第 8 卷第 2 期 2010 年 6 月
1672-6553/2010/08(2)/119-4

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 8 No. 2
Jun. 2010

Wick 类型的随机广义 Kdv 方程的精确解*

那顺布和

(广东水利电力职业技术学院,广州 510635)

摘要 在 Kondratiev 分布空间$(S)^{-1}$中通过埃尔米特变换和 Painleve′分析导出了 Wick – 类型的随机广义 Kdv 方程的 Bäcklund 变换,并且把 Wick – 类型的随机广义 Kdv 方程变成广义系数 Kdv – 方程,再利用 Bäcklund 变换求出广义系数 Kdv 方程的精确解,最后通过埃尔米特逆变换求出随机广义 Kdv 方程在系数取不同白色噪音泛函条件下的精确解.

关键词 Wick – 类型随机广义 Kdv 方程, 随机精确解, 白色噪音, Bäcklund 变换, 埃尔米特变换

引言

自从 Wadati 引入并研究随机 Kdv 方程以来,变系数 Kdv 方程的研究越来越引起了很多数学家和物理学家的高度关注,已有许多文献报道了相关的研究成果[1-4]. 然而, 实际上,波也像分子运动一样受到周围各方面的影响. 因此,在随机环境下研究非线性发展方程解的更具有实际的物理意义. 从而随机波是随机非线性发展方程的 一个重要课题,当前已经有许多从事随机 Kdv 方程的研究[4-6]. 在文献[4]中 Holden 等给出了用白色噪音泛函来研究 Wick 形式的随机偏微分方程.

本文将用白色噪音分析方法和 Painleve′方法给出了 Wick – 类型的随机广义 Kdv 方程的随机精确解,其形式如下:

$$U_t + H_1(t)xU_{xxx} + 6UU_x + H_2(t)U + U_{xxx} = 0 \tag{1}$$

其中,$H_1(t)$,$H_2(t)$是白色噪音泛函,◇是 Hida 分布空间上的 Wick 乘(见文献[4]).

1 Painleve′分析

下面利用文献[4]给出的理论和方法求解方程(1)的精确解. 首先对方程(1)取埃尔米特变换得

$$\tilde{U}_t + \tilde{H}_1(t)x\tilde{U}_{xxx} + 6\tilde{U}\tilde{U}_x + \tilde{H}_2(t)\tilde{U} + \tilde{U}_{xxx} = 0 \tag{2}$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots)\in(C^N)_c$ 是向量参数. 为了简洁起见:令

$$u=\tilde{U}, H_1(t,z)=\tilde{H}_1, H_2(t,z)=\tilde{H}_2(t,z)$$

方程可以写为:

$$u_t + H_1(t)xu_{xxx} + 6uu_x + H_2(t)u + u_{xxx} = 0 \tag{3}$$

设方程(3)有解:

$$u=u(t,x,z)=\phi(x,t,z)\sum_{j=0}^{\infty}u_j(t,z)\phi_j(x,t,z),$$
$$\phi(x,t,z)=x+\varphi(t,z) \tag{4}$$

展开式(4)代入方程(3)并整理 ϕ 的各次幂的系数并令为零,可以决定 p 的值以及关于 u_j 的递推关系性质要求 p 是一个负整数,同时相容条件成立.

我们将方程(3)改写为以下的形式:

$$u_t + H_1(t,z)(x+\varphi)u_x - H_1(t,z)\varphi u_x + 6uu_x + H_2(t)u + u_{xxx} = 0 \tag{5}$$

对方程(5)进行主项分析得到:

$$p=-2, u_0=-2 \tag{6}$$

将展开式(4)代入方程(5)可得关于 u_j 的递推关系如下:

$$(j+1)(j-4)(j-6)u_j = F_j$$

其中

$$F_j = -[u_{j-3,t} + (j-4)u_{j-2}\varphi_i + H_1(j-5)u_{j-3} - H_1(j-4)\varphi u_{j-2} + 6\sum_{k=1}^{j-1}(k-2)u_k u_{j-k} + H_2 u_{j-3}]$$

