

二端面弹性转轴非线性动力学方程拓扑反变解*

邢婷婷 张玉存

(燕山大学电气工程学院, 秦皇岛 066004)

摘要 在非相对性原理下建立的二端面弹性转轴的非线性动力学方程, 在工程应用中具有时变、强耦合和高度非线性等动力学特征. 基于拓扑反变算法, 建立二端面弹性转轴的原始系统空间、目标系统空间以及两空间的拓扑反变映射, 得到其简单的解耦的目标系统空间及相应方程的拓扑反变解.

关键词 二端面弹性转轴, 非线性, 动力学方程, 拓扑反变解

引言

二端面弹性转轴, 是机械传动中最广泛的组成零件. 弹性转轴一般是通过两个端面建立与其它零件的联接关系, 是典型的相对转动的非线性系统. 相对转动系统包含许多非线性因素, 常见的现象包括失稳性、分岔、混沌等, 无法用线性模型描述与分析^[1~2]. 近年来, 相对论分析力学和转动相对论分析力学的研究发展了相对论力学, 罗绍凯^[3]创立了转动相对论分析力学的基本理论及其对称性理论. 贾利群^[4]对转动系统的相对论性进行了静力学分析. 基于相对性原理, 建立了圆柱体任意两截面间的相对转动动力学方程^[5]并进行了定性和定量分析, 推导出二端面弹性转轴相应的积分解^[6]、级数解^[7]、稳定性与近似解^[8]、主共振与次共振解^[9]和稳定性及在一类非线性弹性系数下的解^[10]. 本文根据拓扑反变算法^[11], 利用二端面弹性转轴相对转动系统的非线性动力学方程得到其相应的同胚的、线性化和解耦的拓扑反变方程, 并获得其拓扑反变解, 实现从简单线性化方程反映出系统复杂的非线性特性, 验证了拓扑反变对于系统空间完备表述和解耦变换.

1 二端面弹性转轴非线性动力学方程

二端面弹性转轴是工程中用于回转运动与动力传动, 如图1所示. 弹性转轴一般是通过两个端面建立与其它零件的联接关系. 其力学、位移条件也是通过二端面给定和需要测出的, 故称为二端面

弹性转轴.

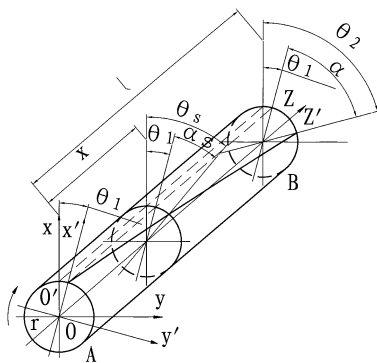


图1 二端面弹性转轴扭转坐标图

Fig. 1 The torsional coordinate diagram of the twain side elastic rotation shaft

文献[5]对于二端面转轴相对转动系统的非线性动力学方程建立为:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{6}J\ddot{\theta}_2 + C\dot{\theta}_1 - C\dot{\theta}_2 + K\theta_1 - K\theta_2 = T_1 \\ \frac{1}{6}J\ddot{\theta}_1 + \frac{1}{3}J\ddot{\theta}_2 + C\dot{\theta}_1 - C\dot{\theta}_2 - K\theta_1 + K\theta_2 = T_2 \end{cases} \quad (1)$$

其中: J 为圆柱体任意横截面间的转动惯量, C 为阻尼系数, K 为扭转刚度, θ_1 和 θ_2 分别为两个横截面的转角, T_1 和 T_2 分别是两个横截面处的外加力矩. 将(1)式写成矩阵形式:

$$M\ddot{\theta} + C'\dot{\theta} + K'\theta = T \quad (2)$$

其中: $\theta = (\theta_1 \ \theta_2)^T$, $T = (T_1 \ T_2)^T$, $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$,

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}C, K' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}K.$$

方程(2)是工程中描述转动动力传输性态的基本方程,具有非线性特性.为了得到方程(2)的拓扑反变换解,对于上述非线性系统空间建立拓扑反变换映射关系 $F: X \rightarrow Y$. 目的是利用拓扑变换 F , 将非线性的二端面弹性转轴的原始系统空间映射到解耦的目标系统空间,再根据线性化的目标系统空间方程,得到其相应的拓扑反变换解.

