第 8 卷第 2 期 2010 年 6 月
1672-6553/2010/08(2)/100-5
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 8 No. 2
Jun. 2010

Birkhoff 系统 Noether 逆定理的解法

丁光涛

（安徽师范大学物理与电子信息学院，芜湖 241000）

摘要 研究 Birkhoff 系统 Noether 逆定理. 提出对 Birkhoff 系统由已知的守恒量导出 Noether 对称性的一般解法，指出一般解法中的困难. 通过引入守恒量和对称性直接相关的辅助方程，给出逆定理的特殊解法. 举例说明了所得结果的应用.

关键词 Birkhoff 系统， Noether 理论， Noether 逆定理， 守恒量， 对称性

引言

1927 年 Birkhoff 提出一类新型运动方程[1]. 1983 年 Santilli 推广这类方程并建议命名为 Birkhoff 方程[2]. 1996 年梅凤翔等出版专著《Birkhoff 系统动力学》[3]，构建该力学理论的基本框架. 文献[4]及其收录的大量参考文献，系统总结了该领域多方面研究成果，表明了 Birkhoff 力学是经典力学发展新阶段重要标志之一. 1918 年 Noether 提出一个意义重大的对称性理论[5]，近几十年来关于 Noether 理论及其应用的研究是数学力学和物理学中重要的热门课题，成果众多，其中包括 Birkhoff 系统动力学 Noether 对称性理论研究的重要成果[3,4,6-14]，Noether 理论的直接应用是对给定的力学系统确定其对称变换，进而由对称性导出守恒量. 本文深入研究 Birkhoff 系统 Noether 逆定理，即对给定的 Birkhoff 系统由已知的守恒量导出 Noether 对称性的问题，提出了这类问题的一般解法，发展了特殊解法，从而补充了通常的 Noether 逆定理. 利用 Noether 理论能解决由守恒量构造 Birkhoff 函数和函数组问题，本文讨论的逆定理是重要的基础. 由于 Hamilton 系统是 Birkhoff 系统的特殊情况，在一定条件下，后者也可以变换为前者[15,16]，因此，本文结果容易应用到 Hamilton 系统中去. 最后，举例说明了所得结果的应用.

本文讨论中只涉及对称性和准对称性，但不区分两者，而把严格意义下的对称性作为准对称性 $G_N=0$ 的的情况.

2009-07-24 收到第 1 稿，2009-10-16 收到修改稿.

1 Birkhoff 系统 Noether 理论概要

Birkhoff 系统运动微分方程为

$$\left(\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v}\right)\dot{a}^v-\frac{\partial B}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial t}=0\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{1}$$

其中，a^μ 为变量，$B(t,a)$ 为 Birkhoff 函数，$R_\mu(t,a)$ 为 Birkhoff 函数组. 定义 Birkhoff 张量

$$\Omega_{\mu v}=\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^v}\tag{2}$$

如果系统是规则的，即满足下列条件

$$\det(\Omega_{\mu v})\neq 0\tag{3}$$

则由方程(1)可以解出全部 $\dot{a}^\mu$，得到

$$\dot{a}^\mu=\Omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t}\right)\tag{4}$$

其中，$\Omega^{\mu v}$ 为 Birkhoff 逆变张量，且有

$$\Omega^{\mu\rho}\Omega_{\rho v}=\delta^\mu_v\tag{5}$$

取时间 t 和变量 a^μ 的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,a),\quad a^{\mu *}=a^\mu+\varepsilon\xi_\mu(t,a)\tag{6}$$

其中，ε 为无限小参数，ξ_0,ξ_μ 为无限小变换生成元.

