

悬臂板条结构动力学与振动控制分析*

郭旺 胡超

(同济大学航空航天与力学学院,上海 200092)

摘要 基于 Lagrange-Germain 弹性薄板理论,采用 Hamilton 列式求解方法,研究了悬臂板动力学与振动控制问题.确定了平板中纵横振动模式存在的色散关系,给出了问题的解析解.基于平板振动的构造解,对板条结构的振动实施了主动控制.本文还做了数值仿真,并对结果进行了分析讨论.

关键词 悬臂板结构, Hamilton 体系, 色散关系, 弹性波与振动模态控制

引言

由于经典薄板理论的 Lagrange-Germain 方程简单,在工程结构分析中广泛应用.过去,对矩形平板振动问题的求解多采用三角函数级数展开的方法,至少有一组对边是简支边界条件.先是一组对边“自动”满足边界条件,而后对另一组对边分析计算来满足边界条件^[1,2].

对于在航天器中的典型结构,例如矩形悬臂板动力学与振动控制问题^[3],其边界条件的特点是,三个边自由,一个边是固定的,这样的平板振动问题还是很难分析求解的.在平板振动力学分析中往往在平板的两个正交方向分别采用梁函数近似逼近来分析求解^[2].可见,与弹性力学一样,求解平板振动问题过去也是采用半逆法求解.此种解法的局限性在于难以分析复杂的边值问题,采用 Hamilton 体系可求解一些经典方法不能解决的边值问题^[1,3].条形板结构是航天工程、土木建筑工程中经常采用的一种结构. Xu 等对条形板结构中弹性波导问题进行了分析研究^[4].

本文将基于弹性薄板理论,采用 Hamilton 状态空间求解方法,研究悬臂板条结构动力学与振动控制问题.分析悬臂板条中振动模式存在的色散方程,给出问题的一般解.板条结构的振动施加模态控制,并在频域范围内通过频率响应图与 Euler-Bernoulli 梁的振动控制效果进行了比较.最后对结果进行分析与讨论.

1 平板弹性波动的 Hamilton 列式及其求解

根据 Lagrange-Germain 板理论,在直角坐标系下板内弯矩、扭矩和剪力的表达式为

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (1a)$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad (1b)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1c)$$

$$Q_x = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} \quad (1d)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} \quad (1e)$$

式中, w 表示板的法向位移函数; D 为平板的抗弯刚度, $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$; h 为平板的厚度; E, ν 分别为材料的弹性模量和 Poisson 比.

采用两类变量形式的广义变分原理,薄板弯曲的 Hellinger - Reissner 型混合能变分原理的泛函为^[5,6]

$$\delta \Pi_2 = \delta \left\{ \int_D \Gamma dy + \int_S B ds \right\} = 0 \quad (2)$$

其中, B 为边界积分被积函数项, Γ 为系统的混合能密度,其表达式为

$$\begin{aligned} \Gamma = & -M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \\ & \frac{1}{2D(1 - \nu)} [M_x^2 + M_y^2 + 2(1 + \nu)M_{xy}^2 - \\ & 2\nu M_x M_y] - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 w^2 \end{aligned} \quad (3)$$

为采用 Hamilton 分析求解体系,将平板结构的纵向 x 坐标模拟为时间变量^[7]. 横向状态向量应满足驻值条件,对式(2)变分 $\delta\Pi_2/\delta M_y = 0$,也可得出 Lagrange - Germain 板理论中的关系式

$$M_y = -D(1-v^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + vM_x \quad (4a)$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad (4b)$$

这样,在状态空间中可设广义位移变量为^[8,9] $q = (q_1, q_2)^T = (w, \partial w/\partial x)^T = (w, \varphi_x)^T$, 则广义速度为 $\dot{q} = \partial q/\partial x = (\dot{q}_1, \dot{q}_2)^T = (i\dot{w}, \dot{\varphi}_x)^T$. 而在相空间中广义位移与动量可分别取为 $q = (q_1, q_2)^T, p = (p_1, p_2)^T = (V_x, M_x)^T$.

