

一阶时滞系统的鲁棒 α -稳定性区域分析

狄成宽

(南京工程学院应用数学研究所, 南京 211167)

摘要 主要研究了滞后型一阶时滞系统的鲁棒 α -稳定性, 即参数在一定区间上任意取值, 都能确保系统的平衡点的 α -稳定性. 给出了两种分析方法, 其中一种基于 Hayes 第二定理, 另一种基于 Lambert W 函数. 两种方法给出的结果是一致的. 最后, 几个实例说明了文中方法的有效性.

关键词 时滞, α -稳定性, 鲁棒稳定性, 稳定性区域, Lambert W 函数

引言

稳定性是许多实际系统的基本要求. 由于系统的约化, 系统参数测量误差以及环境变化等原因, 常常难以得到系统参数的精确值, 但可以确定它们在一定范围(如给定参数取值区间)内取值. 实际系统常常要求稳定性应具有鲁棒性, 使得系统在规范范围内对参数的任意组合总是稳定的^[1,2,3]. 文献[4]结合文[5,6,7]讨论了一般时滞系统的 α -稳定性问题, 并且得到了有效的判别方法; 结合实际系统稳定性对参数变化区域的要求, 下面将讨论其 α -稳定性的鲁棒区间.

1 利用 Hayes 定理分析一阶时滞系统的稳定性区域

1.1 问题的导出

我们考虑下列超越方程

$$\lambda - a - be^{-\lambda} = 0 \quad (1)$$

上式可看作 $\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$ 当 $\tau = 1$ 时的方程, 而(1)式可同解变化为下式

$$h(\lambda) = \lambda e^\lambda - ae^\lambda - b = 0 \quad (2)$$

文[8]中 Hayes 第二定理为

定理 方程 $h(\lambda) = 0$ 的根位于直线 $\text{Re}(\lambda) = K$ 的左边, 当且仅当

$$a - K < 1 \text{ 及 } (a - K)e^K < -b < e^K[v^2 + (a - K)^2]^{1/2}$$

这里 v 是方程 $v \cot v = a - K (0 < v < \pi)$ 的唯一的根.

显然当 $K = -\alpha$ 时, 由文献[4]可知: 该定理即成为一个 α 稳定性判据.

一阶实系数时滞微分方程

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau) \quad (3)$$

的特征方程为

$$\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0 \quad (4)$$

令 $s = \lambda\tau$, 则(4)式可化为

$$s - a\tau - b\tau \cdot e^{-s} = 0 \quad (5)$$

根据 Hayes 第二定理, 可得结论: 方程(5)的根满足 $\text{Re}(s) < K$ 当且仅当

$$a\tau - K < 1, (a\tau - K)e^K < -b\tau < e^K[v^2 + (a\tau - K)^2]^{1/2} \quad (6)$$

这里 v 是方程 $v \cot v = a\tau - K (0 < v < \pi)$ 的唯一根.

为保证 $\text{Re}(\lambda) < -\alpha$, 取 $K = -\alpha\tau$ 代入(6)式, 可得(3)式零解的 α -稳定区域的边界, 记其边界值函数为

$$g(a, b, \tau) = (a + \alpha)\tau \cdot e^{-\alpha\tau} + b\tau = 0 \quad (7)$$

$$f(a, b, \tau) = b\tau + e^{-\alpha\tau} \sqrt{v^2 + (a + \alpha)^2 \tau} = 0 \quad (8)$$

而 $a\tau - K < 1$ 的边界为 $(a + \alpha)\tau = 1$, 此即为上述直线 $g = 0$ 与曲线 $f = 0$ 的交点, 因为 $\lim_{v \rightarrow 0} v \cot v = 1$. 因此根据 Hayes 定理及(7)、(8)式我们可得出下列结论

命题 1 方程(3)的零解为 α -稳定当且仅当 $g(a, b, \tau) < 0$ 和 $f(a, b, \tau) > 0$ 同时成立, 且 $a + \alpha < 1/\tau$

这里 v 是方程 $v \cot v = a\tau - K (0 < v < \pi)$ 的唯一根, 而 $g(a, b, \tau) = 0$ 和 $f(a, b, \tau) = 0$ 成为 α -稳定性区域的边界.

在边界直线 $g(a, b, \tau) = (a + \alpha)\tau e^{-\alpha\tau} + b\tau = 0$ 中, $a + \alpha$ 与 b 符号相反, 即 $b = -(a + \alpha)e^{-\alpha\tau}$; 但在边界曲线 $f = 0$ 中, 显然 $b < 0$.

