第 8 卷第 3 期 2010 年 9 月
1672-6553/2010/08(3)/193-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 8 No. 3
Sep. 2010

# 一阶 Lagrange 力学逆问题的直接解法

丁光涛

（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

**摘要** 提出求解一阶 Lagrange 力学逆问题的新途径；给出由一阶微分方程直接构造 Lagrange 函数的基本解法，以及几种与不同的补充条件相对应的特殊解法. 举例说明所得结果的应用.

**关键词** Lagrange 力学逆问题， 微分方程， 一阶 Lagrange 函数

## 引 言

力学逆问题是具有重要意义的课题，在力学不同的发展阶段和不同的科学分支，逆问题的内容也不同[1-3]. 对 Lagrange 力学而言，一种正问题是已知系统 Lagrange 函数，列出系统运动微分方程；对应的逆问题是已知系统运动微分方程，判断能否表示成 Lagrange 方程形式，以及如何构造相应的 Lagrange 函数[4-7]. 对这个逆问题的研究突破了分析力学的传统观念，创新了 Lagrange 力学理论，拓展了分析力学应用领域[3,7-9]. 本文进一步发展[7]中得到的结果，提出解决一阶 Lagrange 力学逆问题一种新的途径，给出直接从一阶运动微分方程构造一阶 Lagrange 函数的基本解法，以及与多种引入补充条件相对应的特殊解法. 在举例全面说明得到结果的应用后，讨论了一阶 Lagrange 力学逆问题的重要性和特点.

## 1 一阶 Lagrange 系统

设系统变量为 $x^\alpha(\alpha=1,\cdots,2n)$，Lagrange 函数为

$$L=A_\alpha(t,x)\dot{x}^\alpha+B(t,x) \tag{1}$$

式中对同一项重复指标求 $\alpha$ 和（下同），系统运动微分方程——一阶 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha}-\frac{\partial L}{\partial x^\alpha}=M_{\alpha\beta}\dot{x}^\beta+N_\alpha=0,\quad (\alpha,\beta=1,\cdots,2n) \tag{2}$$

其中

$$M_{\alpha\beta}=\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} \tag{3}$$

$$N_\alpha=\frac{\partial A_\alpha}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^\alpha} \tag{4}$$

对规则系统，满足下列条件

$$\det(M_{\alpha\beta})\neq 0 \tag{5}$$

则由（2）式解得

$$\dot{x}^\alpha=-W^{\alpha\beta}N_\beta \tag{6}$$

矩阵 $\{W^{\alpha\beta}\}$ 是矩阵 $\{M_{\alpha\beta}\}$ 的逆矩阵，即

$$W^{\alpha\beta}M_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma \tag{7}$$

由（3）式和（4）式，得 $M_{\alpha\beta}$、$N_\alpha$ 满足下列条件：

$$M_{\alpha\beta}+M_{\beta\alpha}=0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}+\frac{\partial M_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha}+\frac{\partial M_{\gamma\alpha}}{\partial x^\beta}=0 \tag{9}$$

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial t}=\frac{\partial N_\alpha}{\partial x^\beta}-\frac{\partial N_\beta}{\partial x^\alpha} \tag{10}$$

设一阶系统运动微分方程为

$$F_\alpha(t,x,\dot{x})=0 \tag{11}$$

已经证明，若方程组（11）是自伴随的，则可表示成 Lagrange 方程形式.（11）式为自伴随的条件为：

（i）方程组对速度是线性的，即

$$F_\alpha(t,x,\dot{x})=M_{\alpha\beta}(t,x)\dot{x}^\beta+N_\alpha(t,x) \tag{12}$$

（ii）（12）式中 $M_{\alpha\beta}$ 和 $N_\alpha$ 满足条件（8）－（10）.

对自伴随形式的一阶系统（11），Lagrange 函数可由下式计算得到

$$L(t,x,\dot{x})=-x^\alpha\int_0^1F_\alpha(t,\tau x,\tau\dot{x})\mathrm{d}\tau \tag{13}$$

## 2 一阶 Lagrange 力学逆问题的新解法

一阶系统运动微分方程经常写出运动学形式，

2010-03-29 收到第 1 稿.

即

$$\dot{x}^{\alpha}=f^{\alpha}(t,x) \tag{14}$$

这种形式的方程往往不是自伴随的,将其变换成自伴随形式也是困难的. 下面将提出一条新的途径直接从(14)式导出 Lagrange 函数,为此将(14)式代入方程组(2),得到

$$\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)f^{\beta}+\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^{\alpha}}=0 \tag{15}$$

将(15)式看成确定未知函数 $A_{\alpha}$ 和 $B$ 的偏微分方程组,解此方程组得到 $A_{\alpha}$ 和 $B$ 后,代入(1)式就导出了系统 Lagrange 函数.