将式(4)代入式(2)中,将原来的两类变量变分原理改成 Hamilton 型广义变分原理

$$\delta\Pi_2^H = \delta\left\{\int_D \Gamma^H dy + \int_S B ds\right\} = 0 \quad (5)$$

其中

$$\Gamma^H = p^T \dot{q} - H(q, p) \quad (6)$$

而函数 $H(q, p)$ 为 Lagrange - Germain 板弯曲问题的 Hamilton 能量密度函数为

$$H(q, p) = p_1 q_2 + \frac{1}{2D} p_2^2 - v p_2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} - \frac{1}{2} D(1-v^2) \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} \right)^2 - D(1-v) \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho h \omega^2 q_1^2 \quad (7)$$

这样,平板结构弯曲波动的 Lagrange 密度函数为

$$L(q, \dot{q}) = p^T \dot{q} - H(q, p) = \frac{1}{2} D \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{1}{2} D \dot{q}_2^2 + D(1-v) \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} \right)^2 + v D \left(\frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} \right) \dot{q}_2 - \frac{1}{2} \rho h \omega^2 q_1^2 \quad (8)$$

根据驻点方程 $\delta\Pi_2^H/\delta q = 0, \delta\Pi_2^H/\delta p = 0$, 可得如下表达式

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p^1} = q_2 \quad (9a)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_2} = \frac{1}{D} p_2 - v \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} \quad (9b)$$

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_1} = D(1-v^2) \frac{\partial^4 q_1}{\partial y^4} + v \frac{\partial^2 p_2}{\partial y^2} - \rho h \omega^2 q_1 \quad (9c)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_2} = -2D(1-v^2) \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} - p_1 \quad (9d)$$

根据方程(9),在相空间中可得平板弯曲波动的方程^[1]

$$\dot{v} = H v = \mu v \quad (10)$$

式中, v 为动力系统的状态向量, $v = [q^T, p^T]^T$; H 为 4×4 阶的 Hamilton 算子矩阵,其形式为

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & 1/D \\ \frac{D(1-v^2)\partial^4}{\partial y^4} - \rho h \omega^2 & 0 & 0 & \frac{v\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & \frac{-2D(1-v)\partial^2}{\partial y^2} & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

基于 Matlab 软件平台,可得板条横向本征值 λ 与纵向本征值 μ 的关系为

$$(\mu^2 + \lambda^2)^2 - k^4 = (\mu^2 + \lambda^2 + k^2)(\mu^2 + \lambda^2 - k^2) = 0 \quad (11)$$

式中, k 是自由空间下平板中弹性波传播波数, $k = (\rho h \omega^2 / D)^{1/4}$. $\lambda_i (i=1, 2)$ 为结构振动横向本征值, $\lambda_{1,2}^2 = \pm k^2 - \mu^2$.

把结构振动的 x 方向“假想”为时间演化方向,其运动的状态方程可描述为

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ V_x \\ M_x \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} w \\ \varphi_x \\ V_x \\ M_x \end{bmatrix} \quad (12)$$

式中, $H(x) = e^{Hx}$ 为状态转移矩阵. 结构中广义位移和广义动量的转移关系式为

$$\begin{bmatrix} w(x) & \varphi_x(x) & V_x(x) & -M_x(x) \end{bmatrix}^T = H(x) \begin{bmatrix} w(0) & \varphi_x(0) & V_x(0) & -M_x(0) \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

研究悬臂板结构动力学与振动控制问题. 板条两侧的边界条件为

$$M_y = -D(1-v^2) \frac{\partial^2 q_1}{\partial y^2} - v p_2 = 0, \quad V_y = -D(1-v^2)^2 \frac{\partial^3 q_1}{\partial y^3} - (2-v) \frac{\partial p_2}{\partial y} = 0 \quad (14)$$

考虑对应于沿纵向传播的振动模式,板弯曲振动的本征向量解的位移分量可描述为

$$w = \exp(\mu x) [A_1 \cosh(\lambda_1 y) + A_2 \cosh(\lambda_2 y)] \quad (15)$$

式中, $A_i (i=1, 2)$ 是振动位移模式系数.

设平板的长度和宽度分别为 a 和 $2b$, 状态向量 $v = [q^T, p^T]$ 满足板条两侧自由边界条件(14)后,可得平板结构纵向本征值应满足的如下色散方程^[7]

$$[(1-v)\mu^2 + k^2]^2 \lambda_1 \tanh(\lambda_1 b) - [(1-v)\mu^2 - k^2]^2 \lambda_2 \tanh(\lambda_2 b) = 0 \quad (16)$$

将式(11)与式(16)联立,可确定平板结构纵向本

征值与弹性波入射波数的关系,即 $\mu = \mu(k)$.