为消去 $f(a, b, \tau) = 0$ 中的 v , 根据 Hayes 定理

及命题1可得如下两个推论.

推论1 方程 $f = b\tau + e^{-\alpha\tau}\sqrt{v^2 + (a+\alpha)^2\tau^2} = 0$ 与 $b\tau + e^{-\alpha\tau}vcosv = 0$ 是等价变形.

证:由 Hayes 定理,把条件“ v 是方程 $vcotv = a\tau - K$ ($0 < v < \pi$) 的唯一根”代入 $f(a, b, \tau) = b\tau + e^{-\alpha\tau}\sqrt{v^2 + (a+\alpha)^2\tau^2} = 0$ 中,可得到 $b\tau + e^{-\alpha\tau}vcscv = 0$; 反之由此式结合 $vcotv = a\tau + \alpha\tau$ ($0 < v < \pi$) (这里 $-\alpha\tau = K$),可等价推得方程 $b\tau + e^{-\alpha\tau}\sqrt{v^2 + (a+\alpha)^2\tau^2} = 0$ 成立;所以两式: $f = b\tau + e^{-\alpha\tau}\sqrt{v^2 + (a+\alpha)^2\tau^2} = 0$ 与 $b\tau + e^{-\alpha\tau}vcscv = 0$ 是等价的. 证毕

推论2 若记 $F(a, b, \tau) = b\tau + e^{-\alpha\tau}\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2}$, 这里 $p = -\frac{a+\alpha}{b}e^{-\alpha\tau}$, 则当 $b < 0$ 且 $b \pm (a+\alpha)e^{-\alpha\tau} < 0$ 时, 方程 $F(a, b, \tau) = 0$ 与方程 $f(a, b, \tau) = 0$ 等价.

证: 由推论1的证明,可联立方程组

$$\begin{cases} v \frac{\cos v}{\sin v} = (a + \alpha)\tau \\ v \frac{e^{-\alpha\tau}}{\sin v} = -b\tau \end{cases} \quad (9)$$

解得 $\cos v = -\frac{a+\alpha}{b}e^{-\alpha\tau}$, 同时它也是可逆的 ($\sin v \neq 0$); 即 $\cos v = -\frac{a+\alpha}{b}e^{-\alpha\tau}$ 结合(9)式可推得等式: $vcotv = (a+\alpha)\tau$ 和 $b\tau + e^{-\alpha\tau}vcsc = 0$.

令 $p = -\frac{a+\alpha}{b}e^{-\alpha\tau}$, 即 $\cos v = p, v = \arccosp$, 这里 $v \in (0, \pi)$ 完全符合 Hayes 定理的条件. 由推论1 $f=0$ 可改记成: $b\tau + e^{-\alpha\tau}vcscv = 0$, 把 $p = -\frac{a+\alpha}{b}e^{-\alpha\tau}$ 代入, 则方程 $f(a, b, \tau) = 0$ 可推得下式:

$$F(a, b, \tau) = b\tau + e^{-\alpha\tau}\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2} = 0 \quad (10)$$

对于边界曲线 $f=0$, 考虑到 $|p| \leq 1$ 并且 $b < 0$, 则可推得下式成立

$$b - (a + \alpha)e^{-\alpha\tau} < 0 \quad (11)$$

根据关系式(6), 则下式也成立

$$b + (a + \alpha)e^{-\alpha\tau} < 0 \quad (12)$$

反之在(11)(12)条件下, 由(10)可得 $f(a, b, \tau) = 0$ 成立. 证毕

1.2 $\tau=1$ 时 a, b 的鲁棒 α -稳定性区间

为讨论 $\tau=1$ 时方程(3)零解的稳定性, 取 $\alpha =$

0.2, 代入边界值函数, 则可得 $g(a, b, 1) = (a + 0.2)e^{-0.2} + b = 0$ 及 $F(a, b, 1) = b + e^{-0.2}\sqrt{(\arccosp)^2 + (a + 0.2)^2} = 0$, 上式通过 Maple 软件作图, 得图1. 根据命题1, 图1中曲线的左侧区域即为参数 a, b 的 α -稳定性变化区域. 而且边界直线通过横轴上的点 $a = -\alpha = -0.2$, 把 $a = -0.2$ 代入曲线 $f(a, b, 1) = 0$, 解得 $b = -1.286$, 于是可得到一个 a, b 的 α -稳定性的区间为: $a \times b = (-\infty, -0.2) \times (-1.286, 0)$.

