

混沌的 Liénard 系统的鲁棒同步及应用*

苑学梅 陈博文 魏杰 马茜

(军事交通学院基础部,天津 300161)

摘要 应用非线性系统的自适应控制技术 & 非自治动力系统的稳定性理论,给出了具有外界干扰的二阶混沌的 Liénard 系统的鲁棒同步的充分条件,并将所获结果应用到控制混沌的 Duffing 振子. 最后,计算机数值模拟表明了所获理论结果的正确性及控制方法的有效性.

关键词 混沌 Liénard 方程, 鲁棒同步, 自适应控制

引言

混沌同步的研究是非线性科学中相当活跃的领域之一,已广泛应用于保密通讯、密码学、脑科学、神经网络及系统工程等众多领域中. 近些年来,混沌同步的方法不断涌现,如自适应控制方法,线性 & 非线性反馈控制方法,线性与非线性耦合同步,脉冲控制方法等^[1-6]. 自适应控制方法是当系统的动力学特性发生变化时,系统能自动校正控制器参数.

近年来,人们不断关注具有强迫项的混沌的 Liénard 方程,比如著名的 VanDer Pol 振子:

$$\ddot{x} + p(x^2 - 1)\dot{x} + p_1x = q\cos(\omega t)$$

这里 p 是阻力系数, p_1 是弹性系数, q 和 ω 是外部激励的振幅和频率. 上世纪 40 年代,这个方程就引起人们的关注,随后发现这个方程当其参数在一定的区域内连续变化时,它的解经历一系列倍周期分叉过程而通向混沌^[7].

非自治系统的稳定性理论与一般的稳定性理论不同,它不需要 Liapunov 函数 $V(t, x)$ 是正定的,只要有下界就可以了,且 V 不需要满足 $V(t, 0) = 0$. 本文应用理论及非线性系统的自适应控制技术^[8],来控制一类非自治的具有混沌特征的 Liénard 系统,并将所获结果应用到控制混沌的 Duffing 振子. 通过计算机数值模拟表明了所获理论结果的正确性及控制方法的有效性.

1 问题的提出

考虑一般的具有混沌特征的 Liénard 系统,这

个系统由如下微分方程描述:

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t) \tag{1}$$

这里是 $f(x), g(x)$ 定义在 $R = (-\infty, +\infty)$ 上的连续实函数, $e(t)$ 是定义在 $R^+ = [0, \infty)$ 上的连续实函数,或写成等价方程组的形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + e(t) \end{cases} \tag{2}$$

其中 $F(x) = \int_0^x f(u)du$, 这里我们考虑的是具有混沌特征的 Liénard 系统,由一般混沌子系统的耗散性,因而我们假设 $F(x), g(x)$ 满足 Lipschitz 条件,即

$$|F(x_2) - F(x_1)| \leq l_F |x_2 - x_1|,$$

$$|g(x_2) - g(x_1)| \leq l_g |x_2 - x_1|$$

其中 Lipschitz 常数 $l_F > 0, l_g > 0$.

在实际生活中,混沌行为会受到各种外界干扰,如噪音干扰,气候影响,环境污染等,这样我们就需要控制受到干扰的混沌行为达到我们预期的目标. 所以这里我们的主要目的是通过设计合适的控制器,使得系统(2)在具有外界干扰时的轨道与系统(2)的混沌轨道达到同步.

让 $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 是作为驱动系统的一条混沌轨道,它满足

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} - F(\bar{x}) \\ \dot{\bar{y}} = -g(\bar{x}) + e(t) \end{cases} \tag{3}$$

系统(2)具有外界干扰的混沌系统,可描述为如下形式:

2009-10-06 收到第 1 稿,2009-11-29 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10871196)

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) \\ \dot{y} = -g(x) + e(t) + \delta(t) \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\delta(t)$ 为外界干扰^[9], 是定义在 $R^+ = [0, \infty)$ 上的连续实函数, 满足 $\int_0^{+\infty} |\delta(t)| dt < +\infty$. 现在我们考虑(3)作为接收器, 并且设计一个适合的控制器 $U(t, x, y) = (u_1(t), u_2(t))^T$ 来驱动系统(4)和(3)的同步. 对方程组(4)添加控制器, 得到如下具有控制项的响应方程

$$\begin{cases} \dot{x} = y - F(x) + u_1 \\ \dot{y} = -g(x) + e(t) + \delta(t) + u_2 \end{cases} \quad (5)$$