$j\geq 0$ (定义当 $j<0$ 时 $u_j=0$). 从(7)可看出,当 $j=-1,4,6$ 时,u_j 不能确定. 这些 j 值称为递推关系的"共振"值,对应地在展开式中可以引入任意函数. $j=-1$ 对应于函数 $\varphi(t,z)$ 的任意性,因此在 $j=4$ 和 $j=6$ 处存在两个相容条件. 由(6),(7)经符号计算可得:

2009-09-13 收到第 1 稿,2010-01-14 收到修改稿.
* 广东省自然科学基金资助项目((8451063502000019)

$$j=1:u_1=0 \tag{7}$$

$$j=2:u_2=-\frac{1}{6}(\varphi_t-H_1\varphi) \tag{8}$$

$$j=3:u_3=\frac{1}{6}(H_2-2H_1) \tag{9}$$

$$j=4:u_4=(u_{1,t}-H_1u_1+2H_2u_1) \tag{10}$$

$$j=5:u_5=\frac{1}{6}(u_{2,t}+u_3\varphi_t-H_1\varphi u_3+H_2u_2) \tag{11}$$

$$j=6:u_6=-[u_{3,t}+2u_4\varphi_t+(H_1+H_2)u_3-2H_1\varphi u_4+6(u_3^2+2u_2u_4+2u_5u_4)] \tag{12}$$

由(8),易知 $j=4$ 时相容条件成立 将(8)-(10)代入(12)可得在 $j=6$ 时相容条件

$$(H_2-2H_1)'+3H_1(H_2-2H_1)+2(H_2-2H_1)^2=0 \tag{13}$$

上式给出方程(1)具有 Painleve′性质时函数 H_1,H_2 需要满足的条件, 解方程(13)可得两个解

$$H_1=2H_2 \tag{14}$$

$$H_1=2H_2+\frac{\exp(-2\int^t H_1(s,t)\mathrm{d}s)}{a+2\int^t(\exp-3\int^s H_1(\tau,z)\mathrm{d}\tau)} \tag{15}$$

其中 a 积分常数我们得到如下结论,如果函数 H_1, H_2 满足约束条件(15)或(16). 则方程(1)具有 Painleve′性质或通过 Painleve′实验.

2 自 Bäcklund 变换

变换是联系两个偏微分方程解的变换,通过已知的解可以求另一个方程的解. 如果是联系同一个方程的两个解,则称为该方程的自 变换. 本节将利用截断法和符号计算求(1)的 Bäcklund 变换,并由此变换给出方程(1)的两组解.

为了求方程(1)的 Bäcklund 变换,这里我们用普通形式的 $\phi(x,t,z)$ 而不是展开式(4)中的特殊形式 $\phi(x,t,z)=x+\phi(x,t)$. 根据主项分析,可得到方程(1)在常数水平的 Painleve′截断

$$u=u(t,x,z)=\phi^2(x,t,z)\sum_{j=0}^{2}u_i(t,z)\phi(x,t,z)=u_0(t,x,z)\phi^2(x,t,z)+u_1(x,t,z)\phi^1(x,t,z)+u_2(x,t,z) \tag{16}$$