平板振动的状态向量, $v(x, y) = \exp(\mu x) \Phi(y)$,则横向本征向量函数可描述为

$$\Phi(y) = \begin{Bmatrix} w \\ \frac{\partial w}{\partial x} \\ V_x \\ -M_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y) \\ \mu [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] \\ -D\mu \{ [\mu^2 + (2-v)\lambda_1^2] \cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 [\mu^2 + (2-v)\lambda_2^2] \cosh(\lambda_2 y) \} \\ D [(\mu^2 + v\lambda_1^2) \cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 (\mu^2 + v\lambda_2^2) \cosh(\lambda_2 y)] \end{Bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{其中, } \sigma_1 = \frac{(\lambda_1^2 + v\mu^2) \cos(\lambda_1 b)}{(\lambda_2^2 + v\mu^2) \cos(\lambda_2 b)}$$

为满足板条 x 方向两端的边界条件,板弯曲振动问题的本征向量解的位移分量可描述为

$$w = [D_1 \exp(\mu x) + D_2 \exp(-\mu x)] [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] + [D_3 \exp(\mu x) + D_4 \exp(-\mu x)] [\cos(\lambda_2 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_1 y)] \quad (18)$$

$$\text{式中, } \sigma_2 = \frac{(\lambda_2^2 + v\mu^2) \cos(\lambda_2 b)}{(\lambda_1^2 - v\mu^2) \cos(\lambda_1 b)}; D_n (n = 1, 2, 3, 4)$$

是模式系数.

$$\text{考虑到 Euler 公式 } \left. \begin{aligned} e^{\pm ikx} &= \cos(kx) \pm i \sin(kx) \\ e^{\pm kx} &= \cosh(kx) \pm \sinh(kx) \end{aligned} \right\}$$

(18)式可进一步描述为

$$w = [B_1 \cosh(\mu x) + B_2 \sinh(\mu x)] [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] + [B_3 \cos(\mu x) + B_4 \sin(\mu x)] [\cos(\lambda_2 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_1 y)] \quad (19)$$

式中 $B_n (n = 1, 2, 3, 4)$ 是模式系数.

1.1 纵向非零本征解的确定

通过分析研究可知:1、平板结构中不存在横向零本征值而纵向不为零的振动模式;2、平板结构中存在着纵向本征值为零而横向本征值不为零的振动模式.此时,振动的色散方程为

$$\tanh(kb) + \tan(kb) = 0 \quad (20)$$

而平板振动的状态向量为, $v(x, y) = \Phi(y)$,横向本征向量函数为

$$\Phi(y) = \begin{Bmatrix} w \\ \varphi \\ V_x \\ -M_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cosh(ky) + \frac{\cosh(kb)}{\cos(kb)} \cos(kb) \\ 0 \\ 0 \\ Dvk^2 [\cosh(ky) - \frac{\cosh(kb)}{\cos(kb)} \cos(ky)] \end{Bmatrix} \quad (21)$$

悬臂板的边界条件是,两端分别给定广义位移和广义动量,平板振动的变分式为

$$\int_{-b}^b [(\delta p^T)(q - \bar{p})] \Big|_{x=0} dy + \int_{-b}^b [(\delta p^T)(p - \bar{q})] \Big|_{x=a} dy = 0 \quad (22)$$

式中,状态变量上面的符号“-”表示端部给定的广义位移或广义动量.

由于广义位移和动量变分的任意性,结合(19)将广义位移和广义动量,即状态向量 $v = [q^T, p^T]$ 代入式(22)中,可得到如下代数方程

$$B_1 + B_3 \alpha = 0 \quad (23a)$$

$$B_2 + B_4 \alpha = 0 \quad (23b)$$

$$B_1 \cosh(\mu a) + B_2 \sinh(\mu a) - B_3 \cos(\mu a) - B_4 \beta \sin(\mu a) = 0 \quad (23c)$$

$$B_1 \sinh(\mu a) + B_2 \cosh(\mu a) + B_3 \gamma \sin(\mu a) - B_4 \gamma \cos(\mu a) = 0 \quad (23d)$$