如果 Birkhoff 系统满足如下 Noether 等式

$$X^{(1)}(R_v\dot{a}^v-B)+(R_v\dot{a}^v-B)\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0\tag{7}$$

其中，$G_N=G_N(t,a)$ 为规范函数，而

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_\mu\frac{\partial}{\partial a^\mu}+(\dot{\xi}_\mu-\dot{a}^\mu\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial\dot{a}^\mu}\tag{8}$$

则系统这种不变性为 Noether 对称性，由此直接导出 Noether 守恒量

$$I_N = R_\mu \xi_\mu - B\xi_0 + G_N = const. \tag{9}$$

Noether 等式(7)可以等价地表示成

$$(\frac{\partial R_\mu}{\partial t}\dot{a}^\mu - \frac{\partial B}{\partial t})\xi_0 + (\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}\dot{a}^v - \frac{\partial B}{\partial a^\mu})\xi_\mu - \dot{B}\xi_0 + R_\mu \dot{\xi}_\mu + \dot{G}_N = 0 \tag{10}$$

而判断系统 Noether 对称性的另一途径是下列 Killing 方程有解

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_0 + B\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial a^\mu}\xi_\mu - R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} = \frac{\partial G_N}{\partial t}$$

$$R_\mu \frac{\partial \xi_\mu}{\partial a^v} + \frac{\partial R_v}{\partial a^\mu}\xi_\mu + \frac{\partial R_v}{\partial t}\xi_0 - B\frac{\partial \xi_0}{\partial a^v} = -\frac{\partial G_N}{\partial a^v} \tag{11}$$

Birkhoff 系统 Noether 理论将系统动力学特征函数、变量对称变换和运动守恒量三者紧密联系起来，对给定 B 和 R_μ 的系统，利用(7)式((10)式)，或者利用方程(11)，确定对称变换后，再由(9)式直接导出守恒量，即得到运动微分方程(1)的第一积分.

2　Birkhoff 系统 Noether 逆定理的提法和解法

Birkhoff 系统 Noether 逆定理问题的提法：

给定动力学特征函数 $B(t,a)$ 和 $R_\mu(t,a)$ 的 Birkhoff 系统，已知系统第一积分为

$$I = I(t,a) = const. \tag{12}$$

导出系统的 Noether 对称性，使上述第一积分 I 为该系统的 Noether 守恒量.

逆定理问题的一般解法：

令(12)式中第一积分 I 为(9)中守恒量 I_N，得到方程

$$I(t,a) = R_\mu(t,a)\xi_\mu - B(t,a)\xi_0 + G_N \tag{13}$$

ξ_0、ξ_μ 和 G_N 应当满足 Noether 恒等式(7)(或(10))，或应为 Killing 方程(11)的解. 换句话说，求解联立方程(13)和(7)(或(10)，或者求解联立方程(13)和(11)，得到 ξ_0、ξ_μ 和 G_N，即导出了给定 Birkhoff 系统与已知第一积分相应的 Noether 对称性.

应当指出，方程(13)和(7)(或(10))都各是一个方程，而待求的量 ξ_0、ξ_μ 和 G_N 是 $2n+2$ 个，且方程(7)(或(10))中不出现已知的第一积分 I，因此，实际求解联立方程(13)和(7)(或(10))时，往往是在不定方程(13)中引入补充假设以求得多组解，然后再逐一代入(7)式(或(10)式)中检验，满足的为待求的解，不能满足的应当弃去. 方程(11)虽然有 $2n+1$ 个，但全部与 I 无关，因此，实际求解方程(13)和(11)时，也是先解不定方程(13)，再将得到的各组解代入方程(11)检验. 显然，这样的逆定理问题的解法是繁琐的.

因此，应当在上述一般解法基础上研究制定出特殊解法，其核心是以明确程序引进不定方程补充假设，并使第一积分直接进入这些补充条件，以便于逆定理问题的求解. 下面导出几种特殊解法：

(ⅰ)将式(12)两边对 t 求微商，得

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^v}\dot{a}^v = 0 \tag{14}$$

将方程(1)两边同乘以$(\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0)$，并对 μ 求和，再将结果与(14)式相加，得

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial a^v}\dot{a}^v + [(\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^v})\dot{a}^v - \frac{\partial B}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial t}](\xi_\mu - \dot{a}^\mu \xi_0) = 0 \tag{15}$$

由于 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu v}$ 的反对称性，故上式展开后，含 $\dot{a}^v \dot{a}^\mu$ 的双重求和项必为零，再取 $\dot{a}^v$ 项的系数和不含 $\dot{a}^v$ 项分别为零，得到

$$\frac{\partial I}{\partial a^v} + (\frac{\partial R_v}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^v})\xi_\mu + (\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t})\xi_0 = 0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} - (\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t})\xi_\mu = 0 \tag{17}$$

两式提供了 $2n+1$ 个补充方程，其中 $2n$ 个方程彼此独立，将补充方程与方程(13)联立求解可以导出系统的对称变换. 当系统为满足条件(3)的规则系统时，(16)式可以写成

$$\xi_\mu = \Omega^{\mu v}[\frac{\partial I}{\partial a^v} + (\frac{\partial B}{\partial a^v} + \frac{\partial R_v}{\partial t})\xi_0] \tag{18}$$

以上所得到的结果正是通常 Birkhoff 系统 Noether 逆定理[6].

