

# 柱坐标系下正则方程的八节点等参元列式

卿光辉 但敏 郭巧荣

(中国民航大学航空工程学院,天津 300300)

**摘要** 结合弹性材料修正后的 H-R 变分原理和二次插值函数,为柱坐标系下 Hamilton 正则方程建立了八节点等参元列式. 首先简要地介绍了弹性材料修正后的 H-R 变分原理,然后采用二次插值函数表达壳的平面外应力和位移函数,详细地推导了柱坐标系下 Hamilton 正则方程的八节点等参元列式. 数值实例的分析结果证明了本文八节点等参元列式的正确性.

**关键词** Hamilton 正则方程, 八节点等参元, 圆柱壳, 固有频率

## 引言

历经多年的发展,弹性力学 Hamilton 正则方程的半解析法<sup>[1,2]</sup>已经发展成为非常成功的数值算法. 用这种方法仿真层合板壳等结构的优点之一是:可处理复杂侧面边界、复杂的几何形状及复杂外载荷作用下层合梁、层合板壳等结构的各类力学问题,甚至于可处理各向异性材料;另一个突出的优点是对于强厚度板壳或层合板壳,无需任何位移或应力假设;传递矩阵技术的顺利实施使得控制方程的未知量与结构的层数无关,并保证了层与层之间的位移和应力的连续性,为数值分析结果的准确性提供保证.

Hamilton 正则方程现有的半解析法通常采用四节点等参元<sup>[2]</sup>求解具体的问题,对于需要提高分析精度等问题,需要加密元素网格. 由于八节点等参元具有比四节点等参元计算精度高、收敛速度快等优点<sup>[3]</sup>,所以本文采用二次插值函数作为形函数,基于弹性材料修正后的 H-R 变分原理,详细地推导了柱坐标系下 Hamilton 正则方程八节点等参元列式,并用数例验证了列式的正确性.

## 1 修正后的 H-R 变分原理

对于各向同性、正交异性或各向异性弹性圆柱体,修正后的 H-R 变分原理<sup>[2,4,5,7,8]</sup>可表示为

$$\delta \Pi = \delta \iiint_V \left( \frac{\bar{p}^T}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} - H \right) r dV + \delta \oint_{S_A} \lambda_u^T B_u - \lambda_\sigma^T B_\sigma dS \quad (1)$$

其中  $\bar{p} = r [\tau_{xr} \quad \tau_{\theta r} \quad \sigma_r]^T$ ,  $Q = [u \quad v \quad w]^T$ ,  $H$  是 Hamilton 函数;  $S_A = S_u + S_\sigma + S_m$  为混合边界条件;  $\lambda_u = [\lambda_x - 1 \quad \lambda_\theta - 1 \quad \lambda_r - 1]^T$  和  $\lambda_\sigma = [\lambda_x \quad \lambda_\theta \quad \lambda_r]^T$  是特意引入的特征系数<sup>[6]</sup>,  $\lambda_i (i, \theta, r)$  的值为 1 和 0,如果在  $x$  方向为应力边界条件,则  $\lambda_x = 1$ ;若是位移边界条件,则  $\lambda_x = 0$ ,  $\lambda_\theta, \lambda_r$  的取值以此类推. 引入特征系数后,式(1)即能处理单一边界条件问题,又能处理混合边界条件问题. 对于壳问题而言,  $B_u = [p_x(u - \bar{u}) \quad p_\theta(v - \bar{v}) \quad p_r(w - \bar{w})]^T$ ,  $p_i (i = x, \theta, r)$  是侧面边界表面三个坐标方向的应力;  $\bar{u}, \bar{v}$  和  $\bar{w}$  是边界三个坐标方向的已知位移分量;  $B_\sigma = [\bar{p}_x u \quad \bar{p}_\theta v \quad \bar{p}_r w]$ ,  $\bar{p}_i (i = x, \theta, r)$  是边界表面三个坐标方向的给定应力分量.

$$H = \bar{p}^T (G_1 Q) - \bar{p}^T \Phi_{21}^T (G_2 Q) - \frac{1}{2} (G_2 Q)^T \Phi_{22} (G_2 Q) + \frac{1}{2} \bar{p}^T \Phi_{11} \bar{p} + \frac{1}{2} Q^T \Omega Q - F^T Q \quad (2)$$

$$\text{式中 } G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1/r & \beta/r \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta/r & -1/r \\ \beta/r & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\alpha = \partial/\partial x, \beta = \partial/\partial \theta, \Omega = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \rho \end{bmatrix} \omega^2$ ,  $\omega$  是振动频率,  $\rho$  为材料密度,  $F = -[f_x \quad f_\theta \quad f_r]^T$  代表三个方向的体积力.