(15)式是 $2n$ 个一阶偏微分方程构成的方程组,待求的函数 $A_{\alpha}$ 和 $B$ 有个,求解时应引入一个补充条件,而随着补充条件的不同,形成了不同的特殊解法. 例如,可以对 $B$ 作不同的预先假设:

(i)若系统是力学系统,可设 $B$ 为某个力学量,如总能量. 事实上,这正是构造一阶系统 Birkhoff 表示的一种方法[5].

(ii) $B=-A_{\alpha}f^{\alpha}$ (16)

代入方程(15),得到确 $A_{\alpha}$ 的方程组

$$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}f^{\beta}+A_{\beta}\frac{\partial f_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}=0 \tag{17}$$

将(16)式代入(1)式,得到

$$L=A_{\alpha}(\dot{x}^{\alpha}-f^{\alpha}) \tag{18}$$

即 $L$ 为运动微分方程变系数线性组合[7].

(iii)利用 Lagrange 函数规范变换,可以假设

$$B=0 \tag{19}$$

代入方程(15),得到确定 $A_{\alpha}$ 的方程组

$$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}+\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}-\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}}\right)f^{\beta}=0 \tag{20}$$

应该指出,在具体求解时,如何引入补充条件要根据问题情况而定,除了函数 $B$ 外还可以选择 $A_{\alpha}$ 中某一个作预先假设,或给出 $A_{\alpha}$ 和 $B$ 间一个关系式,等等. 在下面算例中将引入这样的补充条件.

此外,将方程组(15)逐个乘以 $f^{\alpha}$,再对 $\alpha$ 求和,由于 $M_{\alpha\beta}$ 的反对称性,得到

$$\left(\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^{\alpha}}\right)f^{\alpha}=0 \tag{21}$$

对方程组(15)而言,方程(21)并不是新的独立方程,但是在具体求解时,可以用方程(21)代替方程组(15)中某一个方程,特别是,假设 $B=0$ 时,(21)式可写成如下简单形式

$$\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial t}f_{\alpha}=0 \tag{22}$$

## 3 算例

以线性阻尼振子

$$\ddot{q}+\gamma\dot{q}+q=0$$

为例,全面说明前面所导出的结果.

引入新变量 $x^1=q, x^2=\dot{q}$,由上式得到

$$\dot{x}^1=f^1=x^2,\dot{x}^2=f^2=-(\gamma x^2+x^1) \tag{23}$$

设线性阻尼振子一阶 Lagrange 函数为

$$L=A_1\dot{x}^1+A_2\dot{x}^2+B \tag{24}$$

代入方程组(15)得到

$$-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\right)(\gamma x^2+x^1)+\frac{\partial A_1}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^1}=0,$$

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)x^2+\frac{\partial A_2}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^2}=0 \tag{25}$$

引入补充条件具体求解:

($i$)取 $B$ 为线性阻尼振子总能量,即

$$B=\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2] \tag{26}$$

代入(25)式得到

$$-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\right)(\gamma x^2+x^1)+\frac{\partial A_1}{\partial t}-x^1=0,$$

$$\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)x^2+\frac{\partial A_2}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^2}=0 \tag{27}$$

解得

$$A_1=x^1t-e^{\gamma t}\left(x^2+\frac{1}{\gamma}x^1\right),A_2=x^2t-\frac{1}{\gamma}x^2e^{\gamma t} \tag{28}$$

(ii) $B=-(A_1f^1+A_2f^2)$ (29)

代入(25)式得到

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}-\frac{\partial A_1}{\partial x^1}x^2-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}(\gamma x^2+x^1)-A_2=0$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t}+\frac{\partial A_2}{\partial x^1}x^2-\frac{\partial A_2}{\partial x^2}(\gamma x^2+x^1)+A_1^{-\gamma A_2}=0 \tag{30}$$

解得

$$A_1=\frac{1}{2}e^{\gamma t}x^2,\quad A_2=-\frac{1}{2}e^{\gamma t}x^1 \tag{31}$$

$$B=-\frac{1}{2}e^{\gamma t}[(x^1)^2+\gamma x^1x^2+(x^2)^2] \tag{32}$$

(iii) $B=0$ (33)

代入(25)式得

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial A_2}{\partial x^1}\right)(\gamma x^2+x^1)=0,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t}+\left(\frac{\partial A_2}{\partial x^1}-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}\right)x^2=0 \tag{34}$$

解得

$$A_1=e^{\gamma t}\left(x^2+\frac{1}{\gamma}x^1\right),\quad A_2=\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}x^2 \tag{35}$$

顺便指出，将(23)式中 $f^1$ 和 $f^2$ 以及(35)式中 $A_1$ 和 $A_2$，代入(22)式，即可验证(22)式成立.

