

# 非线性三角恋模型及其在高斯白噪声激励下的基本动力学特征\*

顾仁财 许勇 狄根虎

(西北工业大学理学院应用数学系, 西安 710072)

**摘要** 研究了非线性三角恋模型在某些特定参数下的一些基本动力学特征,包括对称性、耗散性、不动点(平衡),混沌行为和混沌吸引子. 由于心理系统具有高度的复杂性和不确定性,本文用标准高斯白噪声刻画随机因素,构建了随机激励下的爱情模型,并研究了新模型的随机动力学行为,得到了不同激励幅值下系统的响应结果.

**关键词** 爱情演化过程, 非线性三角恋模型, 不动点, 混沌吸引子, 高斯白噪声, 激励幅值

## 引言

心理学是研究人的心理现象与行为的科学,是构成认识论的重要知识领域. 人的心理从孕育、创立、发展、成熟到变异(或衰退)是一个演化过程<sup>[1-3]</sup>. 爱情的发展和演化是典型的心理学活动之一,也是现实生活中人们普遍关心的一种心理活动<sup>[4-6]</sup>.

Strogatz 研究了一个描述 Romeo 和 Juliet 之间爱情发展的数学模型<sup>[7]</sup>,  $R(t)$  是  $t$  时刻 Romeo 对 Juliet 的爱(如果  $R(t) < 0$ , 则表示 Romeo 对 Juliet 的恨),  $J(t)$  是  $t$  时刻 Juliet 对 Romeo 的爱. 则爱情模型可以建立为

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= aR + bJ \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ \end{aligned} \quad (1)$$

2004 年 Sprott 在 Strogatz 的研究基础上, 提出了一系列的爱情模型, 这些模型都是一些普通的微分方程, Sprott 用这些方程来描述随着时间的演化恋爱中的人所表现出爱(或恨)的情况<sup>[8]</sup>. Sprott 从两个人的爱情关系发展到了三角恋的爱情关系, 并引入了 logistic 函数  $y = J(1 - |J|)$ , 使原来的线性模型变为能够产生混沌现象的非线性模型, 即

$$\begin{aligned} \frac{dR_j}{dt} &= aR_j + b(J - G)(1 - |J - G|) \\ \frac{dJ}{dt} &= cR_j(1 - |R_j|) + dJ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_c}{dt} &= aR_c + b(G - J)(1 - |G - J|) \\ \frac{dG}{dt} &= eR_c(1 - |R_c|) + fG \end{aligned} \quad (2)$$

称方程(2)为非线性三角恋模型(nonlinear love-triangle model), 其中,  $R_j$  代表 Romeo 对 Juliet 的爱(或恨),  $R_c$  代表 Romeo 对第三者 Guinevere 的爱(或恨),  $G$  代表 Guinevere 对 Romeo 的感情. 系数  $a$  和  $b$  为 Romeo 的浪漫风格(romantic style),  $(c, d)$  和  $(e, f)$  分别为 Juliet 和 Guinevere 的浪漫风格. 为了简化, 假设 Juliet 和 Guinevere 互不认识, Romeo 对她们采取相同的浪漫风格.  $a$  和  $b$  的正负决定 Romeo 展现四种不同的浪漫类型, Strogatz 等人分别将这些情形命名为:

- \* 热情的爱情主义者:  $a > 0, b > 0$  (Romeo 同时受到自己的情感和 Juliet 的情感的激励).
- \* 自恋的讨厌虫:  $a > 0, b < 0$  (Romeo 希望能够得到比他想的还要多但是却因为 Juliet 的感情而退缩)
- \* 谨慎的恋人(可靠的):  $a < 0, b > 0$  (Romeo 因为自己的情感而退缩, 但却得到了 Juliet 的情感的激励)
- \* 隐士:  $a < 0, b < 0$  (Romeo 因为自己 Juliet 两个人的情感而退缩)

## 1 非线性三角恋模型的基本动力学特征

在这部分中,我们将研究非线性三角恋模型的一些基本动力学特征,包括对称性,耗散性,定点(平

2009-09-07 收到第1稿, 2010-01-08 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(10972181), 陕西省科学基金(2007A10)和西北工业西北工业大学翱翔之星资助项目

衡),混沌行为以及混沌吸引子等. 尤其是在 Romeo ( $a = -3, b = 4$ ) 和 Guinevere ( $e = 2, f = -1$ ) 都是谨慎的恋人而 Juliet ( $c = -7, d = 2$ ) 是自我陶醉的讨厌虫这样特定情形下系统的一些动力学行为.

(1) 对称性:系统(2)是关于原点(0,0,0,0)对称,因为如果 $(R_{j_0}, J_0, R_{c_0}, G_0)$ 是方程(1.2)的解,那么 $(-R_{j_0}, -J_0, -R_{c_0}, -G_0)$ 必定也是方程的解.