对于各向同性和正交各向异性弹性材料有

$$\Phi_{11} = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}; \Phi_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_4 \\ 0 & 0 & -s_5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \Phi_{22} = \begin{bmatrix} s_6 & s_7 & 0 \\ s_7 & s_8 & 0 \\ 0 & 0 & s_9 \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中  $s_1 = 1/c_{55}, s_2 = 1/c_{44}, s_3 = 1/c_{33}, s_4 = -c_{13}/c_{33}, s_5 = -c_{23}/c_{33}, s_6 = c_{11} - c_{13}^2/c_{33}, s_7 = c_{12} - c_{13}c_{23}/c_{33}, s_8 = c_{22} - c_{23}^2/c_{33}, s_9 = c_{66}, c_{ij}$  是材料的刚度系数。所以，式(1)中被消去的三个平面内应力为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \tau_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_2\alpha & s_3\beta/r & -s_1 & s_3/r \\ s_2\alpha & s_4\alpha/r & -s_5 & s_4/r \\ s_6\beta & s_6\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \sigma_r \\ w \end{Bmatrix} \quad (4)$$

同时，式(1)中的  $p_i (i = x, \theta, r)$  可表示为

$$\begin{cases} p_x = n_x \sigma_x + n_\theta \tau_{x\theta} + n_r \tau_{xr} = \bar{p}_x \\ p_\theta = n_x \tau_{x\theta} + n_\theta \sigma_\theta + n_r \tau_{\theta r} = \bar{p}_\theta \\ p_r = n_x \sigma_{xr} + n_\theta \tau_{\theta r} + n_r \sigma_r = \bar{p}_r \end{cases} \quad (5)$$

其中  $n_x, n_\theta, n_r$  分别为界面沿  $x, \theta$  和  $r$  方向的外法线方向余弦。令  $P = [\tau_{xr} \quad \tau_{\theta r} \quad \sigma_r]^T$ ，以  $P$  和  $Q$  为相互独立的变量，对式(1)进行变分并分部积分可得 Hamilton 正则方程(这里仅考虑了齐次边界情况)：

$$\frac{d}{dz} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^T + G_2^T \Phi_{21} - I/r & G_2^T \Phi_{22} G_2 - \Omega \\ \Phi_{11} & -(G_1 + \Phi_{21}^T G_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

## 2 正则方程的八节点等参元列式

如图1所示的层合圆柱壳，设在面上采用有限元离散，方向的处理和动力学问题中处理时间方法相同，暂且当作未知量。如图2，引入形函数<sup>[11]</sup>：

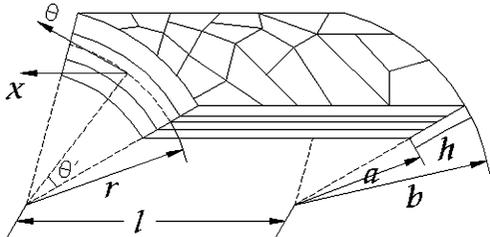


图1 层合圆柱壳

Fig.1 Laminated cylindrical shells

$$N_i(\xi, \eta) = \begin{cases} (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta)/2; i = 2, 6 \\ (1 + \xi_i \xi)(1 - \eta^2)/2; i = 4, 8 \\ (1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)/4; \\ i = 1, 3, 5, 7 \end{cases} \quad (7)$$

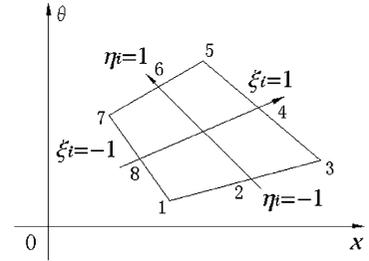


图2 八节点等参元

Fig.2 8-node isoparametric element

整体坐标  $x$  和  $\theta$  与局部坐标  $\xi$  和  $\eta$  有如下的转换关系

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 \\ \theta &= N_1 \theta_1 + N_2 \theta_2 + N_3 \theta_3 + N_4 \theta_4 + N_5 \theta_5 + N_6 \theta_6 + N_7 \theta_7 + N_8 \theta_8 \end{aligned} \quad (8)$$