我们称(3)为驱动系统, 而(5)为控制的响应系统, 由(5)减去(3), 得到误差系统方程

$$\begin{cases} \dot{e} = e_2 - (F(x) - F(\bar{x})) + u_1 \\ \dot{e} = -(g(x) - g(\bar{x})) + \delta(t) + u_2 \end{cases} \quad (6)$$

其中 $e_1 = x - \bar{x}$, $e_2 = y - \bar{y}$ 则响应系统(5)与驱动系统(3)的鲁棒同步问题就是误差系统(6)的零解是稳定的问题.

2 主要结果

需要用到的定义和引理如下

定义 称 $V(t, x)$ 是非自治系统

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), f \in C(G = I \times D^* \subseteq R \times R^n, R^n) \quad (7)$$

Liapunov 的函数, 如果 $V(t, x)$ 连续 ($(t, x) \in [0, \infty) \times D^*$), 满足局部的 Lipschitzian 条件, 且满足

(i) 给定的 $x \in \bar{D}$, 存在 x 的邻域 N , 使得在 $\{(t, x) | t \geq 0, x \in N \cap D\}$ 上 $V(t, x)$ 有下界.

(ii) 存在 \bar{D} 上的连续函数 $W(x) \geq 0$, 对所有 $t \geq 0$ 和 $x \in D$, 有 $\dot{V}(t, x) \leq -W(x) \leq 0$ 成立.

这里假设 $D \subseteq R^n$, D^* 是 R^n 的开子集, 且 $\bar{D} \subseteq D^*$, 其中 \bar{D} 是 D 的闭包.

记 $E = \{x | W(x) = 0, x \in \bar{D}\}$, $E_\infty = E \cup \{\infty\}$.

引理 1^[10] 设 $V(t, x)$ 是系统(7)在 D 上的 Liapunov 函数, $x(t)$ 是方程(7)的一个解, 当 $0 \leq t_0 \leq t < \omega$ 时, $x(t)$ 停留在 D 中, 其中 $[t_0, \omega)$ 是 $x(t)$ 的最大定义区间. 如果 $W(x(t))$ 在 $[t_0, \omega)$ 上绝对连续, 它的导数几乎处处有上界(或下界). 若 $\omega = \infty$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x(t) \rightarrow E_\infty$.

注 引理 1 关于非自治系统的稳定性定理与一般的稳定性定理主要的不同是: 引理 1 中不需要 Liapunov

函数 V 是正定的, 只要 V 有下界就可以, 而且 V 不需要满足 $V(t, 0) = 0$.

下面我们给出适合的控制器 $U(t, x, y) = (u_1(t), u_2(t))^T$, 来驱动响应系统(5)与驱动系统(3)达到同步.

定理 在误差系统方程(6)中, 取 u_1, u_2 为 $\{u_1 = k_1 e_1, u_2 = k_2 e_2\}$, 修正律为

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = -\gamma_1 e_1^2 \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \\ \dot{k}_2 = -\gamma_2 e_2^2 \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \end{cases}$$

其中常数 $\gamma_i > 0, i = 1, 2$. 取 $L_i > 0 (i = 1, 2)$ 满足条件

$$\begin{cases} L_i > l_F \\ 4L_2(L_1 - l_F) > (1 + l_g)^2 \end{cases} \quad (8)$$

则响应系统(5)与驱动系统(3)达到鲁棒同步.

证明 如果选取 Liapunov 函数为:

$$\begin{aligned} V(t, e_1, e_2) &= \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + \\ & 2) \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} (k_i + L_i)^2. \end{aligned}$$