2 拓扑反变换算法建立

定义1 X 上的拓扑 τ 被称作由函数族 $F = \{f: X \rightarrow X_f\}$ 诱导的反变(contravariant)拓扑,若每个 X_f 是拓扑空间和 τ 是使得对一切 $f \in F$ 都连续的最小拓扑.

根据非线性系统特征参量的特点,将系统空间 X 获取的特征分为 N 类,各类特征间是不相关的.特征全体描述为:

$$\aleph = (\aleph^1, \aleph^2, \dots, \aleph^N) \quad (3)$$

系统空间特征随时间变化,记相应时刻的第 i 类特征子空间表示为 \aleph^i , \aleph^i 内各参量特征变化体现系统空间某一属性状态的变化,每类特征中又有 n^i ($i = 1, 2, \dots, N$) 个子特征,由各类特征间不相关可知,存在一组子基 $\{a_i\}$,使得 $X = \sum_{i=1}^N a_i \aleph^i$. 对于每类特征子空间 \aleph^i ,有:

$$\aleph^i = [x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n^i}^i] \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

其中, $x_1^i, x_2^i, \dots, x_{n^i}^i$ 为第 i 类特征子系统空间 \aleph^i 的子特征. \aleph 构成原始系统空间.

将系统空间 X 划分为多个子系统空间 \aleph^i ,由上述可知, X 是一个集合, $\aleph = (\aleph^1, \aleph^2, \dots, \aleph^N)$ 是 X 的一个子集族,且满足:

$$(1) X, \emptyset \in \aleph;$$

(2) 若 $\aleph^i, \aleph^j \in \aleph$, \aleph^i, \aleph^j 为两类不同特征,则 $\aleph^i \cap \aleph^j = \emptyset \in \aleph$;

$$(3) \aleph^i \subset \aleph, n^i \text{ 为子特征数目,则:}$$

$$\cup_{x_j^i \in \aleph} x_j^i \in \aleph, (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, n^i).$$

由拓扑空间定义可知: (X, \aleph) 构成一个拓扑空间.

设目标系统空间 (Y, \mathfrak{Z}) 可分为:

$$\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}^2, \dots, \mathfrak{Z}^N) \quad (5)$$

目标子系统空间 \mathfrak{Z}^i 中以一种耦合特征属性作为单一变量的信息集合, \aleph^i 按照保留有用相关信息原则映射到目标系统空间 \mathfrak{Z}^i :

$$\varphi_i: \aleph^i \rightarrow \mathfrak{Z}^i \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

存在 $\{h_\beta^i\}$, ($i = 1, 2, \dots, N; \beta = 1, 2, \dots, m^i$) 是目标子系统空间 $\mathfrak{Z}^i = (y_1^i, y_2^i, \dots, y_{\beta}^i)$ 的 Hamel 基, m 为第 i 个目标子系统空间 \mathfrak{Z}^i 的维数,则 \mathfrak{Z}^i 可以用 \mathfrak{Z}^i 中有限个元素的组合来表示:

$$\mathfrak{Z}^i = \sum_{\beta=1}^{m^i} h_\beta^i y_\beta^i \quad (7)$$

将子空间 $\aleph^1, \aleph^2, \dots, \aleph^N$ 映射到(5)式的目标子系统空间 $\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}^2, \dots, \mathfrak{Z}^N$ 的一族映射表示为:

$$\varphi = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i \quad (8)$$

由(5)、(8)式得目标系统空间 \mathfrak{Z} 为:

$$\mathfrak{Z} = \bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\aleph^i) = \bigcup_{i=1}^N \mathfrak{Z}^i = \bigcup_{i=1}^N \left(\sum_{\beta=1}^{m^i} h_\beta^i y_\beta^i \right) \quad (9)$$

其中: $\bigcup_{i=1}^N \varphi_i$ 即为 $\varphi_i: \aleph^i \rightarrow \mathfrak{Z}^i$ 是一族映射.