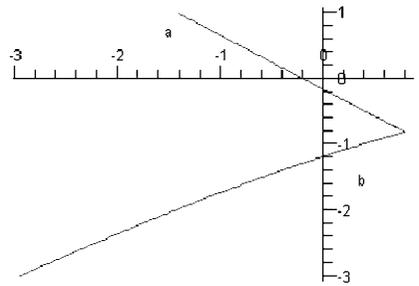


图1 $\tau=1, \alpha=0.2$ 时, 方程(3)零解的稳定性边界曲线

Fig.1 Borderline curve of Stability of equilibrium for Eq(3) with $\tau=1, \alpha=0.2$

1.3 $\tau < 1$ 时参数 a, b 的鲁棒 α -稳定性区域

对于 $\tau \leq 1$, 我们将证明: $F(a, b, \tau)$ 对 τ 是递减函数

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = b - \alpha e^{-\alpha\tau}\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2} +$$

$$e^{-\alpha\tau} \frac{\arccosp \frac{-1}{\sqrt{1-p^2}} p' + \tau(a+\alpha)^2}{\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2}}$$

这里 $p' = \alpha \frac{a+\alpha}{b} e^{-\alpha\tau}$, 结合(11)式、(12)式, 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} &\leq b + e^{-\alpha\tau} \frac{\tau(1-\alpha\tau)(a+\alpha)^2}{\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2}} - \\ &\frac{\alpha \arccosp(1+\arccosp)}{\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2}} e^{-\alpha\tau} \leq b + \\ &e^{-\alpha\tau} \frac{\tau(a+\alpha)^2}{\sqrt{(a+\alpha)^2\tau^2}} - \Omega = b \pm (a+\alpha)e^{-\alpha\tau} - \Omega < 0. \end{aligned}$$

$$\text{这里 } \Omega = \frac{\alpha \arccosp(1+\arccosp)}{\sqrt{(\arccosp)^2 + (a+\alpha)^2\tau^2}} e^{-\alpha\tau} > 0.$$

因此函数 $F(a, b, \tau)$ 对于 $\tau \leq 1$ 时为递减函数, 即当 $\tau < 1$ 时, 成立下列不等式

$$F(a, b, \tau) > F(a, b, 1)$$

就是说当 $\tau < 1$ 时, 满足 $F(a, b, 1) > 0$ 的点必满足 $F(a, b, \tau) > 0$; 另一方面, 直线 $g(a, b, \tau) = ((a +$

$\alpha)e^{-\alpha\tau} + b)\tau = 0$ 总通过点 $a = -\alpha = -0.2$, 其斜率为 $-e^{-0.2\tau} < 0$. 故 1.2 部分所得鲁棒区间: $a \times b = (-\infty, -0.2) \times (-1.286, 0)$ 必满足 $g(a, b, \tau) < 0$. 所以由命题 1 可得方程(3)零解的鲁棒 α -稳定性区间为:

$$\tau \in [0, 1], a \times b = (-\infty, -0.2) \times (-1.286, 0)$$

2 利用 Lambert W 函数分析稳定性区域

2.1 Lambert W 函数及其基本性质

定义 1 Lambert W 函数 $W = W(z)$ 定义为 $we^w = z$ 的解, 这里 $W: C \rightarrow C$, W 将 Z 平面映射到 W 平面.

Lambert W 是一个多值函数, 它有无穷多个分支, 记为 $W_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

其中在原点解析的唯一分支 W_0 被称为主支. Lambert W 函数的详细讨论可参见文献[9,10], 下面介绍 Lambert W 函数的一个重要性质.

引理 1^[9] 记 $\text{Re}z(z)$ 为复数 z 的实部, 则对于任意的 $z \in C$, 有

$$\max_{k=0, \pm 1, \dots, \pm \infty} \{ \text{Re}(W_k(z)) \} = \text{Re}(W_0(z)).$$

对于一阶复时滞微分方程

$$z'(t) = pz(t) + qz(t - \tau), p, q \in C \quad (13)$$

由引理 1, 可得到如下稳定性判据

命题 2 方程(13)零解渐近稳定的充要条件是

$$\text{Re}[\lambda] = \frac{1}{\tau} \text{Re}[W_0(\tau q e^{-p\tau})] + \text{Re}[p] < 0,$$

其中 $W_0(z)$ 是 Lambert W 函数的主支.

