

弹塑性梁系统的动力学特性研究*

石望 刘锦阳

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘要 研究了弹塑性梁系统的动力学特性. 从弹塑性梁的非线性本构关系出发, 同时考虑几何非线性, 用虚功原理建立单个梁的动力学变分方程, 利用假设模态法离散. 在此基础上引入运动学约束关系, 建立了弹塑性梁系统的刚-柔耦合动力学方程. 对重力作用下的柔性单摆和双摆数值仿真结果表明, 塑性应变引起横向变形绝对值增大和横向振动振幅衰减, 在角加速度突变时塑性效应最为显著.

关键词 弹塑性梁系统, 非线性本构关系, 动力学

引言

目前, 机械系统各部件的弹塑性动力学问题已经引起工程界的重视. 例如, 在受冲击载荷作用时, 汽车的某些柔性部件会产生弹塑性变形, 其特点是当载荷卸去之后柔性部件存在不可恢复的永久变形, 在卸载的情况下, 应力和应变之间不再存在唯一的对应关系, 需要考虑弹塑性效应, 建立柔性多体系统在冲击载荷作用下的更加精确的动力学模型, 以实现汽车碰撞过程的动力学仿真. 此外, 人体在汽车碰撞过程中, 某些致伤部位的损伤机理分析也是目前需要解决的问题. 由此可见, 弹塑性多体系统动力学的研究具有重要的工程应用前景.

近二十年来, 柔性多体系统动力学建模理论研究取得了较大的进展. 1987年, Kane^[1]在动力刚化实验中发现传统的混合坐标方法由于忽视了应变-位移关系式中的二次项, 实际上是零次近似方法, 在处理高速旋转的悬臂梁动力学问题时失效, 此后, 国外学者对动力刚化问题开展了研究, 提出了子结构法^[2]、初应力法^[3], 一次近似混合坐标方法^[4]和绝对节点坐标法^[5], 为解决大型复杂结构动力学问题提供了理论依据. 以上研究工作考虑了柔性多体系统的几何非线性效应, 但是建模理论是基于线性的本构关系, 没有进一步对柔性多体系统的材料非线性问题开展研究.

目前, 国内外对弹塑性多体系统动力学研究才刚起步. Gerstmayr^[6]等建立了作旋转运动弹塑性梁

的动力学模型, 用假设模态法进行离散, 研究了在角速度已知的情况下弹塑性应变对梁的振动特性的影响. 在此基础上, Gerstmayr^[7]等进一步研究作自由旋转运动单摆的动力学性能, 考虑弹塑性变形和刚体运动的耦合, 研究了弹塑性应变对系统刚-柔耦合动力学特性的影响, 然后将弹塑性问题研究从平面梁推广到平板. 以上研究工作基于线弹性假设, 没有考虑几何非线性效应, 需要在前人研究的基础上同时考虑几何非线性和材料非线性, 建立更加精确的动力学模型, 并且将建模方法推广应用到多体系统.

本文基于弹塑性梁的非线性本构关系和非线性应变-位移关系, 用虚功原理建立了单柔性梁的动力学变分方程, 利用假设模态法离散. 在此基础上引入运动学约束关系建立了弹塑性多体系统的动力学方程. 首先对柔性单摆进行数值仿真, 将计算结果与前人结果进行比较验证本文模型的正确性, 并研究截取模态的阶数对计算结果的影响, 然后, 将弹塑性动力学建模方法由单梁推广到梁系统, 研究弹塑性应变对柔性双摆的动力学特性的影响.

1 梁变形的描述

平面柔性梁如图1所示, 建立惯性基 $e_1^0 e_2^0$ 和柔性梁的浮动基 $e_1^b e_2^b$. 设 r_0 为浮动基原点关于惯性基的位置向量在惯性基下的坐标阵, θ 为浮动基关于惯性基的姿态角, 梁中线上任意一点 k 相对惯性基