为保持 X, Y 空间同胚,建立同胚映射:

$$f: \aleph \rightarrow \mathfrak{Z} \quad (10)$$

则一定存在 $\{b_i\}$,使得 $Y = \sum_{i=1}^N b_i \mathfrak{Z}^i$,由(9)、(10)式得拓扑空间 Y 为:

$$Y = f\left(\bigcup_{i=1}^N \varphi_i(\aleph^i)\right) = (b_1 \mathfrak{Z}^1, b_2 \mathfrak{Z}^2, \dots, b_N \mathfrak{Z}^N) \quad (11)$$

由前所述, f 是 X, Y 空间的同胚映射,即 X, Y 具有相同拓扑结构,目标系统空间 Y 可以完备的表达原始系统空间 X . 每一个元素 \aleph^i 称为 (X, \aleph) 的一个开集,且 $\bigcup_{\aleph^i \in \aleph} \aleph^i \in X$,则 \aleph 是 X 的一个覆盖. \aleph^i ($i = 1, 2, \dots, N$) 是可数的族,则 \aleph 是 X 的一个可数覆盖, \aleph 是拓扑空间 (X, \aleph) 的一个可数基,拓扑空间 (X, \aleph) 满足第二可数性公理, (X, \aleph) 是可分空间. 可分性是同胚映射的拓扑不变性,由同胚映射 $f: \aleph \rightarrow \mathfrak{Z}$ 得到目标系统空间 (Y, \mathfrak{Z}) 也为可分空间,则(5)式表示目标系统空间是正确的.

(X, \aleph) 经同胚变换 f 到目标空间 (Y, \mathfrak{Z}) , 仍为可分空间,即 $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}^2, \dots, \mathfrak{Z}^N)$. 映射 $F: X \rightarrow Y$ 为:

$$F = f \circ \bigcup_{i=1}^N \varphi_i = f \circ \varphi \quad (12)$$

为使得 F 满足拓扑反变的定义,需要说明 F 为连续的最小拓扑.

定理1 设 X 是具有广义 Schauder 基 $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ 的 Banach 空间, $\varphi: \Omega \subset X \rightarrow R$ 在 $x_0 \in \Omega$ 处沿方向 e_α 的方向偏导数 $d\varphi(x_0, e_\alpha)$ 存在,且 φ 在 x_0 处取无条件极小值,则 $d\varphi(x_0, e_\alpha) = 0$.

证明:存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 和 $\delta > 0$, 当 $|t| < \delta$ 时,

有 $x_0 + te_\alpha \in U(x_0) \cap \Omega$, 令

$$f_\alpha(t) = \varphi(x_0 + te_\alpha), |t| \leq \delta$$

则 $f_\alpha(t) \geq f_\alpha(0), \forall |t| \leq \delta$, 即实变量函数在 $t = 0$ 处取得最小的局部极小值, 故

$$0 = f'_\alpha(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_\alpha(t) - f_\alpha(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + te_\alpha) - \varphi(x_0)}{t} = d\varphi(x_0, e_\alpha)$$

根据定理 1 可以求出满足连续的最小拓扑的映射 F , 即拓扑反变映射, 为系统状态简化分析奠定基础. 然后利用得到的拓扑反变映射, 得到线性化的工程系统空间以及相应空间的拓扑反变解.

3 二端面弹性转轴非线性系统的拓扑反变解

3.1 非线性系统的拓扑反变

定义 2 对于非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (13)$$

如果在 x_0 的邻域内, 有以下条件成立:

- (1) $L_{g_j} L_f^{k_i} h_i(x) = 0 (i, j = 1, \dots, m, k_i < r_i - 1)$;
- (2) $m \times m$ 维矩阵 $A(x)$:

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) \cdots L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) \cdots L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \dots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) \cdots L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}_{m \times m}$$

在 x_0 是非奇异的, 则称 $\{r_1, \dots, r_m\}$ 为系统的相对阶集合, 其中每个子相对阶 r_i 与输出 $y_i = h_i(x)$ 是相对应, 记系统(13)的相对阶数 $r = \sum_{i=1}^m r_i$.

定理 2 若系统(13)的相对阶 $r \leq n$, 则根据微分几何理论, 存在局部微分同胚:

$$P(x) = [\xi^T \quad \eta^T]^T = [\xi_1(x), \dots, \xi_m(x), \eta(x)]^T$$

其中:

$$\begin{aligned} \eta(x) &= [\eta_1(x), \dots, \eta_{n-r}(x)]^T, \\ \xi_1(x) &= [\xi_{i1}(x), \xi_{i2}(x), \dots, \xi_{i, r_i}(x)]^T = [h_i(x), L_j h_i(x), \dots, L_j^{r_i-1} h_i(x)]^T. \end{aligned}$$

且满足: $L_g \eta_j(x) = 0; (j = 1, 2, \dots, n - r)$.