其中,

$$\sigma_3 = \frac{\mu^2 + (2-v)\lambda_2^2}{\mu^2 + (2-v)\lambda_1^2}; \quad \sigma_4 = \frac{\mu^2 + v\lambda_2^2}{\mu^2 + v\lambda_1^2};$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 b) - \sigma_2 \frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b)}{\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_1 \frac{1}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 b)};$$

$$\beta = \frac{\sigma_4 \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 b) - \sigma_2 \frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b)}{\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_1 \sigma_2 \frac{1}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 b)};$$

$$\gamma = \frac{\sigma_3 \frac{1}{\lambda_2} \sin(\lambda_2 b) - \sigma_2 \frac{1}{\lambda_1} \sin(\lambda_1 b)}{\frac{1}{\lambda_1} \sinh(\lambda_1 b) - \sigma_3 \sigma_1 \frac{1}{\lambda_2} \sinh(\lambda_2 b)}$$

根据式(23)可以得到下式

$$\alpha^2 + \beta\gamma + \alpha(\beta + \gamma) \cos(\mu a) \cosh(\mu a) - \alpha(\beta - \gamma) \sin(\mu a) \sinh(\mu a) = 0 \quad (24)$$

联立式(11),(16)和(24),可得到平板结构中振动模式的波数,即可以确定悬臂板振动的固有频率.

此时,悬臂板弯曲振动问题的本征向量解的位移分量可描述为

$$w = B \{ \sigma_5 \{ \alpha \cosh(\mu x) [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] - \cos(\mu x) [\cos(\lambda_2 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_1 y)] \} + \{ \alpha \sinh(\mu x) [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] - \sin(\mu x) [\cos(\lambda_2 y) - \sigma_2 \cos(\lambda_1 y)] \} \} \quad (25)$$

式中, $\sigma_5 = -\frac{\alpha \sinh(\mu a) + \beta \sin(\mu b)}{\alpha \cosh(\mu a) + \beta \cos(\mu b)}$; B 是平板振动模式系数。

为满足振动的初值条件,悬臂板结构的振动模态解的可描述为

$$w = q(t) \{ \alpha [\sigma_5 \cosh(\mu x) + \sinh(\mu x)] \times [\cosh(\lambda_1 y) - \sigma_1 \cosh(\lambda_2 y)] - [\sigma_5 \cos(\mu x) + \sin(\mu x)] [\cos(\lambda_2 y) - \sigma_1 \cos(\lambda_1 y)] \} \quad (26)$$

式中, $q(t)$ 是平板振动的时间因子。

1.2 悬臂板的模态坐标方程

根据(26)式平板振动的位移解,将位移表示为有限个振动模态的和

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n W_{ij}(x, y) q_{ij}(t) \quad (27)$$

其中, $W_{ij}(x, y)$ 为矢量模态函数, $q_{ij}(t)$ 为模态坐标, m, n 为模态截断数。

将(27)式代入薄板的振动微分方程

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \bar{q}(x, y, t) \quad (28)$$

于是得到如下方程

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \nabla^4 W_{ij} q_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\rho h}{D} W_{ij} \frac{\partial^2 q_{ij}}{\partial t^2} = \bar{q}(x, y, t) \quad (29)$$

式中, $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$ 是 Laplace 算子; ρ 为单位面积板的质量; \bar{q} 为悬臂板所受外部载荷。而 $W_{ij}(x, y)$ 应满足如下方程

$$\nabla^4 W_{ij} - \omega_{ij}^2 \frac{\rho h}{D} W_{ij} = 0 \quad (30)$$

式中, ω_{ij} 为平板的固有频率。

将(30)式代入(29)式中,将两端乘 $W_{rs}(x, y)$, 并且利用结构振动模态振型函数的正交性

$$\frac{1}{m_{ij}} \iint_{\Omega} W_{ij}(x, y) W_{rs} dx dy = \begin{cases} 0 & i \neq r \text{ 或 } j \neq s \\ 1 & i = r \text{ 且 } j = s \end{cases} \quad (31)$$

最终可以得出

$$\frac{\partial^2 q_{ij}(t)}{\partial t^2} + \omega_{ij}^2 q_{ij}(t) = p_{ij}(t), \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \quad (32)$$

其中,外部扰动力 $p_{ij}(t) = \frac{1}{m_{ij}} \iint_{\Omega} \bar{q}(x, y, t) W_{ij}(x, y) dx dy$, 式(32)为板的模态坐标方程。