(2) 耗散性:方程(2)的散度是:

$$\nabla \cdot F = \frac{dR_J}{dt}/R_J + \frac{dJ}{dt}/R_J + \frac{dR_c}{dt}/R_c + \frac{dG}{dt}/G = 2a + d + f \quad (3)$$

由于

$$2a + d + f = -5 < 0 \quad (4)$$

故,非线性三角恋系统是耗散的.

(3) 平衡点及其稳定性:令 $\frac{dR_J}{dt} = 0, \frac{dJ}{dt} = 0, \frac{dR_c}{dt} = 0$ 和 $\frac{dG}{dt} = 0$ ,可以得到系统的平衡点为 $E = (x, -$

$\frac{c}{d}x(1 - |x|), -x, \frac{e}{f}x(1 - |x|))$ ,其中

$$x(b(de + cf)(1 - |x|)(1 - \left| \frac{de + cf}{df} \right| \cdot |x| \cdot |1 - |x||) - adf) = 0 \quad (5)$$

由于系统(2)的对性性,这里只须考虑 $x > 0$ 的情形.(5)式可以转化为

$$x((1 - x)(1 - mx \cdot |1 - x|) - n) = 0 \quad (6)$$

其中 $m = \left| \frac{de + cf}{df} \right|, n = \frac{adf}{b(de + cf)}$ . 代入参数的具体

数值有: $m = \frac{11}{2}, n = \frac{3}{22}$ .

故,方程(6)的根是: $x_1 = 0, x_2 = 0.161, x_3 = 1.262$ . 因此,我们可以得到系统的5个平衡点: $E_0 = (0, 0, 0, 0), E_1 = -E_2 = (0.18, 0.517, -0.18, -0.295), E_3 = -E_4 = (1.24, -1.042, -1.24, 0.595)$ .

对应在 $E_0$ 处的线性化系统的系数矩阵是:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -b \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & -b & a & b \\ 0 & 0 & e & f \end{bmatrix} \quad (7)$$

矩阵A的特征值分别为: $\lambda_1 = a = -3.0, \lambda_2 = -2.386, \lambda_{3,4} = 0.193 \pm 3.985i$ ,由于 $\text{Re}(\lambda_{3,4}) > 0$ ,故 $E_0$ 是非稳定平衡点.

(4) 混沌吸引子:在 $a = -3, b = 4, c = -7, d =$

$e = 2, f = -1$ 时,系统(2)存在着混沌吸引子(如图1所示). 此时系统的最大 Lyapunov 指数是 0.39, Kaplan - Yorke 维数是 2.026. 图2显示了随时间演化 Romeo 对 Juliet 的情感变化,该图同时也显示了初值改变 1% 时  $R_j$  的混沌演化过程.

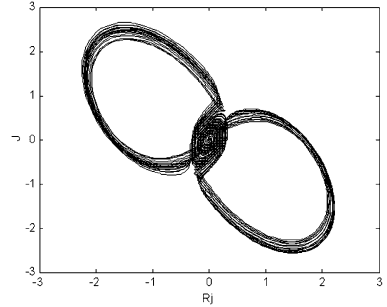


图1 系统(2)的混沌吸引子

Fig.1 Strange attractor of System (2)

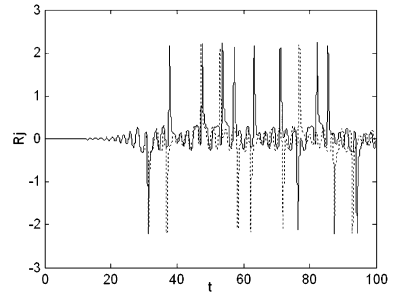


图2 初始条件改变 1% 时 Romeo 对 Juliet 的情感演化过程

Fig.2 Chaotic evolution of Romeo's love for Juliet from (2) showing the effect of changing the initial conditions by 1%

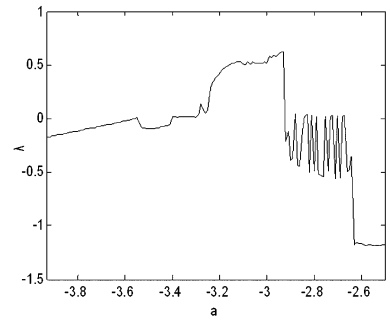


图3 系统(2)的最大 Lyapunov 指数随参数的变化

Fig.3 The largest Lyapunov exponent of System (2) with parameterchanging

固定其中 5 个参数的值,即 $b = 4.0, c = -7.0, d = 2.0, e = 2.0$ 和 $f = -1.0$ ,图3显示了系统(2)的最大 Lyapunov 指数随参数 a 的变化,当 $-3.272 < a < -2.930$ ,系统存在着混沌吸引子. 类似地,固定其它 5 个参数,可以得到使系统为混沌系统的第 6 个参数的数值范围,如表 1 所示. 实际上,使得系统存在混沌的参数空间的范围是相对小的,更多的

是周期解或无限解.