它沿着误差系统(6)的全导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= (e_1 \dot{e}_1 + e_2 \dot{e}_2) \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) + \frac{1}{2}(e_1^2 + \\ & e_2^2 + 2) \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) (-|\delta(s)|) + \\ & \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\gamma_i} (k_i + L_i) \dot{k}_i = \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \times \\ & \{ [e_1 e_2 - e_1(F(x) - F(\bar{x})) + k_1 e_1^2] + \\ & [-e_2(g(x) - g(\bar{x})) + e_2 \delta(t) + k_2 e_2^2] + \\ & \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + 2)(-|\delta(s)|) - \sum_{i=1}^2 (k_i + \\ & L_i) e_i^2 \} \leq \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) [e_1 e_2 + l_F e_1^2 + \\ & k_1 e_1^2 + l_g |e_1| |e_2| + |e_2| |\delta(t)| + k_2 e_2^2 - \\ & \frac{1}{2} |\delta(t)| e_1^2 + \frac{1}{2}(e_2^2 + 2)(-|\delta(s)|) - \\ & (k_1 + L_1) e_1^2 - (k_2 + L_2) e_2^2] \leq \\ & \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) [(l_F - L_1) e_1^2 + (1 + \\ & l_g) |e_1| |e_2| - L_2 e_2^2 - \frac{1}{2} |\delta(t)| (e_2^2 - \end{aligned}$$

$$2|e_2^2| + 2) = \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \{ (L_F - L_1)e_1^2 + (1 + l_g)|e_1||e_2| - L_2e_2^2 - [\frac{1}{2}|\delta(t)|(e_2 - 1)^2 + 1] \} \leq \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) [(L_F - L_1)e_1^2 + (1 + l_g)|e_1||e_2| - L_2e_2^2] = \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) (-e^T P e)$$

其中

$$e = (|e_1|, |e_2|)^T, P = \begin{pmatrix} L_1 - l_F & -\frac{1 + l_g}{2} \\ -\frac{1 + l_g}{2} & -L_2 \end{pmatrix}$$

显然 P 正定当且仅当条件(8)成立,从而

$$\dot{V} \leq \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) (-e^T P e) = -W(e_1, e_2) \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \leq 0$$

其中, $W(e_1, e_2) = e^T P e$.

由于 P 是正定的,得 $W(e_1, e_2) \geq 0$. 显然 $W = 0$ 当且仅当 $e_i = 0 (i = 1, 2)$. 所有的 $e_i = 0 (i = 1, 2)$ 意味着 $k_i = 0$, 即 $k_1 = k_{10}, k_2 = k_{20} (k_{10}, k_{20}$ 为 k_1, k_2 的初始值), 从而

$E = \{W = 0\} = \{e_1 = 0, e_2 = 0, k_1 = k_{10}, k_2 = k_{20}\}$, 误差系统(6)具有任何初值的解都是有界的, 又由引理1, 得到误差系统(6)的零解是稳定的, 也就是响应系统(5)与驱动系统(3)达到鲁棒同步. 定理证毕.

3 数值模拟

例 Duffing Oscillator 系统方程^[11]为

$$\ddot{x} + p\dot{x} + p_1x + x^3 = p_2 \cos(\omega t) \tag{9}$$

这里 $p (> 0)$ 是阻力系数, p_1 是弹性系数, p_2 和 ω 是外部激励的振幅和频率.

当方程(9)的参数在一定的区域内连续变化时, 它的解经历一系列倍周期分叉过程而通向混沌.

考虑作变换,

$$y = -\int_0^t (p_1x + x^3 - p_2 \cos(\omega t)) dt$$

得到与(9)等价的方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - px \\ \dot{y} = -(p_1x + x^3) + p_2 \cos(\omega t) \end{cases} \tag{10}$$

当参数 $p = 0.4, p_1 = -1.1, p_2 = 1.8, \omega = 1.8$ 时, 方程(10)的轨道具有一个混沌吸引子如下图1所示

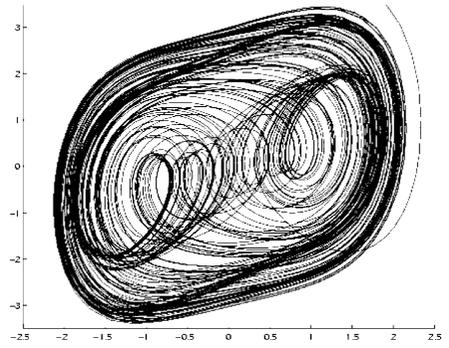


图1 Duffing Oscillator 的混沌行为

Fig.1 Chaotic behavior of the Duffing Oscillator

为了证实所获理论结果的正确性和有效性, 让驱动系统的输出信号来自系统(10), 具有控制器的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{y} - p(\bar{x}) + k_1 e_1 \\ \dot{\bar{y}} = -(p_1 \bar{x} + \bar{x}^3) + p_2 \cos(\omega t) + \delta(t) + k_2 e_2 \end{cases} \tag{11}$$