(*iv*)引入新的补充条件，例如

$$A_2=0 \tag{36}$$

代入(25)式子，得到

$$\frac{\partial A_1}{\partial t}-(\gamma x^2+x^1)\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial B}{\partial x^1}=0$$

$$-\frac{\partial A_1}{\partial x^2}x^2-\frac{\partial B}{\partial x^2}=0 \tag{37}$$

解得

$$A_1=x^2e^{\gamma t},B=-\frac{1}{2}[(x^1)^2+(x^2)^2]e^{\gamma t} \tag{38}$$

(*v*)补充条件还可以其他形式提出，例如

$$A_1=A_2 \tag{39}$$

代入(25)式，得到

$$-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial A_1}{\partial x^1}\right)(\gamma x^2+x^1)+\frac{\partial A_1}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^1}=0$$

$$-\left(\frac{\partial A_1}{\partial x^2}-\frac{\partial A_1}{\partial x^1}\right)x^2+\frac{\partial A_1}{\partial t}-\frac{\partial B}{\partial x^2}=0 \tag{40}$$

解得

$$A_1=A_2=x^2e^{\gamma t} \tag{41}$$

$$B=-\frac{1}{2}e^{\gamma t}[(x^1)^2+(1-\gamma)(x^2)^2] \tag{42}$$

## 4　结论和讨论

本文提出了直接将一阶系统运动学形式的运动微分方程(14)表示成一阶 Lagrange 方程形式的新途径，给出了从(14)式运动微分方程导出(1)式 Lagrange 函数的基本解法，这种解法不需要把运动微分方程先化成自伴随方程，而且把以前的一些方法(见文献[5]和[7])作为新的基本解法的特殊情况，具体求解时通过引入不同的补充条件而给出不同的特殊解法. 最后，通过实例全面说明了得到的结果.

研究一阶 Lagrange 力学逆问题具有重要的理论意义和应用价值，这是因为分析力学中状态空间的 Lagrange 方程是一阶微分方程组[10]，Hamilton 方程和 Birkhoff 方程也是一阶微分方程组，诸多物理系统和非物理系统的运动微分方程也是一阶微分方程.

本文提出的一阶 Lagrange 力学逆问题基本解法具有较大的实用性，这是因为与传统位形空间 Lagrange 函数相比较，一阶 Lagrange 函数的结构确定而且简单，构造这样的 Lagrange 函数相当于求解一阶线性偏微分方程组(15)式，以确定 2n + 1 个函数和 B，而且具体求解时还可以通过引入适当的补充条件，降低求解的难度. 最后指出，本文得到的结果有助于将分析力学理论和方法应用于其他学科领域.

## 参　考　文　献


1　гащуллН А С. Методы Обратных Решения Обрадныlх Задач диНаМиKu. МоckВа:Hayka,1986

2　梅凤翔. 动力学逆问题. 北京：国防工业出版社，2009 (Mei F X. Inverse Problems of Dynamics. Beijing: National Defense Industry Press 2009 (in Chinese))

3　罗绍凯，张永发等. 约束系统动力学研究进展. 北京：科学出版社，2008 (Luo S K, Zhang Y F. Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems. Beijing: Science Press 2008 (in Chinese))

4　Santilli R M. Foundation of Theoretical Mechanics I. New York: Spring-Verlag, 1978

5　Santilli R M. Foundation of Theoretical Mechanics II. New York: Spring-Verlag, 1984

6　梅凤翔. 分析力学专题. 北京：北京工业学院出版社，1988 (Mei F X. Analytical Mechanical Special Problems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press 1988 (in Chinese))

7　丁光涛，陶松涛. 一阶 Lagrange 力学逆问题及其在非力学领域中的应用. 科学通报，2008，53(8)：872 ~ 876 (Ding G T, Tao S T. Inverse problem of first-order mechanics and its application in non-mechanics subjects. *Chin. Sci. Bull*, 2008,53(8):872 ~ 876 (in Chinese))

8　梅凤翔，尚玫. 一阶 Lagrange 系统的 Lie 对称性与守恒量. 物理学报，2000，49(10)：1901 ~ 1903 (Mei F X, Shang M. Lie symmetries and conserved quatities of first order Lagrange systems. *Acta Phys. Sin.*, 2000,49(10): 1901 ~ 1903(in Chinese))

9　葛伟宽，梅凤翔. 作战微分方程模型的 Noether 对称性. 兵工学报，2001，22(2)：241 ~ 243 (Ge W K, Mei F X. Noether symmetry of differential equation models in warfare.

Acta Armamentar,2001,22(2):241 ~ 243(in Chinese))

10 丁光涛.状态空间 Lagrange 函数和运动方程.中国科学G辑:物理学力学天文学,2009,39(6):813 ~ 820 ( Ding G T The Lagrangian functions and equations of motion in state space. *Science in China Series G: Physics, Mechanics& Astronomy*, 2009, 39(6): 813 ~ 820 (in Chinese ))

# DIRECT SOLUTIONS FOR INVERSE PROBLEM OF FIRST-ORDER LAGRANGIAN MECHANICS

Ding Guangtao

(*College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China* )

**Abstract** A new way to solve the inverse problem of the first-order Lagrangian mechanics was presented. The main solution constructing directly from the Lagrangian from first-order differential equation and some special solutions corresponding to different additional conditions were given. An example was given to illustrate the application of the results.

**Key words** inverse problem of Lagrangian mechanics, differential equation, first-order Lagrangian

Received 29 March 2010.