表1 系统(2)存在混沌吸引子时参数的数值范围

Table 1 The value interval of the sixth parameter at which the system(2) exist chaotic attractors

parameter	value extent
a	-3.272——-2.930
b	2.971——10.838
c	-8.050——-6.752
d	1.845——2.045
e	1.731——2.082
f	-1.771——-0.863

## 2 高斯白噪声激励下的非线性三角恋模型

在现实生活中,许多因素可以影响两人之间爱情的发展.包括来自身体组织的干扰(身体疲劳等)和一些对爱情发展有影响的突发事件<sup>[9-11]</sup>.比如,Romeo在某一天买彩票突然中了大奖,Romeo非常高兴,这时候他可能会给Juliet更多的爱,同时Juliet对他的爱也可能会因Romeo得大奖而有所变化.但是也有可能出现这样的情况:Romeo意外的出车祸了,Romeo的心情坏到了极点,这时他可能顾不上Juliet,对她的爱也就减少了.然而,影响Romeo和Juliet两人之间爱情发展的事件发生完全是随机的,不确定的.假设发生在Romeo身上的“好事”和“坏事”的可能性是一样的,显然每次发生的事件的强度是不一样的,因此可以用标准高斯白噪声<sup>[9,12]</sup>  $\xi(t)$  代表  $t$  时刻所发生的随机事件.为了简化,本文只考虑Romeo对Juliet的情感受到随机事件影响的情形,因此建立新模型如下:

$$\begin{aligned} \frac{dR_J}{dt} &= aR_J + b(J - G)(1 - |J - G|) + m\xi(t) \\ \frac{dJ}{dt} &= cR_J(1 - |R_J|) + dJ \frac{dR_C}{dt} = aR_C + b(G - J)(1 - |G - J|) \frac{dG}{dt} = eR_C(1 - |R_C|) + fG \end{aligned} \quad (8)$$

利用随机四阶 Runge - kutta 方法求解方程(8),我们可以得到系统不同形态的吸引子和数值解,如图4所示.在一定的激励幅值下,系统混沌吸引子的形状并没有发生改变,方程(8)的解依然保持在一个稳定的区域内(如图4(a)),这反映了系统具有一定的稳定性.随着激励幅值的进一步变大,系统逐渐偏离原来的稳定状态,进入一个新的稳定域(如图4(b&d)).

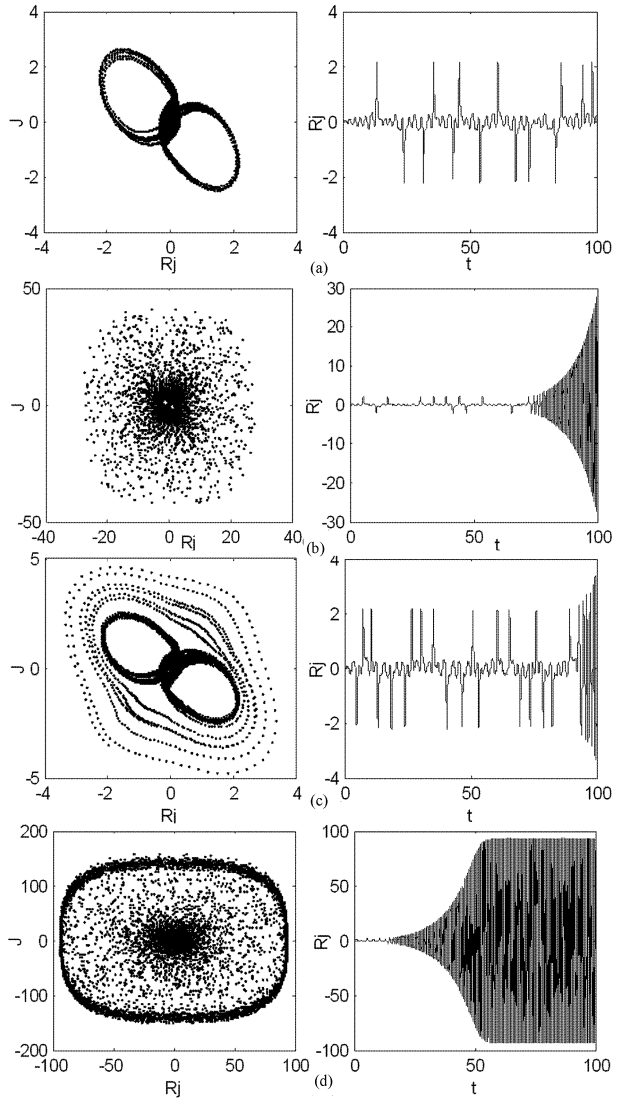


图4 不同激励幅值下系统(8)的  $J - R_j$  相图和  $R_j(t)$  得时间历程图 (a)  $m = 1.0$ ; (b)  $m = 2.3$ ; (c)  $m = 2.6$ ; (d)  $m = 3.0$