的位置向量在惯性基下的坐标阵为

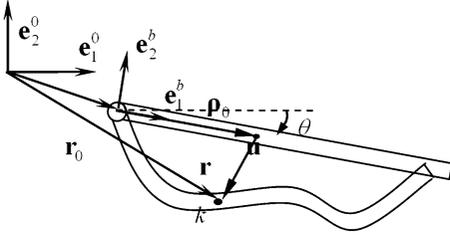


图1 作大范围运动的弹塑性梁

Fig. 1 An elasto-plastic beam undergoing large overall motion

$$r = r_0 + A(\rho'_0 + u') \tag{1}$$

其中, $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 为 e_1^b, e_2^b 关于 e_1^0, e_2^0 的方向余弦阵, $\rho'_0 = [x \ 0]^T$ 为变形前 k 相对于浮动基的位置向量在浮动基下的坐标阵, $u' = [u_1 \ u_2]^T$ 为点 k 的变形位移在浮动基下的坐标阵, 其中, u_1 和 u_2 分别为 k 的纵向变形和横向变形. 考虑几何非线性效应, 梁轴线上的任意一点 k 的纵向变形 u_1 和轴向伸长量 s 的关系为^[4]

$$u_1 = s - \frac{1}{2} \int_0^x (\partial u_2 / \partial \xi)^2 d\xi \tag{2}$$

用假设模态法进行离散, s 和 u_1 分别可以通过形函矩阵 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 表达为

$$s = \phi_1(x)p, \quad u_2 = \phi_2(x)p \tag{3}$$

其中, p 为模态坐标阵. 将(3)式代入(1)式和(2)式, 得到

$$r = r_0 + A(\rho'_0 + u'), \quad u' = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} p - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p^T H p \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

其中, $H = \int_0^x (\partial \phi_2 / \partial \xi)^T (\partial \phi_2 / \partial \xi) d\xi$. 将(4)式求变分得到:

$$\delta r = \delta r_0 + \delta \theta A \tilde{I}(\rho'_0 + u') + A \delta u' \tag{5}$$

其中 $\tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 将(4)式对时间求二阶导数得到:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \ddot{r}_0 + \ddot{\theta} A \tilde{I}(\rho'_0 + u') + A \ddot{u}' - \\ &\quad \dot{\theta}^2 (\rho'_0 + u') + 2\dot{\theta} A \tilde{I} \dot{u}' \end{aligned} \tag{6}$$

2 计算广义质量阵和力阵

基于 Euler - Bernoulli 假设, 不计剪切变形, 由虚功原理, 平面梁的动力学变分方程为:

$$\int_V \delta r^T (-\rho \ddot{r}) dV - \int_V \delta \varepsilon_{xx}^T \sigma_{xx} = 0 \tag{7}$$

其中 $f = [f_1 \ f_2]^T$ 是体力向量在惯性基下的坐标阵, 平面梁的非中线上任意一点的纵向变形 u_1^* 和横向变形 u_2^* 与中线上对应点的纵向变形 u_1 和横向变形 u_2 的关系为:

$$\begin{aligned} u_1^* &= u_1 - y \frac{\partial u_2}{\partial x} = s - \frac{1}{2} \int_0^x (\partial u_2 / \partial \xi)^2 d\xi - \\ &\quad y \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad u_2^* = u_2 \end{aligned} \tag{8}$$

由上式, 该点沿 x 方向的应变可表示为:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1^*}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2^*}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial s}{\partial x} - y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} p - \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} p \tag{9}$$

弹塑性应力与应变关系式为:

$$\sigma_{xx} = E(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xx}^p) \tag{10}$$

其中 E 是弹性模量, ε_{xx}^p 是塑性应变.

将式(4), (5), (6), (9)和(10)代入(7), 基于小变形假设, 不计动力学方程中变形坐标阵 p 的二次以上项, 动力学变分方程为:

$$\delta q^T (-M\ddot{q} + Q) = 0 \tag{11}$$

其中, $q = [r_0^T \ \theta \ p^T]^T$ 为广义坐标阵. 设 b 和 S 表示梁的宽度和横截面积, 广义质量阵和广义力阵为:

