膜的自由振动有理论解^[3],固有圆频率 ω_{mn} 和振型 Φ_{mn} 为

$$\phi_{mn}(r, \theta) = J_m(\beta_m^{(n)} \frac{r}{l}) \sin(n\theta + \psi) \quad (30)$$

$$\omega_{mn} = \beta_m^{(n)} \cdot \frac{c}{l} \quad (31)$$

$\beta_m^{(n)}$ 是第一类贝塞尔函数,方程 $J_n(\lambda l)$ 的第 m 个零点.

表2 周边固定等腰直角三角形薄膜自由振动的前8个固有频率和固有振型

Table 2 Lowest 8 natural frequencies and mode shapes of triangular membrane with fixed sides

m n	Theoretical Solution	ANSYS mesh = 50 × 50	6 - node elements mesh = 50 × 50	Theoretical Solution	6 - node elements
1 1	60.6921	60.732	60.6922		
2 1	85.8317	85.942	85.8318		
1 2	97.8631	98.026	97.8633		
3 1	111.9108	112.15	111.9112		
2 2	121.3843	121.70	121.3851		
1 3	35.7118	136.15	135.7128		
4 1	138.3994	138.86	138.4005		
3 2	146.1660	146.71	146.1678		

表3 周边固定圆形薄膜自由振动的前12个固有频率和固有振型

Table 3 Lowest 12 natural frequencies and mode shapes of circular membrane with fixed sides

m n	Theoretical Solution	6 - node elements	Theoretical Solution	6 - node elements
1 0	13.8513	13.8525		
1 1	22.0698	22.0718		
1 2	29.5801	29.5828		
2 0	31.7945	31.7974		
1 3	36.7484	36.7517		
2 1	40.4083	40.4120		
2 2	48.4815	48.4861		
1 5	50.5219	50.5266		
2 3	56.2214	56.2269		
1 6	57.2299	57.2354		
3 1	58.5970	58.6028		
2 4	63.7304	63.7368		

表3所示为周边固定圆形薄膜自由振动的前12个固有频率和固有振型有限元的数值结果和理论解的比较.可以看出,有限元数值结果非常接近

理论解,有限元结果略大于理论解。

5 结论

本文提出6节点三角形有限元单元,适合于平面薄膜自由振动的有限元分析,可以方便地计算平面薄膜的固有频率及其相应的振型,也可以方便地应用于空间膜结构的自由振动分析。3个典型算例表明,6节点三角形单元的计算结果比ANSYS三角形单元更接近理论解,具有更高的精度。

参 考 文 献

- Timoshenko S, Young D H, Weaver W. Vibration problems in engineering. 4th ed. *John Wily & Sons Inc*, 1974
- Morse P M, Feshbach H. *Methods of theoretical Physics*. McGraw-Hill, New York, 1953
- 林文静,陈树辉,李森. 圆形薄膜自由振动的理论解. 振动与冲击, 2009, 28(5): 84~86(Lin W J, Chen S H, Li S. Analytical solution of the free vibration of circular membrane. *Journal of Vibration and Shock*, 2009, 28(5): 84~86(in Chinese))
- 林文静,陈树辉,张启明. 圆环形薄膜自由振动的理论解. 中山大学学报(自然科学版), 2008, 47(增刊2): 103~108(Lin W J, Chen S H, Zhang Q M. The analytical solution of free vibration of annular membrane. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatsen*, 2008, 47(sup. 2):103~108(in Chinese))
- 余志祥,赵雷. 张拉膜结构自振特性研究. 西南交通大学学报. 2004, 39(6): 734~739(Yu ZH X, Zhao L. Research on free vibration properties of membrane structure. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2004, 39(6): 734~739(in Chinese))
- 张华,单建. 索膜结构的抖振动力特性研究. 工程力学, 2004, 21(3): 61~65(Zhang H, Shan J. On buffeting dynamic properties of membrane structures. *Engineering mechanics*, 2004, 21(3): 61~65(in Chinese))
- 潘钧俊,顾明. 考虑几何非线性的方形张拉膜的等效一阶频率. 振动与冲击, 2007, 26(4): 18~20(Pan J J, Gu M. Equivalent fundamental frequency of a square tensioned membrane with geometric nonlinearity. *Journal of Vibration and Shock*, 2007, 26(4): 18~20(in Chinese))
- Houmat A. Free vibration analysis of membranes using the h-p version of the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 282: 401~410
- Houmat A. Free vibration analysis of arbitrarily shaped membranes using the trigonometric pversion of the finite element method. *Thin-Walled Structures*, 2006, 44: 943~951
- Buchanan G R, Peddieson J J. A finite element in elliptic coordinates with application of membrane vibration. *Thin-Walled Structures*, 2005, 43: 1444~1454
- Buchanan G R. Vibration of circular membranes with linearly varying density along a diameter. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 280: 407~414

FREE VIBRATION ANALYSIS OF PLANE MEMBRANES BY FINITE ELEMENT METHOD*

Lin Wenjing Chen Shuhui

(Department of Applied Mechanics and Engineering, School of Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract A pre-tensioned 6-node triangular membrane element was constructed for the free vibration analysis of membranes by finite element. The shape functions, which were expressed by the area coordinate, were given to derive the element stiffness and mass matrices in accordance with the Hamilton principle. Three typical examples show that the results calculated by the 6-node triangular element are more close to the theoretical solution and are more accurate than the results of ANSYS.

Key words free vibration of plane membrane, finite element analysis, 6-node triangular element

Received 6 February 2010, revised 13 March 2010.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10972240)