由复合求导法则，对形函数求偏导数时，写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \end{bmatrix} \quad (9)$$

即

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}^T = J \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial \theta} \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

式中  $J$  为雅可比矩阵，对上式求逆，可得整体坐标和局部坐标的变换关系。

引入形函数向量：

$$N = \begin{bmatrix} \bar{N}(x, \theta) & 0 & 0 \\ 0 & \bar{N}(x, \theta) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}(x, \theta) \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中： $\bar{N}(x, \theta) = [N_1(\xi, \eta) \quad N_2(\xi, \eta) \quad N_3(\xi, \eta) \quad N_4(\xi, \eta) \quad N_5(\xi, \eta) \quad N_6(\xi, \eta) \quad N_7(\xi, \eta) \quad N_8(\xi, \eta)]$

根据式(11)可将  $\tilde{P}$  和  $Q$  写成矩阵形式为

$$\begin{cases} \tilde{P} = N \tilde{P}_c \\ Q = N Q_c \end{cases} \quad (12)$$

把式(12)代入式(1)，然后对其变分(这里只考虑边界条件为齐次的情况)得到

$$\begin{cases} N^T N \frac{\partial Q_c}{\partial r} = \frac{1}{r} N^T \Phi_{11} N \tilde{P}_c - (N^T G_1 N + N^T \Phi_{21}^T G_2 N) Q_c \\ \frac{N^T N \partial \tilde{P}_c}{r \partial r} = (N^T G_2^T \Phi_{21} N + N^T G_1^T N) \tilde{P}_c + \\ (N^T G_2^T \Phi_{22} G_2 N - N^T \Omega N) Q_c - N^T F \end{cases} \quad (13)$$

令  $P_c = r \tilde{P}$  得

$$\begin{cases} N^T N \frac{\partial Q_c}{\partial r} = N^T \Phi_{11} N P_c - (N^T G_1 N + N^T \Phi_{21}^T G_2 N) Q_c \\ N^T N \frac{\partial P_c}{\partial r} = (N^T G_2^T \Phi_{21} N + N^T G_1^T N - \frac{N^T N}{r}) P_c + \\ (N^T G_2^T \Phi_{22} G_2 N - N^T \Omega N) Q_c - N^T F \end{cases} \quad (14)$$

将上式写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} P_c \\ Q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ F & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c \\ Q_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Xi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中:  $C = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T N |J| d\xi d\eta$ ;

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((G_2 N)^T \Phi_{21} N + (G_1 N)^T N - \frac{N^T N}{r}) |J| d\xi d\eta;$$

$$B = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ((G_2 N) \Phi_{22} (G_2 N) - N^T \Omega N) |J| d\xi d\eta;$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} (S_2 n_x \alpha + \frac{S_6 n_\theta \beta}{r})(\lambda_x - 1) & (S_6 n_\theta \alpha + \frac{S_3 n_x \beta}{r})(\lambda_s - 1) & \frac{S_3 n_x}{r}(\lambda_x - 1) \\ 0 & 0 & -S_5 n_\theta (\lambda_\theta - 1) \\ n_x (\lambda_r - 1) & n_\theta (\lambda_r - 1) & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{P} = [\bar{\tau}_{xr} \quad \bar{\tau}_{\theta r} \quad \bar{\sigma}_r]^T$ , 三个分量分别为界面沿  $x, \theta$  和  $r$  方向上给定的应力分量;  $\bar{Q} = [\bar{u} \quad \bar{v} \quad \bar{w}]^T$ , 三个分量分别界面沿  $x, \theta$  和  $r$  方向上给定位移分量,  $\Delta S_A$  表示单元的面积.

对式(16)进行变分,结果可用矩阵形式表达

$$\oint_{\Delta S_A} \begin{bmatrix} A^T & B \\ 0 & -A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_c(r) \\ Q_c(r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -N^T A_0 & -(G_4 N)^T \\ 0 & (G_3 N)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_c \\ \bar{Q}_c \end{bmatrix} dS \quad (17)$$

式中  $A = (G_3 N)^T N, B = N^T (G_4 N) + (G_4 N)^T N, A_0 = \text{diag}[\lambda_x \lambda_\theta \lambda_r]$ .