$$M = \begin{bmatrix} M_{rr} & M_{r\theta} & M_{rp} \\ M_{\theta r} & M_{\theta\theta} & M_{\theta p} \\ M_{pr} & M_{p\theta} & M_{pp} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} Q_r \\ Q_\theta \\ Q_p \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \int_V \rho I dV = \rho S I l, \\ M_{\theta r} &= M_{r\theta}^T = [-Y_2 p \ E_1 + Y_1 p] A^T \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} M_{pr} &= M_{rp}^T = [Y_1^T - C_p \ Y_2^T] A^T, \\ M_{\theta\theta} &= J_{11} + 2Z_{11} p \end{aligned} \tag{14}$$

$$M_{p\theta} = M_{\theta p}^T = (W_{21} - W_{12})p + Z_{12}^T, \quad M_{pp} = W_{11} + W_{22} \tag{15}$$

$$Q_r = 2\dot{\theta} A \begin{bmatrix} Y_2 \dot{p} \\ -Y_1 \dot{p} \end{bmatrix} + \dot{\theta}^2 A \begin{bmatrix} E_1 + Y_1 p \\ Y_2 p \end{bmatrix} + V f \tag{16}$$

$$Q_\theta = -2\dot{\theta} Z_{11} \dot{p} + \frac{1}{\rho} [-f_1 Y_2 p + f_2 (E_1 + Y_1 p)] \tag{17}$$

$$\begin{aligned} Q_p &= -2\dot{\theta} (W_{21} - W_{12}) \dot{p} + \dot{\theta}^2 Z_{11}^T - [K_f - \dot{\theta}^2 (W_{11} + \\ &\quad W_{22})] p + \frac{1}{\rho} (f_1 Y_1^T + f_2 Y_2^T) - \dot{\theta}^2 D p - \frac{1}{\rho} f_1 C p + f_p \end{aligned} \tag{18}$$

其中, 各常值阵为:

$$E_1 = bS \int_0^l \rho x dx, \quad J_{11} = bS \int_0^l \rho x^2 dx, \quad [f_1 \ f_2]^T = A^T f \tag{19}$$

$$W_{mk} = bS \int_0^l \rho \phi_m^T \phi_k dx, \quad m, k = 1, 2 \quad (20)$$

$$Y_k = bS \int_0^l \rho \phi_k dx, \quad Z_{ik} = bS \int_0^l \rho x \phi_k dx, \quad k = 1, 2 \quad (21)$$

$$C = bS \int_0^l \rho (l-x) (\partial \phi_2 / \partial x)^T (\partial \phi_2 / \partial x) dx \quad (22)$$

$$D = \frac{1}{2} bS \int_0^l \rho (l^2 - x^2) (\partial \phi_2 / \partial x)^T (\partial \phi_2 / \partial x) dx \quad (23)$$

$$K_f = b \int_0^l [ES (\partial \phi_1 / \partial x)^T (\partial \phi_1 / \partial x) + EI (\partial \phi_2 / \partial x)^T (\partial \phi_2 / \partial x)] dx \quad (24)$$

$$f_p = b \int_S E [(\partial \phi_2 / \partial x)^T - y (\partial \phi_2 / \partial x)^T] \epsilon_{xx}^p dS, I = \int_S y^2 dS \quad (25)$$

设平面梁多体系统由 N_B 个梁组成, 记为 B_i ($i = 1, \dots, N_B$), M_i, Q_i, q_i 分别为对应于 B_i 的广义质量阵, 广义力阵和广义坐标阵, 多体系统动力学变分方程为:

$$\sum_{i=1}^{N_B} \delta q_i^T (-M_i \ddot{q}_i + Q_i) = \delta q^T (-M \ddot{q} + Q) = 0 \quad (26)$$

其中, $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_{N_B}), Q = [Q_1^T, \dots, Q_{N_B}^T]^T, q = [q_1^T, \dots, q_{N_B}^T]^T$, 为多体系统的广义质量阵, 广义力阵和广义坐标阵. 设系统的运动学约束方程为 $\Phi(q, t) = 0$, 多体系统封闭的第一类拉格朗日动力学方程为:

$$\begin{bmatrix} M & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (27)$$

其中, $\Phi_q = \partial \Phi / \partial q, \gamma = -(\Phi_q \dot{q})_q \dot{q} - 2\Phi_{qq} \dot{q} - \Phi_{qt}$.

