第8卷第2期 2010年6月
1672-6553/2010/08(2)/097-3
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 8 No. 2
Jun. 2010

经典非完整 Appell-Hamel 约束的性质*

李广成[1]　陈雷明[1]　王东晓[1]　梅凤翔[2]
(1. 郑州航空工业管理学院数理系,郑州　450015)(2. 北京理工大学力学系,北京　100081)

摘要　研究了非完整约束 Appell-Hamel 例. 证明了经典 Appell-Hamel 例对于非完整系统的 Hamilton 作用量是稳定值. 研究了该约束对于非完整力学 Rosen-Edelstein 模型的解,证明了对于三个非完整力学模型 Appell-Hamel 例具有相同解. 利用非完整力学系统可归结为有条件的完整系统的理论,得出了经典 Appell-Hamel 例具有第二类 Lagrange 方程的形式.

关键词　Appell-Hamel 约束,　Hamilton 原理,　Rosen-Edelstein 模型,　第二类 Lagrange 形式

引言

在非完整力学系统中,已知的非线性非完整约束的例子并不多,主要有 Appell-Hemell 椅子轮, Добронравов 例,导向陀螺例,以及 Новосепов 例[1-4]. Appell-Hamel 例研究的是一个质点,它的速度分量间有下述非线性关系

$$\frac{a^2}{b^2}\dot{z}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \tag{1}$$

Appell-Hamel 例已为众多研究者采用,并奉为经典. 然而,1967 年 Неймарк 和 Фуфаев 指出,Appell 机构在极限过程中发生微分方程组的降阶,使蜕化系统的运动本质上不同于极限运动,因此他们认为 Appell-Hemel 例不正确[4]. 经典 Appell-Hamel 约束究竟具有怎样的性质,是一个值得进一步研究的问题.

1　Appell-Hamel 约束对非完整系统的 Hamilton 原理是稳定作用量

对于非完整系统的 Hamilton 原理,无论 Hölder 形式的还是 Суспов 形式的,一般来说都不是稳定作用原理. 对于 Суспов 形式的非完整系统的 Hamilton 原理,其成为稳定作用原理的充分必要条件是[7]: $\sum_{\beta=1}^{g}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\varepsilon+\beta}}\sum_{\sigma=1}^{g}T_{\sigma}^{\varepsilon+\beta}$,然而满足此条件的非完整系统是极个别的.

对于 Appell-Hamel 约束(1),令 $q_1x=x, q_2=y$, $q_3=z$,我们有

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2) - mgp_3 \tag{2}$$

约束方程为

$$\dot{q}_3 = \frac{b}{a}\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2} \tag{3}$$

由带乘子的 Lagrange 方程[7],得出

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -\lambda\,\frac{b}{a}\frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}} \\ m\ddot{q}_2 &= -\lambda\,\frac{b}{a}\frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}} \\ m\ddot{q}_3 &= -mg+\lambda \end{aligned} \tag{4}$$

由

$$\ddot{q}_1\dot{q}_2 - \ddot{q}_2\dot{q}_1 = 0 \tag{5}$$

进一步得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_1^3 &= m\dot{q}_3\,\frac{b}{a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}}\right) \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_2^3 &= m\dot{q}_3\,\frac{b}{a}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2}}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

将式(4)代入(6),得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_1^3 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3}T_2^3 = 0 \tag{7}$$

由式(7),我们得到非完整系统的 Hamilton 原理对于 Appell-Hamel 例是稳定作用量原理.

结论 1:　经典 Appell-Hamel 例对于非完整系统的 Hamilton 原理是稳定作用量.

2　三个非完整力学模型对于 Appell-Hamel 例有相同的解

2009-04-06 收到第 1 稿,2009-04-15 收到修改稿.
*国家自然科学基金(10772025),河南省教育厅自然科学基金(2008A130002)资助项目

对于非完整力学系统，有三个不同的模型：传统非完整 Chetaev 模型、Vacco 模型及新型 Rosen-Edelstein 模型[5,7,8]. 其中传统非完整 Chetaev 模型是得到较多支持的一个. 一般说来，两个模型是不等价的[7]. 两个模型等价需要严苛的条件[9]. 梅凤翔先生用传统非完整力学模型和 Vacco 模型研究了 Appell-Hamel 例，发现对两个模型，Appell-Hamel 例有相同的解[6].

Rosen-Edelstein 模型为

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}_s}\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial L_e}{\partial q_s}=Q_s \tag{8}$$

是不同于 Chetaev 模型、Vacco 模型的新的模型.