把式(17)加到式(15)的右边,就得到了能处理各类边界条件的元素列式.

### 3 求解

设圆柱层合壳第  $m$  层的网格如图 1, 把该层上全部单元按照一般有限元方法拼装得:

$$M_m \frac{\partial R_m(r_m)}{\partial r} = K_m R_m(0) + G_m \quad (18)$$

式中  $R_m(r_m) = [P_m(r) \quad Q_m(r)]^T, R_m(0) = [P_m(0) \quad Q_m(0)]^T, G_m$  表示为体积力.

对于齐次边界情况并不考虑体积力的问题有  $G_m = 0$ , 所以方程(18)的通解<sup>[12]</sup>为

$$R_m(r_m) = T_m(-t_m) R_m(0) \quad (19)$$

$$D = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (N^T (G_1 N) + N^T \Phi_{21}^T (G_2 N)) |J| d\xi d\eta;$$

$$F = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T \Phi_{11} N |J| d\xi d\eta; \Xi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N^T F |J| d\xi d\eta$$

下面给出有关壳问题的边界项列式, 通过方程(5)可将式(1)中的边界项表达为

$$\delta \oint_{S_A} \lambda_u^T B_u - \lambda_\sigma^T B_\sigma dS = \oint_{\Delta S_A} ((G_3 \frac{\bar{P}}{r})^T + (G_4 Q)^T) (Q - \bar{Q}) - (\lambda_\sigma \bar{P}) Q dS \quad (16)$$

式中,

$$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -S_1 n_x (\lambda_x - 1) \\ 0 & 0 & -S_3 n_\theta (\lambda_\theta - 1) \\ n_x (\lambda_r - 1) & n_\theta (\lambda_r - 1) & 0 \end{bmatrix}$$

式中  $t_m$  是第  $m$  层的厚度,  $r_m$  是第  $m$  层的中径. 对于  $n$  层的壳, 根据层间应力和位移的连续性, 有

$$R_n(h) = (\prod_{j=1}^n T_j) R_1(0)$$

将其写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} P(h) \\ Q(h) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中  $h$  表示整个壳的厚度.

对于静力响应问题, 在式(15)中,  $\Omega = 0$ . 设壳的上下表面加载应力为  $P(h), P(0)$ , 通过上式可以求得

$$Q(0) = T_{12}^{-1} (P(h) - T_{11} P(0)) \quad (21)$$

$$Q(h) = T_{21} P(0) + T_{22} Q(0) \quad (22)$$

$Q(0)$  和  $Q(h)$  即上下表面的位移.

对于自由振动问题<sup>[13]</sup>, 壳的上下表面的应力向量  $P(h) = P(0) = 0$ , 所以

$$T_{12} Q(0) = 0 \quad (23)$$

为了求得式(23)的非零解, 带有固有频率未知量  $\omega$  的多项式方程为

$$|T_{12}| = 0 \quad (24)$$

采用二分法可方便求取上式的解.

### 4 数值实例

算例 1 静力学问题: 考虑  $\pi/2$  弧度的六层开口圆柱壳, 顶面受法向压应力  $q = 1 \text{ Pa}$  作用. 当纤维方向平行于  $x$  轴时 ( $0^\circ$ ), 材料的弹性常数为:  $C_{12}/C_{11} =$

0.233190,  $C_{13}/C_{11} = 0.010776$ ,  $C_{22}/C_{11} = 0.543104$ ,  
 $C_{23}/C_{11} = 0.098276$ ,  $C_{33}/C_{11} = 0.530172$ ,  $C_{44}/C_{11} =$   
 0.26681,  $C_{55}/C_{11} = 0.159914$ ,  $C_{66}/C_{11} = 0.262931$ .