我们用另一种方法导出式(16)和(17)，将(13)式两边对 a^v 求偏微商，并与方程(11)后一组联立，消去含 G_N 项，即得(16)式；其次，将(13)式两边对 t 求偏微商，与方程(11)前一式联立，消去含 G_N 项，即得式(17). 上述利用 Killing 方程(11)得到式(16)和(17)，说明了利用通常 Birkhoff 系统 Noether 逆定理导出对称变换时，得到的结果不再

需要经过(7)式(或(10)式)、或方程(11)检验的原因.

(ⅱ)由式(16)和(17),可以导出新的辅助方程. 用 ξ_v 乘(16)式并对 v 求和,再次利用 $\Omega_{\mu v}$ 反对称性,得到

$$\frac{\partial I}{\partial a^v}\xi_v+(\frac{\partial B}{\partial a^v}+\frac{\partial R_v}{\partial t})\xi_0\xi_v=0 \tag{19}$$

将(17)式代入上式,得

$$\frac{\partial I}{\partial a^v}\xi_v+\frac{\partial I}{\partial t}\xi_0=0 \tag{20}$$

式(20)可以作为一个补充条件. 在特定情形下,可以对变换生成元作出某种假定. 例如,如果 $\frac{\partial I}{\partial t}=0$,则可设

$$\xi_\mu=\omega_{\mu v}\frac{\partial I}{\partial a^v} \tag{21}$$

其中,$\omega_{\mu v}$ 为反对称张量,即

$$\omega_{v\mu}=-\omega_{\mu v} \tag{22}$$

式(20)成立,在实际求解时,$\omega_{\mu v}$ 可以适当选定.

3 例题

已知二阶 Birkhoff 系统为

$$R_1=\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t},R_2=-\frac{1}{2}a^1e^{\lambda t},$$

$$B=\frac{1}{2}e^{\lambda t}[(a^2)^2+\lambda a^1a^2] \tag{23}$$

两个守恒量分别为

$$I=a^2e^{\lambda t} \tag{24}$$

$$I'=a^2+\lambda a^1 \tag{25}$$

导出分别与 I 和 I' 对应的 Noether 对称性.

对 I,以一般解法求解,此时(13)式和(10)式分别写成

$$a^2e^{\lambda t}=\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t}\xi_1-\frac{1}{2}a^1e^{\lambda t}\xi_2-\frac{1}{2}e^{\lambda t}[(a^2)^2+\lambda a^1a^2]\xi_0+G_N \tag{26}$$

$$\{\frac{1}{2}\lambda a^2e^{\lambda t}\dot a^1-\frac{1}{2}\lambda a^1e^{\lambda t}\dot a^2-\frac{1}{2}\lambda e^{\lambda t}[(a^2)^2+\lambda a^1a^2]\}\xi_0+(-\frac{1}{2}e^{\lambda t}\dot a^2-\frac{1}{2}\lambda a^2e^{\lambda t})\xi_1+(\frac{1}{2}e^{\lambda t}\dot a^1-e^{\lambda t}a^2-\frac{1}{2}\lambda a^1e^{\lambda t})\xi_2-\frac{1}{2}e^{\lambda t}[(a^2)^2+\lambda a^1a^2]\dot\xi_0+\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t}\dot\xi_1-\frac{1}{2}a^1e^{\lambda t}\dot\xi_2+\dot G_N=0 \tag{27}$$

不定方程(26)的解有任意多组,列出如下 5 组:

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=1,\quad \xi_2=0,\quad G_N=\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t} \tag{28}$$

$$\xi_0=0,\quad \xi_1=2,\quad \xi_2=0,\quad G_N=0 \tag{29}$$

$$\xi_0=-\frac{1}{a^2},\quad \xi_1=1,\quad \xi_2=\lambda,\quad G_N=0 \tag{30}$$

$$\xi_0=-\frac{1}{a^2},\quad \xi_1=0,\quad \xi_2=\lambda,\quad G_N=\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t} \tag{31}$$

$$\xi_0=1,\quad \xi_1=1+a^2,\quad \xi_2=-\lambda a^2,\quad G_N=\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t} \tag{32}$$

将上述 5 组解逐组代入式(27)验算,解(28)、(31)和(32)满足,是待求的 Noether 对称性,而解(29)和(30)应弃去. 容易验证,解(28)、(31)和(32),均满足补充方程(16)、(17)、(18)和(20),换句话说,它们可以用特殊解法求得.

对 I',利用特殊解法求解,此时(13)式和(16)(17)分别写成

$$a^2+\lambda a^1=\frac{1}{2}a^2e^{\lambda t}\xi_1'-\frac{1}{2}a^1e^{\lambda t}\xi_2'-\frac{1}{2}e^{\lambda t}[(a^2)^2+\lambda a^1a^2]\xi_0'+G_N' \tag{33}$$

$$\lambda+e^{\lambda t}\xi_2'+\lambda a^2e^{\lambda t}\xi_0'=0 \tag{34}$$

$$1-e^{\lambda t}\xi_1'+a^2e^{\lambda t}\xi_0'=0 \tag{35}$$

$$-\lambda a^2e^{\lambda t}\xi_1'-a^2e^{\lambda t}\xi_2'=0 \tag{36}$$

(34)、(35)和(36)式中只有两个方程彼此独立. 解(33)、(34)和(35)式,导出对应的对称变换,例如

$$\xi_0'=0,\xi_1'=e^{-\lambda t},\quad \xi_2'=-\lambda e^{\lambda t},\quad G_N'=\frac{1}{2}(a^2+\lambda a^1) \tag{37}$$

$$\xi_0'=-\frac{1}{a^2e^{\lambda t}},\quad \xi_1'=\xi_2'=0,\quad G_N'=\frac{1}{2}(a^2+\lambda a^1) \tag{38}$$

$$\xi_0'=\frac{1}{a^2}(1-e^{-\lambda t}),\quad \xi_1'=1,\xi_2'=-\lambda,\quad G_N'=\frac{1}{2}(a^2+\lambda a^1) \tag{39}$$

等等. 容易验证,上述解都满足补充条件式(20).

由于$\frac{\partial I'}{\partial t}$,故可以由(21)式引入补充条件,解(39)相当于选取

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = 1 \tag{40}$$

因此有 $\xi_1' = 1, \xi_2' = -\lambda$.

4　结论

本文深入研究对给定的 Birkhoff 系统,如何由已知的第一积分(守恒量),导出对应的 Noether 对称性问题,得到如下结论:

[1]解决由守恒量导出对称性的理论基础是决定 Noether 对称性的 Noether 等式(7)[或 Killing 方程(11)],以及由对称性得到 Noether 守恒量的表达式(9),因此,Noether 逆定理的一般解法是求解联立方程(13)和(7)[或方程(11)],其解不是唯一的.

[2]由守恒量导出对称性的特殊解法是在一般解法基础上,规范引入若干辅助方程,以代替 Noether 恒等式(7)[或 Killing 方程(11)],如(16)、(17)、(18)和(20)式等,这些辅助方程将守恒量与对称变换联系起来,以便于求解.

[3]将(13)式与(16)式联立求解,是通常 Birkhoff 系统 Noether 逆定理问题的解法,本文给出了从 Killing 方程(11)推导(16)式和(17)式的方法,从而说明了通常 Noether 逆定理求出的对称性,不再需要 Noether 恒等式(或 Killing 方程)检验的原因.