3 塑性应变 ϵ_{xx}^p 的计算

在理想弹塑性情况下, 应力与应变的本构关系如图 2 所示, 图中, σ_y 是屈服应力.

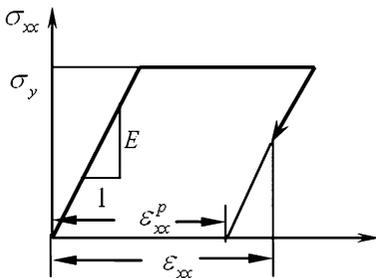


图 2 理想弹塑性梁的本构关系

Fig. 2 Constitutive relation of a perfectly elasto-plastic beam

若令 Δt 为时间步长, $\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E}$, 则从图中可以看出, 后一时刻的塑性应变 $\epsilon_{xx}^p(t + \Delta t)$ 可由 ϵ_y 、总应变

$\epsilon_{xx}(t + \Delta t)$ 和前一时刻的塑性应变 $\epsilon_{xx}^p(t)$ 计算得到.

令 $d\epsilon = \epsilon_{xx}(t + \Delta t) - \epsilon_{xx}^p(t)$, $\epsilon_{xx}^p(t + \Delta t)$ 与 $\epsilon_{xx}^p(t)$, $\epsilon_{xx}(t + \Delta t)$ 的关系式为:

$$\epsilon_{xx}^p(t + \Delta t) = \begin{cases} \epsilon_{xx}^p(t), & |d\epsilon| \leq \epsilon_y \\ \epsilon_{xx}^p(t) + \text{sign}(d\epsilon) [|d\epsilon| - \epsilon_y], & |d\epsilon| \geq \epsilon_y \end{cases} \quad (28)$$

由于塑性应变 ϵ_{xx}^p 与 x 和 y 坐标有关, 在每一步计算积分式(25)时, 令 $g(x, y, t) = [(\partial \phi_1 / \partial x)^T - y (\partial \phi_2 / \partial x)^T] \epsilon_{xx}^p(x, y, t)$, 将梁等分为 $n_1 \times n_2$ 个矩形单元, 矩形单元中心在浮动基下的坐标为 $(x_i, y_i), i = 1, \dots, n_1, j = 1, \dots, n_2$, 矩形单元的面积为 $\Delta S = \Delta l \Delta h = lh(n_1 n_2)$. 积分式(25)可写成 $f_p = b \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} Eg(x_i, y_j, t) \Delta S$. 先根据(28)式计算 $\epsilon_{xx}^p(x, y, t)$, 然后求和计算 f_p , 再将 $\epsilon_{xx}^p(x, y, t)$ 储存在全局数组中, 用于计算 $\epsilon_{xx}^p(x, y, t + \Delta t)$.

4 仿真计算

弹塑性单摆如图 3 所示, 将梁从水平位置释放, 在重力作用下摆动, 重力加速度 $g = 9.81 m/s^2$, 杆的参数: 长 $l = 1m$, 厚度 b 和高 h 均为 $0.004m$, 弹性模量 $E = 2.1 \times 10^{11}$, 密度 $\rho = 7800 kg/m^3$, 屈服应力 $\sigma_y = 5 \times 10^6 N/m^2$. 在计算塑性力 f_p 时取 $n_1 = 20, n_2 = 10$.

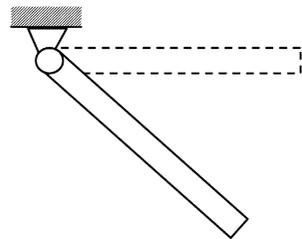


图 3 弹塑性单摆示意图

Fig. 3 Elasto-plastic single pendulum

梁上任意一点的弯矩的积分式为 $M = b \int_{-0.5h}^{0.5h} \sigma_{xx} y dy$. 横向变形采用简支-简支梁的模式, 纵向变形采用简支-自由杆的模式, 横向与纵向各取 3 阶, 用变步长 Runge-Kutta 法求解.

图 4 为本文模型计算的梁中点弯矩和横向变形与参考文献[7]结果的比较, 从图中可以看出本文的结果与参考文献基本吻合, 从而验证了本文模型的正确性. 参考文献[7]采用的是线性的应变-位移关系, 仅适用于低速转动的情况, 而本文采用的是非线性的应变-位移关系, 适用于高速转动的情况.