应用这个判据, 容易得到如下 α -稳定性判据. 考察实系数时滞微分方程(3), 则可得

命题 3 方程(3)的零解为 α -稳定的充要条件是

$$\text{Re}(s) = \frac{1}{\tau} \text{Re}[W_0(b\tau e^{-\alpha\tau})] + a + \alpha < 0,$$

这里 $s = \lambda + \alpha, \alpha > 0, \lambda$ 为 $\lambda - a - be^{-\lambda\tau} = 0$ 的根.

如果 a, b, τ, α 的值都给出, 则利用数学软件 Maple 等容易检验这个稳定性条件是否成立. 当 a, b, τ 是待定参数时, 我们可以找到一个区域, 在其上方程(3)的零解都是 α -稳定的.

事实上, 令 $\text{Re}(s) = h(a, b, \tau)$, 则得方程

$$h(a, b, \tau) = \frac{1}{\tau} \text{Re}[W_0(b\tau e^{-\alpha\tau})] + a + \alpha = 0 \quad (14)$$

由 Lambert $W(z)$ 函数的性质可知 $h(a, b, \tau)$ 关于 a, b 是连续的^[10], 因此在由曲线 $h = h(a, b, \tau) = 0$

画出的其两侧(或内外)应分别满足 $h > 0$ 和 $h < 0$. 在 $h < 0$ 的一侧, 方程零解是 α -稳定的.

以 $\tau = 1, 0.5, 0.2$ 为例, 在 (a, b) 平面上画出 $h(a, b, \tau) = 0$ 图像, 即为横倒的 V 字形, 见下列图 2-4; 并且左侧满足 $\text{Re}(s) < 0$.

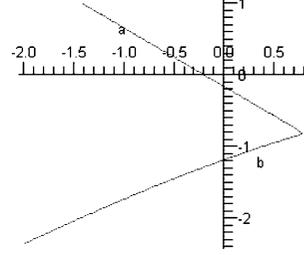


图 2 $\tau = 1, h(a, b, \tau) = 0$

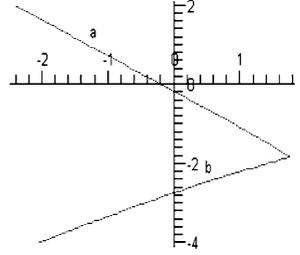


图 3 $\tau = 0.5, h(a, b, \tau) = 0$

Fig. 2 $\tau = 1, h(a, b, \tau) = 0$

Fig. 3 $\tau = 0.5, h(a, b, \tau) = 0$

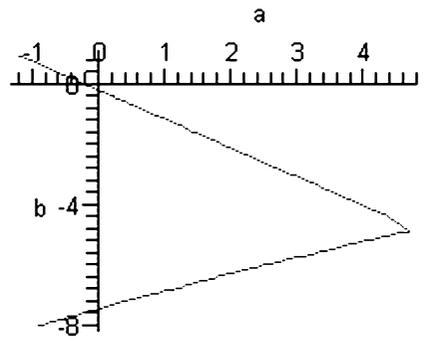


图 4 $\tau = 0.2, h(a, b, \tau) = 0$

Fig. 4 $\tau = 0.2, h(a, b, \tau) = 0$

可以看出: 随着 τ 取值越来越小, 曲线向左端的开口越来越大. 为说明这一点, 令 $a = 0$, 取 $\alpha = 0.2$ 代入(14)式得下列方程

$$\frac{1}{\tau} \text{Re}(W_0(b\tau)) + \alpha = 0 \quad (15)$$

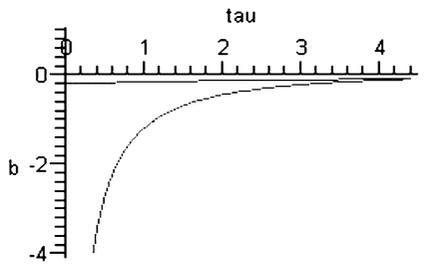


图 5 $a = 0, \alpha = 0.2$ 时, τ 与 b 的关系曲线

Fig. 5 The plot of τ vs b with $a = 0, \alpha = 0.2$

即得图 5. 从中可得(14)式的曲线在 b 轴上两交点的跨度随着 τ 的减小而增大, 并且靠近原点的交点集中在 -0.165 到 -0.2 之间, 而下端的交点随 τ 减小无限增大.

另一方面方程(14)的曲线总通过横轴点 $a =$

$-\alpha = -0.2$, 因为 $b = 0$ 时, $W_0(0) = 0$ (参见文 [11]). 我们把 $\tau = 1, a = -0.2$ 代入(11)式, 计算得另一值 $b = -1.286$.