2 悬臂板振动的独立模态控制

独立模态控制的本质就是通过状态反馈来实现振动系统的极点重新配置,因此先建立系统的状态空间描述。设模态控制力 $u_{ij}(t) = \frac{1}{m_{ij}} \iint_{\Omega} U(x, y, t) W_{ij}(x, y) dx dy$, 对于振动系统

$$\ddot{q}_{ij}(t) + \omega_{ij}^2 q_{ij}(t) = f_{ij}(t) + u_{ij}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n) \quad (33)$$

考虑对平板前 r 阶振动模态进行控制,引入状态向量 $X(t) = [X_c(t) : X_r(t)]$, 其中 $X_c = [q^T(t), \dot{q}^T(t)]_{2r \times 1}^T$, 则系统受控部分状态方程形式为

$$\dot{X}_c(t) = A_c X_c(t) + B_c u(t) + D_c f_c(t) \quad (34)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}_{2r \times 2r}; B_c = D_c = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}_{2r \times r}; \omega^2 = \text{diag}[\omega_{ij}^2]_{r \times r}; \quad (35)$$

式中, 0 和 I 分别为零阵和单位阵, $u(t)$ 和 $f_c(t)$ 分别表示模态控制力和模态扰动力。可控性矩阵 $\text{rank}([B \ AB]) = 2r$, 由线性系统理论知系统状态完全可控,可以实现极点的任意配置。引入状态反馈,取模态控制力 $u(t)$ 为:

$$u(t) = -GX_c(t) = -[g \ h] \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} \quad (36)$$

式中, g, h 分别为模态控制的广义位移增益和广义速度增益矩阵。通过调节反馈增益 G 可以改变原振动系统特征结构,并且可以有效地提高系统的模态阻尼和刚度^[10]。

3 数值算例

采用独立模态控制,分析研究了板条结构施加模态控制前后的动响应。取特征长度为板的宽度 b , 采用如下无量纲量: Poisson 比 $\nu = 0.30$; $a/b = 15$; $\bar{\omega}_{ij} = \omega_{ij}/\omega_{11}$ 。表1给出了悬臂板的前10阶无量纲固有频率。

表1 悬臂板的前10阶无量纲固有频率

Table 1 The first 10 dimensionless natural frequency of cantilever plate

| Mode Order | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| Natural Frequency | 1.00 | 6.28 | 17.58 | 34.44 | 37.78 | 56.94 | 85.06 | 99.94 | 118.81 | 155.10 |

图1与图3分别描述了施加模态控制前后板条结构的频率响应,图1控制了前4阶模态,图3中控制了前6阶模态.外部扰动位置为 $(x_d, y_d) = (0.15a, 0b)$,测量动响应位置为 $(x_s, y_s) = (0.80a, 0b)$,施加了4个模态控制力,其作用位置分别为 $(x_{m1}, y_{m1}) = (0.20a, 0b)$ 、 $(x_{m2}, y_{m2}) = (0.50a, 0b)$ 、 $(x_{m3}, y_{m3}) = (0.75a, 0b)$ 和 $(x_{m4}, y_{m4}) = (1.00a, 0b)$.

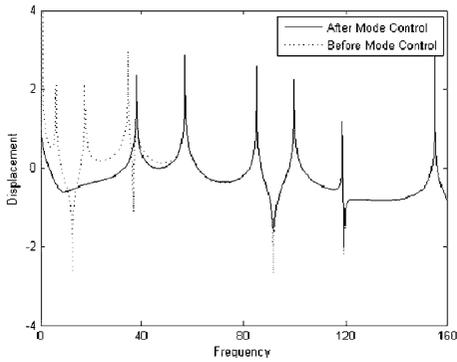


图1 模态控制前后板条结构的频率响应

Fig. 1 Frequency response of the cantilever plate before and after mode control

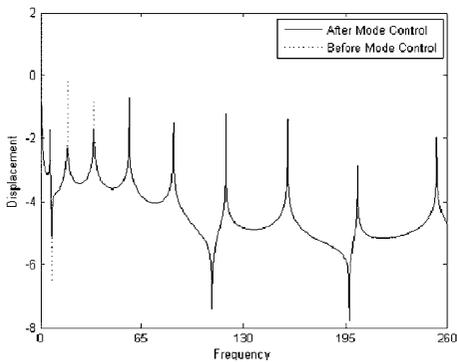


图2 模态控制前后 Euler-Bernoulli 梁的频率响应

Fig. 2 Frequency response of the Euler-Bernoulli beam before and after mode control