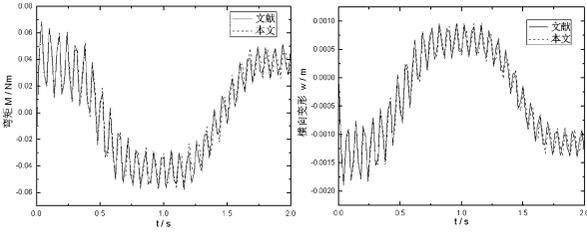


图4 梁中点弯矩与横向变形和参考文献的比较

Fig.4 Contrast of bending moment and transverse deformation of mid-point

图5为弹性和弹塑性情况下梁中点的横向变形比较,从图中可以看出,两种情况下振动的频率基本相同,但是,弹塑性梁的弯矩和变形的平均值的绝对值都比弹性梁大,弹性情况振动是周期性的,而弹塑性情况下弯矩和变形的振幅都随时间逐渐衰减.图6为弹塑性情况下截取1阶和3阶横向振动模态时梁中点的横向变形比较,实线为取3阶纵向振动和3阶横向振动模态的横向变形曲线,虚线为取3阶纵向振动和1阶横向振动模态的横向变形曲线.可以看出,由于弹塑性引起的附加广义力 f_p 的影响,横向振动不再是周期性的,横向振动模态取1阶时横向变形振幅明显比取3阶要大,由此可见,计算弹塑性振动时需要截取高阶模态,才能保证计算精度.

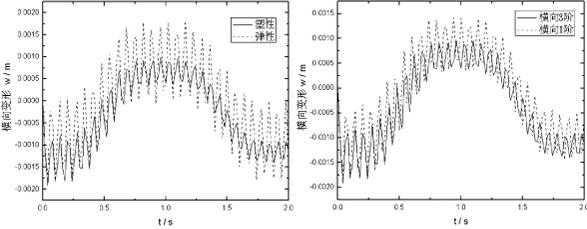


图5 弹性和弹塑性的比较

图6 不同模式阶数的比较

Fig.5 Contrast of elastic and elasto-elastic results

Fig.6 Contrast of results with different number of modes

弹塑性双摆如图7所示,两根梁以旋转铰相连,均从水平位置释放,在重力作用下运动,两根梁的物理和几何参数与单摆梁相同.图8为弹性与弹塑性情况下内梁和外梁上表面中点塑性应变的比较,可以看出,在相同屈服应力情况下,内梁上表面中点在重力作用下的塑性应变明显大于外梁.

图9为弹性与弹塑性情况下内梁和外梁角速度的比较,图10为外梁中点的弯矩和横向变形分别在弹性与弹塑性情况下的比较.图9显示,在小变形情况下,塑性变形对梁的角速度的影响较小.从图10可以看出,弹塑性梁的弯矩和横向变形的平均值的

绝对值都比弹性梁大,弹塑性情况下弯矩和横向变形的振幅都随时间逐渐衰减,从图9可以发现,在 $t = 0.6s$ 和 $t = 0.91s$ 时,外梁的角加速度变化非常快,塑性应变达到峰值,此时也最容易产生破坏,因此,在对梁的设计或研究中,这应该着重考虑.