将式(16)代入方程(1),通过符号计算并令 ϕ 的各次幂系数为零可得:

$$\phi^5:u_0=-2\phi_x^2 \tag{17}$$

$$\phi^4:u_1=2\phi_{xx} \tag{18}$$

$$\phi^3:\phi_x(\phi_t\phi_x+H_1x\phi_x+6u_2\phi_x+4\phi_x\phi_{xxx}-3\phi_{xx})=0 \tag{19}$$

$$\phi^2:\phi_x(\phi_{xt}\phi_x+H_1x\phi_{xx}-H\phi_x+6u_2\phi_{xx}+\phi_{xxx}+H_2\phi_x)+\frac{\partial}{\partial x}(\phi_x\varphi_t+H_1x\varphi^2+6u_2\phi_x+4\phi_x\phi_{xxx}-3\phi_{xx}^2)=0 \tag{20}$$

$$\phi^1:\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{xt}\phi_x+H_1x\phi_{xx}-H\phi_x+6u_2\phi_{xx}+\phi_{xxx}+H_2\phi_x)=0 \tag{21}$$

$$\phi^0:u_{2,t}+H_1xu_{2,x}+6u_2u_{2,x}+u_{2,xxx}+H_2\phi_x=0 \tag{22}$$

容易知道只要以下两个等式成立,

$$\phi_t\phi_x+H_1x\phi_x+6u_2\phi_x+4\phi_x\phi_{xxx}-3\phi_{xx}^2=0 \tag{23}$$

$$\phi_{xt}\phi_x+H_1x\phi_{xx}-H\phi_x+6u_2\phi_{xx}+\phi_{xxx}+H_2\phi_x=0 \tag{24}$$

则(19)-(21)恒成立

于是我们得到方程(1)的一个自 Bäcklund 变换

$$u=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln(\phi+u_2) \tag{25}$$

其中 $\phi(x,t,z)$ 满足方程(23)和(24),并且 $u_2(x,t,z)$ 是方程的(1)的一个解,根据 Bäcklund 变换(25),通过选取不同的 $\phi(x,t,z)$,$u_2(x,t,z)$. 可以求得方程(1)的各种不同的精确解.

例如,取 $u_2(x,t,z)=c_1(-\int_0^t H_2(s,z)\mathrm{d}s)$,它显然是方程的(1)的一个解. 令 $\phi(x,t,z)$ 具有如下形式:

$$\phi(x,t,z)=A(t,z)x+B(t,z) \tag{26}$$

将(26)代入方程(24),(25)可求得 $A(t,z)$,$B(t,z)$ 分别为

$$A(t,z)=c_1\exp(-\int_0^t H_2(s,z)\mathrm{d}s),b(t,z)=-6c_1c_2\int^t\exp(-3\int_0^t H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+c_3 \tag{27}$$

其中 $c_1,c_2\neq 0,c_3$ 积分常数,并且 H_1,H_2 满足条件

$$H_1=2H_2 \tag{28}$$

这样,我们得到方程(1)的一组有理形式的精确解

$$u(x,t,z)=c_1(-\int_0^t H_{(}s,z)\mathrm{d}s)-\frac{2c_2^2\exp(-2\int_0^t H_1(s,t)\mathrm{d}s)}{[c_2\exp(-\int_0^t H_1(s,t)\mathrm{d}s)x-6c_0c_1\int_0^t(\exp\int_0^s-3H_1(\tau,z)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+c_3]} \tag{29}$$

如果令 $u_2=0$ 及 $\phi(x,t,z)$ 的形式为:

$$\phi(x,t,z)=1+\exp(f(t,z)x+g(t,z)) \quad (30)$$

将(30)代入方程(23),(24),同样可得 $f(t,z)$, $g(t,z)$ 分别为

$$f(t,z)=c_4\exp(-\int_0^t H_1(s,z)\mathrm{d}s),$$

$$g(t,z)=-c_4^2\int^t\exp(-3\int_0^t H_2(\tau,z)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s+c_5 \quad (31)$$

其中 $c_4\neq0$, c_5 积分常数,并且 H_1, H_2 满足条件 $H_1=2H_2$ 这样,我们得到方程(1)的一组精确解:

$$u(x,t,z)=\frac{c_4^2}{2}\exp(-\int_0^t H_1(s,z)\mathrm{d}s)\mathrm{sech}^2\cdot\frac{c_4\exp(-3\int_0^t H_1(s,t)ds)x-c_4^3\int_0^t(\exp(-3\int_0^t H_1(\tau,z)\mathrm{d}\tau)\mathrm{d}s)+c_5}{2} \quad (32)$$