本节我们用 Rosen-Edelstein 模型求 Appell-Hamel 例的解. 由式(1)和可得修正约束[5]

$$\Phi_\beta=\dot{\delta f_\beta}+\varepsilon f_\beta=\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\dot{q}_3^2+\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2-\dot{q}_3\ddot{q}_3 \tag{9}$$

这里常系数为方便起见取 Lagrange 函数为

$$L_e=T-V-\lambda_\beta\Phi_\beta=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)-mgz-\lambda(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2-\dot{q}_3^2+\dot{q}_1\ddot{q}_1+\dot{q}_2\ddot{q}_2-\dot{q}_3\ddot{q}_3)$$

由(8)得

$$\ddot{q}_1(1-2\lambda+\dot{\lambda})+\dot{q}_1(\ddot{\lambda}-2\dot{\lambda})=0$$

$$\ddot{q}_2(1-2\lambda+\dot{\lambda})+\dot{q}_2(\ddot{\lambda}-2\dot{\lambda})=0$$

$$\ddot{q}_3(1-2\lambda+\dot{\lambda})+\dot{q}_3(2\dot{\lambda}-\ddot{\lambda})+g=0 \tag{10}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-2\lambda+\dot{\lambda})=\ddot{\lambda}-2\dot{\lambda}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-2\lambda+\dot{\lambda})=2\dot{\lambda}-\ddot{\lambda}$$

于是(10)成为

$$\dot{q}_1(1-2\lambda+\dot{\lambda})=C_1$$

$$\dot{q}_2(1-2\lambda+\dot{\lambda})=C_2$$

$$\dot{q}_3(1-2\lambda+\dot{\lambda})=C_3-gt \tag{11}$$

由(11)并通过调整积分常数，最终得到

$$\sqrt{C^2+1}\dot{q}_1=v_0-\frac{1}{2}gt$$

$$\frac{\sqrt{C^2+1}}{C}\dot{q}_2=v_0-\frac{1}{2}gt$$

$$\dot{q}_3=v_0-\frac{1}{2}gt \tag{12}$$

式(12)与文献[6]的结果相同.

结论2： 经典 Appell-Hamel 约束对于非完整力学的三个模型有相同的解.

3 经典 Appell-Hamel 约束可归结为有条件的完整系统

专著[7]的研究表明某些非完整力学问题可以归结为有条件的完整系统问题.

由传统非完整力学方程可以解出关于 Lagrange 乘子 λ_β 的代数方程

$$\sum_{\beta=1}^{g}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}A_{sl}^{-1}\frac{\partial f_\gamma}{\partial \dot{q}_1}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\lambda_\beta+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1}\dot{q}_1+\frac{\partial f_\gamma}{\partial t}+\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1}\sum_{s=1}^{n}A_{sl}^{-1}\Big\{-\sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[k,m;s]\dot{q}_m\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{\sigma}\Big(\frac{\partial B_k}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial q_k}\Big)\dot{q}_k+Q_s+\frac{\partial T_0}{\partial q_s}-\frac{\partial B_s}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}\dot{q}_k\Big\}=0\quad(\gamma=1,\cdots,n) \tag{13}$$

方程(13)可解出 λ_β 作位广义速度、广义坐标、时间、质量及与约束有关的系数的函数.

对于 Appell-Hamel 约束，我们有

$$A_{sl}^{-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{m}, s=l\\ 0,\ s\neq l\end{cases},[k,m;s]=0,B_s=0,\frac{\partial A_{sk}}{\partial t}=0,$$

$$T_0=0,\ \frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_1}=2\dot{q}_1,\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_2}=2\dot{q}_2,\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_3}=-2\dot{q}_3,$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}=0,\frac{\partial f_\beta}{\partial t}=0,Q_1=Q_2=0,Q_3=-mg \tag{14}$$

将等式组(14)代入(13)，得

$$\lambda=-\frac{mg\dot{q}_3}{2[\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2]} \tag{15}$$

这里，同样为计算方便，令 $\dot{q}_3^2$ 前的系数取为1.