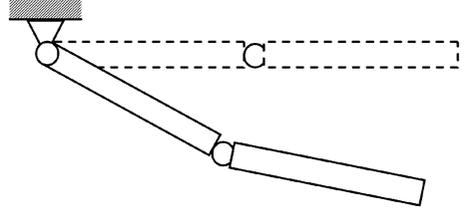


图7 弹塑性双摆示意图

Fig.7 Elasto-plastic double pendulum

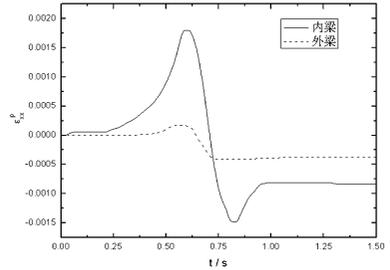


图8 内外梁在 $x=l/2, z=-h/2$ 处的塑性应变比较

Fig.8 Contrast of the plastic strains of two beams at $x=l/2, z=-h/2$

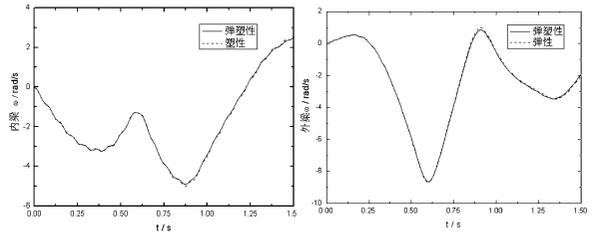


图9 弹性与弹塑性情况下角速度比较

Fig.9 Contrast of the angular velocity for elastic and elasto-plastic cases

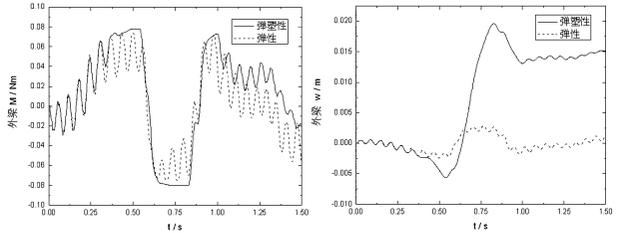


图10 外梁中点弯矩与横向变形在弹性与弹塑性情况下的比较

Fig.10 Contrast of bending moment and transverse deformation of mid-point for elastic and elasto-plastic cases

5 结论

本文在同时考虑几何非线性和材料非线性情况下,建立了柔性梁多体系统的动力学模型,并提

出了计算弹塑性情况下附加广义力两重积分的数值迭加方法. 通过数值计算和结果分析可以得到以下结论:

(1) 塑性应变引起弯矩和横向变形的振幅随时间衰减,但对振动的频率影响不大.

(2) 弹塑性梁弯矩和横向变形的平均值的绝对值大于弹性梁.

(3) 在角加速度发生突变时,弹塑性应变趋近峰值,弹塑性效应尤其显著,此时材料也最容易产生破坏,应该引起重视.

(4) 为了保证计算精度,对于弹塑性梁,在数值计算时需要截取横向振动高阶模态.

参 考 文 献

- 1 Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K. Dynamics of a cantilever beam attached to a moving base. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1987, 10 (2): 139 ~ 150
- 2 Wu S C, Haug E. Geometric non-Linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26: 2211 ~ 2226
- 3 Wallrapp O, Schwertassek R. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 32: 1833 ~ 1850
- 4 Liu J Y, Hong J Z. Geometric stiffening effect on rigid-flexible coupling dynamics of an elastic beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278 (4): 1147 ~ 1162
- 5 Berzeri M, Shabana A A. Development of simple models for the elastic forces in absolute nodal Co-ordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 235(4): 539 ~ 565
- 6 Gerstmayr J, Holl H J, Irschik H. Development of plasticity and damage in vibrating structural elements performing guided rigid-body motions. *Archive of Applied Mechanics*, 2001, 71: 135 ~ 145
- 7 Gerstmayr J, Irschik H. Vibrations of the elasto-plastic pendulum. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2003, 38: 111 ~ 122
- 8 洪嘉振. 计算多体系统动力学. 北京:高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of Multibody systems. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))

INVESTIGATION ON DYNAMIC PERFORMANCE OF MULTI-BODY SYSTEM WITH ELASTO-PLASTIC BEAMS *

Shi Wang Liu Jinyang

(School of Naval architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The dynamic performance of elasto-plastic beams system was investigated. Based on the nonlinear constitutive relation, the dynamics variational equations for an elasto-plastic beam was established using virtual work principle, in which the geometric nonlinear effect was also taken into account. The assumed mode method was used for discretization, and then the kinematic constraint equations were used to derive the dynamic equations for multi-body system. Simulations of single pendulum and double pendulum under gravity show the effect of plastic strain on dynamic characteristics of beams, leading to the increase of the absolute value of the average transverse deformation and the decrease of transverse vibration amplitude. Significant effect of plastic strain was revealed in case of sudden change of angular acceleration.

Key words elasto-plastic beams system, nonlinear constitutive relation, dynamics