接下来对方程(1)的系数作如下约定:

假设 $H_1=h(t)+a_1W(t)$,其中 $W(t)$ 是高斯白色噪音,它们的埃尔米特变换为

$$H_1=\tilde{H}_1(t,z)=h(t)+a_1\tilde{W}(t,z)$$

这里 a_1 为任意常数,而 $\tilde{W}(t,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^t\eta_k(s)\mathrm{d}sz_k$. 为了得到方程(1)的随机精确解,我们给出两种情况:

1) 如果取 $H_1=h(t)+a_1\dot{B}(t)$ 而 $\dot{B}(t)$ 是布朗运动,它们有 $W(t)=\dot{B}(t)$ 的关系. $h(t)$ 是 R_+ 上的可积函数或有界函数. 又因为 $\exp^{\diamond}\{B(t)\}=\exp\{B(t)-\frac{1}{2}t^2\}$ 参看文献[4]的引理 2.6.16)从而得到方程(1)的随机精确解如下:

$$U(x,t)=c_1(-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-a_1B(t)+\frac{at^2}{2})-$$

$$\frac{2c_2^2\exp(-2\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-2a_1B(t)+a_1t^2)}{[c_2\exp(-\int_0^t h(s,t)\mathrm{d}s-a_1B(t)+\frac{a_1t^2}{2})x-6c_0c_1\int_0^t(\exp\int_0^t-3h(\tau)\mathrm{d}\tau-3a_1B(s)+\frac{3a_1s^2}{2})\mathrm{d}s+c_3]} \quad (33)$$

如果 H_1, H_2 满足条件 $H_1=2H_2$ 这样,我们得到方程(1)的一组精确解

$$U(x,t)=\frac{c_4^2}{2}\exp(-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-a_1B(t)+\frac{at^2}{2})\mathrm{sech}^2\cdot$$

$$\frac{2c_2^2\exp(-2\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-2a_1B(t)+a_1t^2)x-c_4^2\int_0^t\mathrm{esp}(-3\int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau-3a_1B(s)+\frac{3a_1s^2}{2})\mathrm{d}s+c_5}{2} \quad (34)$$

其中 $c_3\neq0$, c_4, c_5 积分常数.

2) 如果取 $H_1=h(t)+a_1\dot{B}(t)$ 而 $\dot{B}(t)$ 是布朗运动,它们有 $W(t)=B(t)\dot{B}(t)$ 的关系. $h(t)$ 是 R_+ 上的可积函数或有界函数.

利用 $\int_0^t B(s)\dot{B}(t)\mathrm{d}s=\exp\{B^2(t)-\frac{1}{2}t\}$ 这时得到方程(1)的随机精确解如下:

$$U(x,t)=c_1(-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-a_1B^2(t)+\frac{at}{2})-$$

$$\frac{2c_2^2\exp(-2\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-2a_1B^2(t)+a_1t)}{[c_2\exp(-\int_0^t h(s,t)\mathrm{d}s-a_1B^2(t)+\frac{a_1t}{2})x-6c_0c_1\int_0^t(\exp\int_0^t-3h(\tau)\mathrm{d}\tau-3a_1B^2(s)+\frac{3a_1s}{2})\mathrm{d}s+c_3]} \quad (35)$$

如果 H_1, H_2 满足条件 $H_1=2H_2$ 这样,我们得到方程(1)的一组精确解

$$U(x,t)=\frac{c_4^2}{2}esp(-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-a_1B^2(t)+\frac{at}{2})\mathrm{sech}^2\cdot$$

$$\frac{2c_2^2\exp(-2\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-2a_1B^2(t)+a_1t)x-c_4^3\int_0^t esp(-3\int_0^s h(\tau)\mathrm{d}\tau-3a_1B^2(s)+\frac{3a_1s}{2})\mathrm{d}s}{2} \quad (36)$$

其中 $c_3 \neq 0, c_4, c_5$ 积分常数.