及输入变换

$$v = B(x) + A(x)u \quad (14)$$

使得系统(13)变成如下规范模型:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A\xi + Bv \\ \eta = q(\xi, \eta) \\ y = C\xi \end{cases} \quad (15)$$

其中:

$$\begin{aligned} B(x) &= [L_f^{r_1} h_1(x), \dots, L_f^{r_m} h_m(x)]^T, \\ q(\xi, \eta) &= [L_f \eta_1(x), \dots, L_f \eta_{n-r}(x)]^T, \\ A &= \text{diag}\{A_i\}, B = \text{diag}\{B_i\}, C = \text{diag}\{C_i\}, \\ A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{r_i \times r_i}, B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \\ C_i &= [1, 0, \dots, 0]_{1 \times r_i}; (i = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

显然系统(13)的拓扑反变 F 的线性化规律为:

$$u = A(x)^{-1}(-B(x) + v) \quad (16)$$

对于非线性系统(13), 根据系统的特点, 将系统的原始系统空间 \mathfrak{N} 表示为 $\mathfrak{N} = u$, 目标系统空间 \mathfrak{Z} 是输出的线性系统空间 $\mathfrak{Z} = v$, 拓扑变换的为(16)式, 并且满足拓扑反变的条件:(1)微分同胚映射是一一的, 到上的连续映射, 是同胚映射;(2)微分同胚映射满足连续的最小拓扑的条件, 通过定理 1 可以很容易证明, 因此, 此映射符合拓扑反变映射定义;(3)非线性系统经拓扑反变换后为解耦的线性化系统. 得到的线性化系统可以完备的准确的反映出原始非线性系统的特征.

3.2 二端面非线性动力方程的拓扑反变解

由二端面弹性转轴动力方程可知, 其动力方程是非线性的, 即原始系统空间 \mathfrak{N} 为非线性系统空间. 为得到线性化的目标系统空间, 根据 4.1 小节对二端面动力方程线性化.

根据拓扑反变原理、非线性系统的拓扑反变换及二端面弹性转轴方程(2), 令 $x = [\theta \quad \dot{\theta}]$, 原始系统空间 $\mathfrak{N} = T$, 则二端面动力学方程(2)表示为状态空间形式:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)T \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} f(x) &= [\dot{\theta} \quad -M^{-1}(C'\dot{\theta} + K'\theta)]^T, \\ g(x) &= [0 \quad M^{-1}]^T. \end{aligned}$$

根据非线性系统的拓扑反变算法可知, 对于二端面弹性转轴系统的非线性的状态方程, 如果能找到适当目标系统空间 \mathfrak{Z} 的输出:

$$\mathfrak{Z} = y = h(x) \quad (18)$$

使得该输出信号相对于输入信号 T 的相关阶数等

于2,即满足:

$$\frac{\partial h}{\partial x}g(x) = 0, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}f(x)\right)g(x) \neq 0 \quad (19)$$

那么,根据拓扑反变换(14)式,得 $F: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{Z}$

$$T = A(x)^{-1}(V - B(x)) = (L_g L_f h(x))^{-1}\{V - L_f^2 h(x)\} \quad (20)$$

其中:

$$B(x) = L_f^2 h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}f(x)\right)f(x),$$

$$A(x)^{-1} = L_g L_f h(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial x}f(x)\right)g(x).$$

使得原始系统空间在新的坐标 y , 成为如下目标系统空间:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} V \quad (21)$$

即:

$$\dot{y} = V \quad (22)$$

不难证明,如果令 $y = h(x) = \theta$, 则有:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = [I \quad 0], \quad \frac{\partial h}{\partial x}g(x) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x))g(x) = I \neq 0.$$

可得二端面方程的拓扑反变线性化模型. 通过求 M 的逆矩阵,将方程(2)化为线性系统:

$$\ddot{\theta} = -M^{-1}(C'\dot{\theta} + K'\theta) + M^{-1}T \quad (23)$$

引入辅助输入变量 V , 并令

$$T = MV + C'\dot{\theta} + K'\theta \quad (24)$$

则将(24)代入(23)得到拓扑反变换:

$$\ddot{\theta} = V \quad (25)$$

即:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 = V_1 \\ \ddot{\theta}_2 = V_2 \end{cases} \quad (26)$$

再求积分即可得到.

4 结论

本文根据拓扑反变换算法,构建非线性系统的原始系统空间和目标系统空间以及拓扑反变映射,通过非线性系统的目标系统空间反映出原始系统空间的特征的变化. 将拓扑反变算法应用于二端面弹性转轴系统的非线性动力学方程,利用拓扑反变映射 F , 得到其相应的线性化的动力学方程及拓扑反变换,实现了二端面弹性转轴系统的解耦.