参　考　文　献

1　Birkhoff G D. Dynamical systems. Providence RI: AMS college Publisher, 1927

2　Santilli R M. Foundations of Theoretical Mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

3　梅凤翔、史荣昌、张永发、吴慧彬. Birkhoff 系统动力学. 北京:北京理工大学出版社,1996(Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of birkhoffian system. Beijing Institute of Technology Press,1996 (in Chinese))

4　罗绍凯、张永发等. 约束系统动力学研究进展. 北京:科学出版社,2008 (Luo S K, Zhang Y F, et al. Advances in the study of dynamics of constrained systems. Beijing : Science Press,2008 (in Chinese))

5　Noether A E. Invariante variationsprobleme. Nachr. Kal Ges Wiss. *Gottingen Math*. Phys. 1918, K I, Ⅱ: 235 ~ 237

6　梅凤翔. 李群与李代数对约束力学系统的应用. 北京:科学出版社,1999 (Mei F X. Application of Lie group and Lie algebras to constrained mechanical systems. Beijing: Science Press,1999 (in Chinese))

7　赵跃宇,梅凤翔. 力学系统的对称性与不变量. 北京:科学出版社,1999 (Zhao Y Y, Mei F X. Symmetries and invariants of mechanical systems. Beijing: Science Press 1999 (in Chinese))

8　Mei F X . The noether's theory of birkhoffian systems. Science inChina: A 1993,36(12):1456 ~ 1467

9　张毅,梅凤翔. 约束对 Birkhoff 系统 Noether 对称性和守恒量的影响. 物理学报,2004,53(8):2419 ~ 2423 (Zhang Y, Mei F X. Effects of constraints on Noether symmetries and conserved quantities of a Birkhoff system. *Acta Phys. Sin*, 2004,53(8):2419 ~ 2423(in Chinese))

10　梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量. 北京:北京理工大学出版社,2004(Mei F X. Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2004 (in Chinese))

11　梅凤翔. 完整力学系统的三类对称性与三类守恒量. 动力学与控制学报,2004,2(1):28 ~ 31(Mei F X, Three kinds of symmetries and three kinds of conserved quantities for holonomic systems. *Journal of Dynamics and Contral* , 2004,2(1):28 ~ 31(in Chinese))

12　高峰利,金波. 广义 Chaplygin 系统的形式不变性与 Noether 对称性. 动力学与控制学报,2006,4(3),217 ~ 220 (Gao F L, Jin B. Form invariance and Noether symmetry of general Chaplygin system. *Journal of Dynamics and Contral*, 2006,4(3):217 ~ 220(in Chinese))

13　刘端. 非完整保守力学系统的 Noether 定理及其逆定理. 中国科学:A 辑,1999,33(11):1189 ~ 1197 (Liu D. Noether theorem and inverse theorem for nonholonomic conservative mechanical system. *Science in China*: *A*, 1999, 33(11): 1189 ~ 1197 (in chinese))

14　李子平. 非完整非保守奇异系统正则形式的 Noether 定理及其逆定理. 科学,1992,37(23):2204 ~ 2205 (Li Z P. Noether theorem and inverse theorem for singular nonconservative nonholonomic systems in cononical forms. *Chin. Sci. Bull.* , 1992, 37(23): 2204 ~ 2205 (in chinese))

15　丁光涛. Birkhoff 系统的 Hamilton 化. 动力学与控制学报,2010,8(1):8 ~ 11(Ding G T. Hamiltonization of Birkhoffian systems. *Journal of Dynamics and Contral*, 2010,8(1):8 ~ 11(in Chinese))

16 李元成,梁景辉,梅凤翔. 二阶 Berkhoff 系统 Hamilton 化. 固体力学学报,2002,23(6):202 ~ 206 (Li Y C,Liang J. H, Mei F X. Hamilton's realization of second order Berkhoff's system. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2002,23(6):202 ~ 206 (in chinese))

THE SOLUTIONS FOR NOETHER´S INVERSE THEOREM OF BIRKHOFFIAN SYSTEM

Ding Guangtao

(*The college of Physics and Electronic Information*,*Anhui Normal University*,*Wuhu* 241000,*China*)

Abstract Noether's inverse theorem of Birkhoffian system was studied. The general solution that Noether's symmetries can be deduced from the known conserved quantities for Birkhoffian system was proposed. The difficulties in the general solution were pointed. The special solutions for the inverse theorem were presented by introducing auxiliary equations, in which the conserved quantity and the symmetry are interrelated directly. An example was given to illustrate the application of the results.

Key words Birkhoffian system, Noether's theory, Noether's inverse theorem, conserved quantity, symmetry

Received 24 July 2009,revised 16 October 2009.