Fig. 4  $J - R_j$  phase portrait and  $R_j(t)$  evolution of time of Eq. 8 with different excitations amplitude (a); (b); (c); (d)

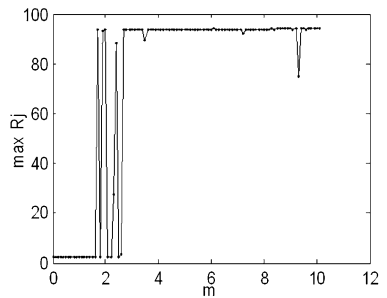


图5 在不同激励幅值下的最大值

Fig. 5 The largest vaule of of Eq(8) with changing

尽管如此,在这个过程中,存在一些特定的激励幅值使得系统回归到图4(a)的状态.图5表示了在不同激励幅值下,Romeo对Juliet“爱”的最大值的变化.可以看出,随着激励幅值的不断增大,Romeo

对 Juliet 的情感将会是大起大落的,可以认为这时候的爱情是畸形的、不健康的. 因此,随机事件对心理活动的影响应当引起人们的注意.

### 3 总结

本文主要研究了在一些特定参数值下非线性三角恋模型(Nonlinear Love - triangle Model)的基本动力学特征. 通过讨论系统的对称性、耗散性、不动点和混沌吸引子等印证了系统存在着混沌吸引子. 为了分析更为现实的爱情,体现随机因素的影响,建立了随机因素激励下新的爱情模型,讨论了在不同激励幅值下系统的动力学行为.

### 参 考 文 献

- 1 Terry M. The self as a dynamical system. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 1999, 3: 311 ~ 345
- 2 李小平. 非线性科学及其在心理学中的应用. 南京师大学报(社会科学版) 2005, 2: 84 ~ 88 (Li X P. Nonlinear science and its application in psychology. *Journal of Nanjing Normal University (Social Science)*, 2005, 2: 84 ~ 88 (in Chinese))
- 3 Sprott J. Can a monkey with a computer create art? *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 2004, 1: 103 ~ 114
- 4 Rinaldi S. Love dynamics: The case of linear couples. *Applied Mathematics and Computation*, 1998, 95: 181 ~ 192
- 5 Liao X, Ran J. Hopf bifurcation in love dynamical models with nonlinear couples and time delays. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 31: 853 ~ 865
- 6 Wauer J, Schwarzer D, Cai G Q, Lin Y K. Dynamical models of love with time-varying fluctuations. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 188: 1535 ~ 1548
- 7 Strogatz S. *Nonlinear dynamics and chaos*. Addison-Wesley, Reading, Mass, 1994: 335 ~ 341
- 8 Sprott J. *Dynamical Models of Love*. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 2004, 3: 303 ~ 314
- 9 Sprott J. *Dynamical Models of Happiness*. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 2005, 9: 23 ~ 36
- 10 Robert A. Effects of random noise and internal delay in nonlinear psychophysics. *Nonlinear Dynamics, Psychology, and Life Sciences*, 1998, 2: 73 ~ 93
- 11 孙中奎,徐伟,杨晓丽. 谐和激励与随机噪声作用下具有势的 Duffing 振子的混沌运动. 动力学与控制学报, 2005, 3: 13 ~ 22 (Sun Z K, Xu W, Yang X L. Effect of random noise on chaotic motion of a particle in a potential. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3: 13 ~ 22 (in Chinese))
- 12 Bartosch L. Generation of colored noise. *International Journal of Modern Physics C*, 2001, 6: 851 ~ 85

## BASIC PROPERTIES AND GAUSSIAN WHITE NOISE EXCITATIONS OF NONLINEAR LOVE-TRIANGLE SYSTEM \*

Gu Rencai Xu Yong Di genhu

(department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract** This paper studied the basic properties of the Love-triangle system under some specifically parameters, such as symmetry, dissipation, fixed points (equilibria), chaotic behavior and chaotic attractors. As the psychology system is highly complex and indefinable. This paper selected the random factors by standard Gaussian white noise to depict it, and then a new model of love was constructed. The random dynamical behavior of the new model was researched, and the influence of the different excitation amplitude on the system was discussed.

**Key words** love evolution process, nonlinear love-triangle model, fixed points, chaotic attractors, Gaussian white noise, excitation amplitude