将(1)代入(15)，得 $\lambda=-\dfrac{mg\dot{q}_3}{4\dot{q}_3}$ (16)

进一步，得 $\ddot{q}_1=-\dfrac{g\dot{q}_1}{2\dot{q}_3},\ddot{q}_2=-\dfrac{g\dot{q}_2}{2\dot{q}_3},\ddot{q}_3=-\dfrac{g}{2}$ (17)

令

$$U=K_1\dot{q}_1^2+K_2\dot{q}_2^2+K_3\dot{q}_3^2+q_1+q_2+q_3 \tag{18}$$

其中 K_s 为待定系数. 将(18)代入(12)，进一步计算得

$$K_1=-\frac{m}{2}-\frac{\dot{q}_3}{g\dot{q}_1},K_2=-\frac{m}{2}-\frac{\dot{q}_3}{g\dot{q}_2},K_3=\frac{m}{2}-\frac{1}{g} \tag{19}$$

将式(19)代入(18)，得到

$$U=-\frac{(\dot{q}_1+\dot{q}_2+\dot{q}_3)\dot{q}_3}{g}+q_1+q_2+q_3 \tag{20}$$

故广义 Lagrange 函数

$$L' = T - V + U = \frac{1}{2}m(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) - mgq_3 - \frac{(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)\dot{q}_3}{g} + q_1 + q_2 + q_3 \tag{21}$$

由以上所述可知,经典 Appell-Hamel 例可以写成第二类 Lagrange 形式.

综上所述:经典 Appell-Hamel 例是一个极为特殊的非线性非完整约束,它的特殊性在于对非完整系统的 Hamilton 作用量是稳定值,对三个非完整力学模型有相同的解,并且可以写成第二类 Lagrange 方程的形式. 这些性质是其他非完整系统所不具备的.

对于经典 Appell-Hamel 例为什么会有如此特殊的性质,用古典的数学工具很难直观的解释. 利用微分几何或其它的数学工具,也许会有较为直观的解释,这也是需要进行更深一步研究.

参　考　文　献

1 Appell P. Traité de mécanique rationnelle. Tome Ⅱ, Sixieme Edition. Paris: Gauthier-Villars, 1953

2 Whittaker E T. A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies. Forth Edition. Cambridge: Cambridge Univ- Press, 1952

3 Hamel G. Theoretische Mechanik, Berlin: Springer-Verlag, 1949

4 ЛурьеАи. Аналитическая механика. Москва: ТИФМЛ, 1961

5 Rosen, Edelstein. Investigation of a new formulation of the Lagrange method for contraind dynamic systems. *ASME Appl Mech*, 1997, 64:116 ~ 122

6 梅凤翔. 关于经典 Appell-Hamel 例 – 分析力学札记之九. 力学与实践, 2002, 24(1):59 ~ 61(Mei F X. On Appell-Hamel constraints-Note of analytical mechanics. *Journal of Mechanics and Practice*, 2002, 24(1):59 ~ 61 (in Chinese))

7 梅凤翔. 非完整系统力学基础. 北京: 北京工业学院出版社, 1985 (Mei F X. Foundation of Nonholonomic Mechanics. Beijing: Beijing Institute of Technology Press. 1995 (in Chinese))

8 梅凤翔. 混合非完整问题. 动力学与控制学报, 2005, 3(2):22 ~ 24 (Mei F X. On problem of hydric nonholonomic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 22 ~ 24 (in Chinese))

9 郭永新. 非完整系统 Chetaev 动力学和 vakonomic 动力学的等价条件. 物理学报, 2006, 55(8):3838 ~ 3843 (Guo Y X. Equivalent conditions of chetaev and vakonomic dynamics of nonholonomic systems. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(8):3838 ~ 3843 (in Chinese))

PROPERTIES OF CLASSIC NONHOLONIMIC APPELL-HAMEL CONSTRAINT*

Li Guangcheng[1]　Chen Leiming[1]　Wang Dongxiao[1]　Mei Fengxiang[2]

(1. *Dept. of Mathematics and Physics*, *Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management*, *Zhengzhou* 450015, *China*)

(2. *Dept. of Mechanics*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

Abstract The Appell-Hamel constraint was studied. We prove that the Appell-Hamel constraint is stationary for Hamilton Action of nonholonomic systems, and has the same solution as the three mechanical models-Chetaev model, Rosen-Edelstein model and Vacco model. Finaly, using the theory that nonholonomic systems can be looked as holonomic systems under some conditions, we prove that the Appell-Hamel constraint has Lagrange equations of the second kind.

Key words Appell-Hamel constraint, Hamilton principle, Rosen-Edelstein mode, the second Lagrange form

Received 6 April 2009, revised 15 April 2009.

* The Project supported by the National Science Foundation of China(10772026) and the National Science Foundation of Education Department of Henan Province(2008A130002)