因此我们有结论: 当 $b \leq 0$ 且 $a < -0.2$ 而 $\tau = 1$ 时, 曲线 $h(a, b, 1) = 0$ 的左侧区域同时也落在当 $\tau < 1$ 时曲线 $h(a, b, \tau) = 0$ 的左侧. 如图 6 所示, 该区域对所有 $\tau \leq 1$ 都满足 $\text{Re}(s) < 0$. 由此可得, 方程(3)零解的 α -稳定性可取如下鲁棒稳定性区间为:

$$\tau \in [0, 1], a \times b = (-\infty, -0.2) \times (-1.286, 0)$$

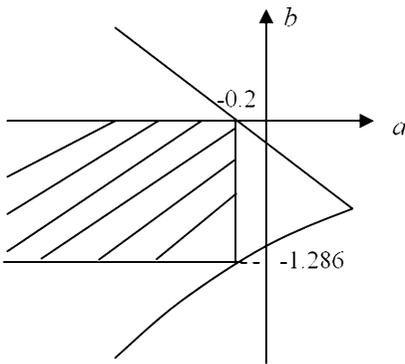


图 6 $\alpha = 0.2$ 时, 阴影图形即为方程(3)零解的 α -稳定性区域

Fig. 6 The shadow of the figure is the α -stability region of the trivial solution of Eq(3) for $\alpha = 0.2$

2.2 鲁棒 α -稳定性的进一步验证

由上可知, 为判别方程(3)零解的 α -稳定性区域, 分别采用 Hayes 定理和 Lambert W 函数法, 可得到相同的稳定性区间. 而 $\alpha = 0.2$ 时, 对曲线 $h(a, b, 1) = 0$ 和曲线 $F(a, b, 1) = 0, g(a, b, 1) = 0$ 同时作图, 如图 7; 即 Hayes 定理所得 α -稳定性区域的边界与由 Lambert W 函数法所得 α -稳定性区域的边界曲线完全重合. 这从另一方面也验证了我们所取得结果是有效的.

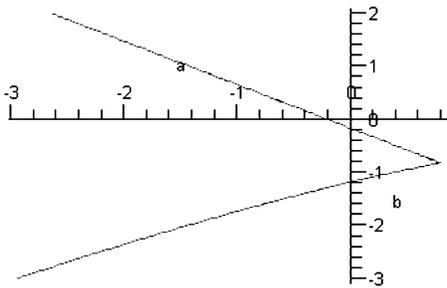


图 7 $\alpha = 0.2, \tau = 1$ 时, 图 1 与图 6 的两支曲线完全重合

Fig. 7 The curves of figure 1 and figure 6 are concurrent completely for $\alpha = 0.2, \tau = 1$

下列图 8-10 反映了参数 a, b, τ 在稳定性区间内外的不同取值时 $x = 0$ 的时间历程图. 从中可

看出在鲁棒稳定性区间内零解的快速收敛特点; 图 8 为 α -稳定, 图 9 稳定但非 α -稳定, 图 10 对应的零解不稳定.