壳的总厚度为  $h = 0.1\text{m}$ , 最外层和最内层的厚度  $h_1 =$   
 $h_6 = 0.1h$ , 中间各层的厚度  $h_2 = h_3 = h_4 = h_5 = 0.2$ , 壳

长  $l = 1\text{m}$ , 壳的平均半径  $R_0 = 1\text{m}$ . 表 1 给出铺设  
 方式为  $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$  的情况下中心  
 点处的径向位移值, 计算的过程中令  $l_i = 1$ , ( $i = 1,$   
 $2, \dots, 6$ ), 其中  $l_i$  表示层合开口圆柱壳各层划分的  
 薄层数, 分析结果列于表 1.

表 1 径向最大位移比较

Table 1 The comparison of max - displacements of radius ( )

		SSSS			CSCS		
Elements		9	25	49	9	25	49
8 - node	T	-28.256	-31.7237	-31.9549	-20.2811	-21.9381	-22.0118
	B	-28.3039	-31.7969	-32.0333	-20.3515	-21.9772	-22.0502
Elements		25	169	289	49	169	289
4 - node	T	-28.6161	-31.8747	-31.9746	-20.3673	-21.8022	-21.9424
	B	-28.6741	-31.954	-32.055	-20.3994	-21.8401	-21.9807
Ref. [8]	T		-32.0600			-22.0518	
	B		-32.1391			-22.0895	
Error 1 (%)			0.3292			0.1779	
Error 2 (%)			0.2617			0.4925	

表 1 中的 SSSS 表示四边简支, CSCS 表示  $\theta = 0, \pi/2$   
 边固支;  $x = 0, l$  边简支; T、B 分别表示上、下表面  
 最大位移. 误差 1 是解析解和本文八节点解(49 个  
 元素, 176 个节点, 共 1056 个未知量)结果进行对  
 比得到; 误差 2 是解析解和四节点解(289 个元素,  
 324 个节点, 共 1944 个未知量)结果进行对比得  
 到. 运用 Intel Core 2.20GHz(双核), 1G 内存电脑计  
 算本文中八节点(49 个元素)平均需要 28.8608s;  
 四节点(289 个元素)平均需要 100.014s.

算例 2 动力学问题: 考虑  $\pi/2$  弧度的单层开口四  
 边固支圆柱壳, 壳的厚度  $h = 0.1$ , 壳的平均半径  $R_0$   
 $= 1$ , 材料刚度系数:  $C_{12}/C_{11} = 0.246269$ ,  $C_{13}/C_{11} =$   
 $0.0831715$ ,  $C_{22}/C_{11} = 0.543103$ ,  $C_{23}/C_{11} = 0.$   
 $115017$ ,  $C_{33}/C_{11} = 0.530172$ ,  $C_{44}/C_{11} = 0.266810$ ,  
 $C_{55}/C_{11} = 0.159914$ ,  $C_{66}/C_{11} = 0.262931$ .  $C_{11} = 210$   
 $\times 10^6$ , 材料密度  $\rho = 2320$ .

表 2 中的结果是采用 49 个八节点元素得到的结  
 果. ANSYS 解是通过各向异性立体元 Solid64 元素得到.

表 2 前五阶固有频率比较

Table 2 The first five natural frequencies

Methods	Frequencies (Hz)				
	First	Second	Third	Fourth	Fifth
ANSYS	263.549	281.227	384.315	472.362	513.624
Present	262.53	280.108	382.295	469.323	508.102
Error (%)	0.3867	0.3979	0.5256	0.6434	1.0751

ANSYS 解  $\times 100$ , 由误差分析可得出, 在低阶频率  
 上相差不大.

## 5 结论

本文是基于弹性材料修正后的 H - R 变分原  
 理, 引入二次插值函数, 为柱坐标系下 Hamilton 正则  
 方程建立了八节点等参元列式. 本文突出了: (1) 利  
 用二次插值函数较高的计算精度, 结合等参元可以  
 处理各种形状的优点, 丰富了 Hamilton 正则方程的  
 半解析法; (2) 本文分别求解出八节点等参元列式的  
 静力学响应和固有频率分析, 并用具体数例验证了  
 壳的三类边界情况, 这也是很有工程应用价值.

本文的方法可以进一步推广到压电材料中去.  
 利用九节点作为插值函数, 仍可采用本文方法同样  
 进行类推.