3 结束语

(1) 本文用埃尔米特变换和 Painleve′法来研究 Wick－类型随机广义 Kdv 方程,得到一些随机精确解,这些方法可以用于求很多类型的随机非线性演化方程的随机精确解,也可以推广应用到更复杂的有物理背景的随机非线性演化方程。另外,这类方程也可以用别的方法进行研究而得到别的随机解.

(2) 在方程(1)中若 Wick-类型乘 ◇变成普通乘积,那么方程(1)则变成变系数广义 Kdv 方程,即

$$u_t + H_1(t) x u_{xxx} + 6 u u_x + H_2(t) u + u_{xxx} = 0$$

其中 $H_i(t)(i=1,2)$是关于 t 的函数.

(3) 在求解过程中发现 Poisson 白色噪音空间与 Wiener 白色噪音空间之间存在单一映射关系, Poisson 随机偏方程的解可以把这一映射映射到高斯随机偏方程的解而求出,这简便精确的连续解是由 Benth 等给出的,可以参见文献[4]的 4.9 节论述.

参 考 文 献

1 Ablowitz M J, Clarkson P A, Solitons, Nonlinear Evolution Equation and Inverse Scattering. Cambridge: Cambridge University Press, 1991

2 楼森岳,阮航宇. 变系数 Kdv 方程各变系数 MKdv 方程的无穷多守衡律. 物理学报, 1992, 41(2): 182 ~ 187 (Lou Senyue, Ruan Hangyu. Servation laws of the variable coefficient Kdv and MKdv equations. *Acta Physica Sinica* , 1992, 41(2): 182 ~ 187(in chinese))

3 Liu X Q. Exact solutions of the variable coefficient Kdv and SG type equations. *Appl. Math. JCU*, 1998, 13B: 25 ~ 30

4 Holden H , øksendal B , Ubøe J, Zhang T. Stochastic partial differential equations. Boston: Birhkäuser, Springer (second edition) , 1996

5 谢元喜,唐驾时. 求一类非线性偏微分方程精确解的简化试探函数法. 动力学与控制学报, 2005, 3(1): 15 ~ 17 (Xie Yuanxi, Tang Jiashi. Ified trial function method for seeking the exact soluotions to a class of nonlinear PDEs. *Joumal of Dynamics and Control*, 2005, 3(1) 15 ~ 17(in chinese))

6 张解放,陈芳跃. 截断展开方法和广义变系数 Kdv 方程的精确类孤子解. 物理学报, 2001, 50(9): 1648 ~ 1650 (Zhang Jiefang , Chen Fangyue. Truncated expansion method and new exact soliton－like solution of the general variable coefficient Kdv equation. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(9): 1648 ~ 1650(in chinese))

EXACT SOLUTIONS FOR WICK-TYPE STOCHASTIC GENERALIZED KDV EQUATION *

Nashun Buhe

(*Guangdong Technical College of Water Resources and Electric Engineering*, *Guangzhou* 510635, *China*)

Abstract By using the Hermite transformation Painleve′ and analysis in Kondratiev distribution space (S^{-1}), a Bäcklund transformation of Wick-type stochastic generalized Kdv equation was derived, and the wick-type stochastic generalized Kdv equation was converted to a kdv equation of generalized coefficient. Then the exact solutions of Kdv-MKdv equation of generalized coefficient were given. Finally the exact solutions of stochastic generalized KdV equations were given on different white noise functional conditions of the coefficient through Hermite inverse transformation.

Key words Wick-type stochastic generalized KdV equation, stochastic exact solution, white noise, Bäcklund transformation, hermite transformation

Received 13 September 2009, revised 14 January 2010.

* The Project Supported by the Natural Science Foundation of Guangdong Province(8451063502000019)