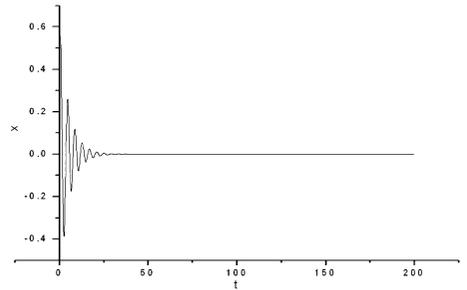


图 8 $\tau = 1, a = -0.2, b = -1.26$ 时 $x = 0$ 的时间历程图

Fig. 8 Times histories of $x = 0$ with $\tau = 1, a = -0.2, b = -1.26$

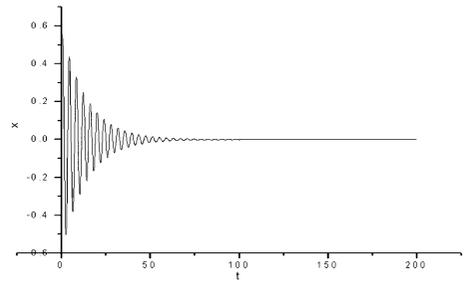


图 9 $\tau = 1, a = -0.2, b = -1.5$ 时 $x = 0$ 的时间历程图

Fig. 9 Times histories of $x = 0$ with $\tau = 1, a = -0.2, b = -1.5$

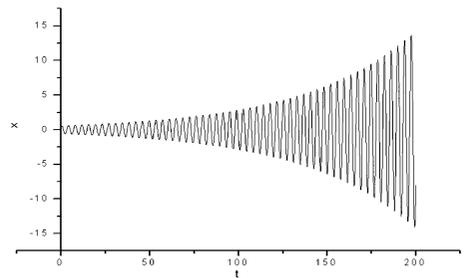


图 10 $\tau = 1, a = -0.2, b = -1.7$ 时 $x = 0$ 的时间历程图

Fig. 10 Times histories of $x = 0$ with $\tau = 1, a = -0.2, b = -1.7$

3 结论

上述讨论了 α -稳定性的鲁棒区间问题, 分别采用 Hayes 定理和 Lambert W 函数法这两个工具得到相同的结果. 值得一提的是 Lambert W 函数法近年来在时滞系统的稳定性理论中越来越多地得到应用, 本文的讨论和应用体现了它对函数图形处理的优越性. 另一方面, 稳定性的鲁棒性问题既是稳定性理论中的难点, 又是实际应用中具有特别重要价值的问题; 如文献 [9] 及 [12] 也是采用 Lambert W 函数分别讨论了某类一阶时滞系统的鲁棒稳定性. 从本文以及文献 [9, 12] 中可看到 Lambert W 函

数法对时滞系统鲁棒稳定性理论的研究有着其重要的价值. 因此我们指出: 对于非一阶时滞微分方程稳定性讨论中如何利用 Lambert W 函数法是值得进一步研究和探讨的重大问题.

参 考 文 献

- 1 Hu H Y, Wang Z H. Dynamics of controlled mechanical systems with delayed feedback. Berlin: Springer-Verlag, 2002
- 2 Huang L. Fundamentals of stability and robustness. Beijing: Science Press, 2003
- 3 Wang Z H, Hu H Y, Wang H L. Robust stabilization to non-linear delayed systems via delayed state feedback: the averaging method. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 279: 937 ~ 953
- 4 狄成宽. 时滞动力系统的 α -稳定性分析. 南京工程学院学报(自然科学版), 2008, 3: 1 ~ 4 (Di C K . Analysis for stability of delay differential equations . *Journal of Nanjing Institute of Technology*, 2008 , 6(3) : 1 ~ 6 (in Chinese))
- 5 Mori T, Noldus E, Kuwahara M. A way to stabilize linear systems with decayed state . *Automatica*, 1983, 19: 571 ~ 572
- 6 Mori T, Fukuma M, Kuwahara M. On an estimate of the decay rate for stable linear delay Systems. *Int. J. Control*, 1982, 36: 95
- 7 Beretta E, Kuang Y. Geometric stability switches criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. *SIAM. J. Math. Anal.*, 2002, 33: 1144 ~ 1165
- 8 秦元勋, 刘永清, 王联, 郑祖麻. 带有时滞的动力系统的运动稳定性(第二版). 北京: 科学出版社, 1989 (Qin Y X , Liu Y Q , Wang L , Zheng Z X . Stability of motion of dynamical systems with delay (2 nd edition) . Beijing: Science Press , 1989 (in Chinese))
- 9 Shinozaki H, Mori T. Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function; Some extreme point results. *Automatica*, 2006, 42: 1791 ~ 1799
- 10 Hwang C, Cheng Y C. A note on the use of the Lambert W function in the stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 2005, 41: 1979 ~ 1985
- 11 Stephen G, Kuang Y. A stage structured predator-prey model and its dependence on maturation delay and death rate. *Math. Biol.*, 2004, 49: 188 ~ 200
- 12 王京祥, 王在华. 时滞状态反馈控制系统的稳定性增益区域. 动力学与控制学报, 2008, 6(4): 301 ~ 306 (Wang J X , Wang Z H . Stable region of the feedback gains in a controlled system with delayed feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2008 , 6(4) : 301 ~ 306 (in Chinese))

ANALYSIS FOR ROBUST α -STABILITY OF ONE ORDER DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Di Chengkuan

(Nanjing Institute of Technology Institute of Applied Mathematics, Nanjing 211167, China)

Abstract The robust α -stability of first order retarded time-delay system was studied, in which the time-delay system is α -stability for all coefficients selected arbitrarily in the interval. Two ways were given for the α -stability analysis, one was based on Hayes Theorem, and the other was based on the Lambert W function. We have the same results by using these two ways respectively. Finally, some examples show that the methods work effectively.

Key words time-delay, α -stability, robust stability, stable region, lambert W function