这里 $\delta(t) = \frac{1}{1+t^2}$, 取修正律为:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = (-0.01)e_1^2 \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \\ \dot{k}_2 = (-0.01)e_2^2 \exp(-\int_0^t |\delta(s)| ds) \end{cases}$$

得到驱动系统(10)与响应系统(11)的同步图如下图2所示(时间单位:秒)

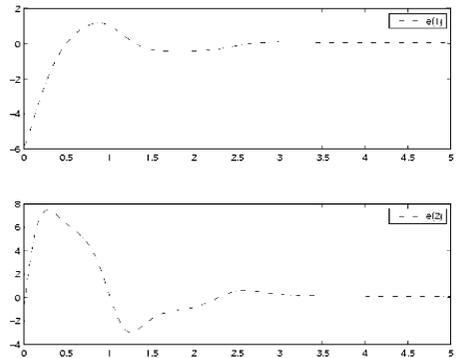


图2 自适应控制下的同步误差

Fig.2 The synchronization errors of adaptive control

4 结论

具有外界干扰的二阶混沌的 Liénard 系统能够代表一类混沌系统, 本文应用非线性系统的自适应

控制技术 & 非自治动力系统的稳定性理论给出了该一般系统的鲁棒同步的充分条件,并将所获结果应用到控制混沌的 Duffing 振子. 数值模拟表明了所获理论结果的正确性及控制方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 王光瑞,于熙龄,陈式刚. 混沌的控制、同步与利用. 国防工业出版社, 2001, 190 ~ 198 (Wang guangrui, Yu xiling, Chen shigang. Chaos control, synchronization and application. National Defense Industry Press, 2001, 190 ~ 198 (in Chinese))
- 2 Wang Y W, Guan Z H, Wang H O. Feedback and adaptive control for the synchronization of Chen system via a single variable. *Phys. Lett. A*, 2003, 312: 34 ~ 40
- 3 Park Ju H. Adaptive synchronization of hyperchaotic Chen system with uncertain parameters. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 26: 959 ~ 964
- 4 Zhou J, Chen T P, Xiang L. Robust synchronization of delayed neural networks based on adaptive control and parameters identification. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 27: 905 ~ 913
- 5 贾贞,邓光明. 超混沌 Lü 系统的线性与非线性耦合同步. 动力学与控制学报, 2007, 5 (3): 220 ~ 223 (Jia zhen, Deng guangming. Linearly and nonlinearly coupled synchronization of hyperchaotic Lü systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5 (3): 220 ~ 223 (in Chinese))
- 6 Sun J T. Impulsive control of a new chaotic system. *Math. and Comp. in Simu.*, 2004, 64: 669 ~ 677
- 7 Chen G, Ed Boca Raton. Controlling chaos and bifurcations in engineering systems. FL: CRC Press, 1999
- 8 Wei P L. 应用非线性控制(英文版). 机械工业出版社, 2004 (Wei P L. Applied nonlinear control. China Machine Press, 2004 (in Chinese))
- 9 Zhou J. Boundedness and convergence of solutions of a second-order nonlinear differential system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2001, 256: 360 ~ 374
- 10 LaSalle J P. Stability theory for ordinary differential equations. *Journal of Differential Equations*, 1968, 4: 57 ~ 65
- 11 周进. 两类重要非线性模型的动力学行为的研究. 上海大学博士学位论文, 2003 (Zhou jin. Research on dynamical behaviour of two important nonlinear models. Dissertation for the Doctoral Degree, Shanghai University, 2003 (in Chinese))

ROBUST CONTROL SYNCHRONIZATION AND APPLICATION OF CHAOTIC LIÉNARD SYSTEMS*

Yuan Xuemei Chen Bowen Wei Jie Ma Qian

(General Courses Department, Academy of Military Transportation, Tianjin 300161, China)

Abstract By using the adaptive control technique on the nonlinear systems and the stability theory on the non-autonomous dynamical systems, the sufficient condition for robust synchronization of the second-order chaotic Liénard equations with external disturbance was derived. Moreover, the obtained results were applied to control the chaotic Duffing Oscillators. Finally, the numerical simulations were presented to demonstrate the effectiveness and feasibility of the proposed control techniques.

Key words chaotic Liénard equations, robust synchronization, adaptive control