参 考 文 献

- 彭建华, 刘延柱. 弹性细杆的混沌形态. 动力学与控制学报, 2005, 3(2):36~39 (Peng J H, Liu Y Z. Chaotic configuration of a thin elastic rod. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2):36~39 (in Chinese))
- 龙卫国, 蒋丽忠, 戚菁菁. 弹性薄板绕轴转动时刚-柔耦合动力学非线性分析. 动力学与控制学报, 2007, 5(2):136~140 (Long W G, Jiang L Z, Qi J J. Nonlinear analysis on coupling dynamics of axial rotation of elastic thin plate. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2):136~140 (in Chinese))
- 罗绍凯. 转动相对论系统的 Appell 方程及其形式不变性. 物理学报, 2002, 51(4):712~717 (Luo S K. Appell equations and form invariance of rotational relativistic system. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(4):712~717 (in Chinese))
- 贾利群. 转动系统的相对论性分析静力学理论. 物理学报, 2003, 52(5):1039~1043 (Jia L Q. A theory of relativistic analytical statics of rotational system. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(5):1039~1043 (in Chinese))
- 董全林, 刘彬. 在伽利略坐标变换下的二端面弹性转轴相似动力学方程. 物理学报, 2002, 51(10):2191~2196 (Dong Q L, Liu B. A similarity dynamic equation of an elastic rotation shaft with twin sides under the Galileo coordinate conversion. *Acta Physica Sinica*, 2002, 51(10):2191~2196 (in Chinese))
- 董全林, 王坤, 张春熹, 刘彬. 圆柱体相对转动动力学方程的积分解. 物理学报, 2004, 53(2):337~342 (Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B. An integral solution for the relative-rotation dynamic equation of a cylinder. *Acta Physica Sinica*, 2004, 53(2):337~342 (in Chinese))
- 赵武, 刘彬. 相对转动运动学方程的级数解. 物理学报, 2005, 54(10):4543~4548 (Zhao W, Liu B. Series solution for relative-rotation motion equation. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(10):4543~4548 (in Chinese))
- 王坤. 相对转动动力学方程的稳定性及在一类黏弹性系数下的解. 物理学报, 2005, 54(9):3987~3991 (Wang K. Steadiness of relatively rotation dynamics equation and it's solution for a kind stickiness flexibility coefficient. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(9):3987~3991 (in Chinese))
- 王坤, 二端面转轴相对转动非线性动力学系统的稳定

- 性与近似解. 物理学报, 2005, 54(12): 5530 ~ 5533.
(Wang K, Stability and approximate solution of nonlinear dynamic system of a cylinder with end faces in relative rotation. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54(12): 5530 ~ 5533 (in Chinese))
- 10 孟宗, 刘彬. 相对转动非线性动力学方程的稳定性及在一类非线性弹性系数下的解. 物理学报, 2007, 56(11): 6194 ~ 6198 (Meng Z, Liu B, Stability of relativistic rotational nonlinear dynamic equation and solution for a kind of nonlinear elastic coefficients. *Acta Physica Sinica*, 2007, 56(11): 6194 ~ 6198 (in Chinese))
- 11 张玉存, 刘彬. 一种检测动力系统振动频率的新方法. 计量学报. 2006, 27(4): 339 ~ 342 (Zhang Y C, Liu B. A study on the vibration frequency detection of the dynamical systems using topology contravariant functor. *Acta Meirologica Sinica*, 2006, 27(4): 339 ~ 342 (in Chinese))

A TOPOLOGY CONTRAVARIANT SOLUTION FOR THE NONLINEAR DYNAMIC EQUATION OF TWIN SIDE ELASTIC ROTATION SHAFT *

Xing Tingting Zhang Yucun

(Institute of Electrical Engineering Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract The dynamics equation of the elastic rotation shaft possessing twain side was built based on the principle of non - relative. The characteristics of the equation include time - varying, strong coupling and high non - linear dynamic in engineering applications. The primal space of system, aim space of system and mapping of topology contravariant between the two spaces were established according to the arithmetic of topology contravariant. Simple and decoupling aim space of system and the corresponding solution of contravariant topology were obtained.

Key words twain side elastic rotation shaft, nonlinear, dynamic equation, solution of topology contravariant