## 参 考 文 献

- 唐立民, 邹贵平等. 混合状态 Hamiltonian 元的半解析解  
 和叠层板的计算. 计算结构力学及其应用, 1992, 9(4):  
 347 ~ 360 (Tang Limin, Zhou Guipin. The semi-analytical  
 solution of mixed state hamilton element and the computation  
 of laminated plates. *Computational Structural Mechanics and  
 Applications*, 1992, 9(4): 247 ~ 360 (in Chinese))
- Guanghui Qing, Yanhong Liu, Qing Guo, Dedeng Zhang.  
 Dynamic analysis for three-dimensional laminated plates

本文误差计算方法是 | ANSYS 解 - 本文解 /

- and panels with damping. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2008, 50(1):83~91
- 3 段梅,宫本裕等. 四节点元和八节点元 h-收敛的比较. 应用数学和力学,1996,1(17):9~14(Duan Mei, Miyamoto Yutaka. A comparative study on the h-convergence of 4-node and 8-node quadrilateral elements. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1996,1(17):9~14(in Chinese))
  - 4 钟万勰著. 弹性力学求解新体系. 大连:大连理工大学出版社,1995(Zhong Wanxie. A new systematic methodology for theory of elasticity. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1995(in Chinese))
  - 5 钟万勰著. 应用力学对偶体系. 北京:科学出版社,2003(Zhong Wanxie. Symplectic system of applied mechanics. Beijing: Science Press, 2003(in Chinese))
  - 6 Kewei Ding, Limin Tang. Exact solution for axisymmetric thick laminated shells. *Composite Structures*, 1999, 46: 125~129
  - 7 Ding, H J, Chen, W Q, Xu, R Q. New state space formulations for transversely isotropic piezoelectricity with application. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(3): 319~326
  - 8 范家让. 强厚叠层板壳的精确理论. 北京:科学出版社,1996.(Fan Jiarang. Exact theory of laminated of laminated thick plates and shells. Beijing: Science Press, 1996(in Chinese))
  - 9 饶寿期编. 有限元法和边界元法基础. 北京:北京航空航天大学出版社,1989.(Rao Shouqi. The finite element method and boundary element methods. Beijing: BUAA Press, 1989(in Chinese))
  - 10 卿光辉,王喆,刘艳红. 壁厚不连续不对称圆柱壳和开口壳的自由振动分析. 工程力学,2006,23(Sup. 1):25~29(Qing Guanghui, Wang Zhe, Liu Yanhong. Free vibration analysis of cylindrical shells and open shells with thickness discontinuity and dissymmetry. *Engineering Mechanics*, 2006, 23(Sup. 1):25~29(in Chinese))
  - 11 卿光辉,邱家俊,胡宇达. 双壳耦合结构与大型发电机定子系统的振动特性分析. 工程力学,2004,21(2):101~106(Qing guanghui, Qiu Jajun, Hu Yuda. Vibrational characteristics of double-shell coupling structures and large generator stator systems. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(2):101~106(in Chinese))
  - 12 Qing Guanghui, Xu Jianxin, Qiu Jiajun, State-vector equation with damping and vibration analysis of laminates. *Applied Mathematic and Mechanics*, 2007, 28(2):253~259
  - 13 陈新峰,徐建新,卿光辉. 层合板固有频率分析的 B 样条小波元法. 动力学与控制学报,2009,3:50~54(Chen Xinfeng, Xu Jianxin, Qing Guanghui. B-spline wavelet finite element method for analyzing natrual frequencies of laminated plates. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 3: 50~54(in Chinese))

## 8-NODE ISOPARAMETRIC ELEMENT ON CYLINDRICAL SHELL FOR HAMILTON CANONICAL EQUATION AND ITS NATURAL FREQUENCY \*

Qing Guanghui Dan Min Guo Qiaorong

(Aeronautical engineering college, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

**Abstract** By combining the modified Hellinger-Reissner(H-R) variational principle for elastic material with the quadratic interpolation functions, the formulation of isoparametric element with 8-node for Hamilton canonical equation in the cylindrical coordinate was established. Firstly, the modified H-R variational principle for elastic material was briefly presented. Then the quadratic interpolation functions were used to express the stresses and displacements of shell. The formulation of isoparametric element with 8-node for Hamilton canonical equation in the cylindrical coordinate was derived from the modified H-R variational principle. The results of numerical examples show the correctness of the formulation of isoparametric elements.

**Key words** Hamilton canonical equation, 8-node isoparametric element, cylindrical shell, natural frequency