图2与图4分别描述了施加模态控制前后 Euler-Bernoulli 梁的频率响应,图2控制了前4阶模态,图4中控制了前6阶模态.外部扰动位置为 $x_d = 0.15l$,测量动响应位置为 $x_s = 0.80l$,模态控制位置分别为 $x_{m1} = 0.20l$ 、 $x_{m2} = 0.50l$ 、 $x_{m3} = 0.75$ 和 $x_{m4} = 1.00l$, l 为梁长.

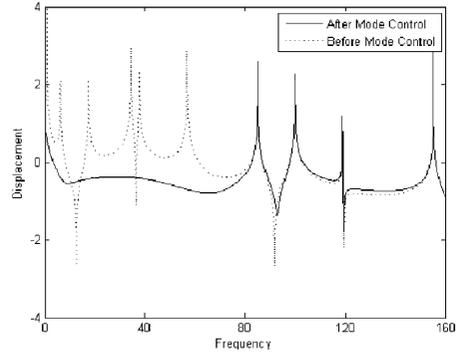


图3 模态控制前后板条结构的频率响应

Fig. 3 Frequency response of the cantilever plate before and after mode control

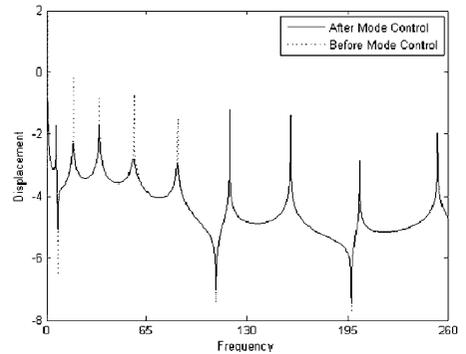


图4 模态控制前后 Euler-Bernoulli 梁的频率响应

Fig. 4 Frequency response of the Euler-Bernoulli beam before and after mode control

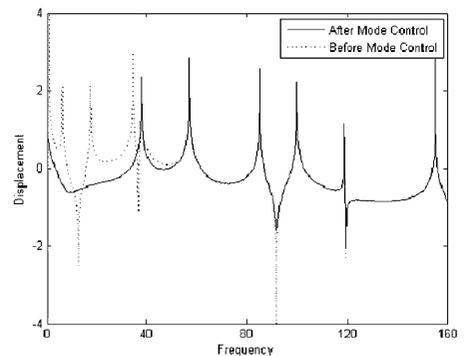


图5 模态控制前后板条结构的频率响应

Fig. 5 Frequency response of the cantilever plate before and after mode control

从图1到图4可以看出,独立模态控制对结构振动低阶模态的优良控制效果,并具有很好的独立性.受控模态与未受控模态之间几乎没有影响,因

此未受控模式的急剧响应依然存在^[9].

图5和图6描述了施加模态控制前后板条结构的频率响应,图5中是控制前4阶模态,图6中是控制前6阶模态.外扰位置为 $(x_d, y_d) = (0.15a, 0.50b)$,测量动响应位置为 $(x_s, y_s) = (0.80a, 0.50b)$,而模态控制力的作用位置分别为 $(x_{m1}, y_{m1}) = (0.20a, 0.50b)$ 、 $(x_{m2}, y_{m2}) = (0.50a, 0.50b)$ 、 $(x_{m3}, y_{m3}) = (0.75a, 0.50b)$ 和 $(x_{m4}, y_{m4}) = (1.00a, 0.50b)$.

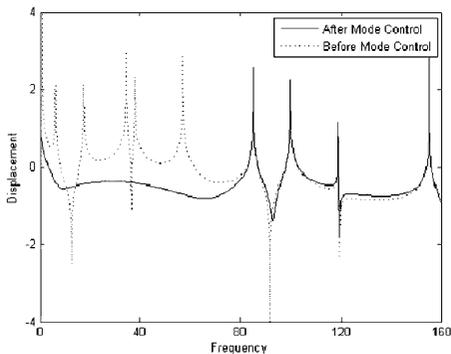


图6 模态控制前后板条结构的频率响应

Fig. 6 Frequency response of the cantilever plate before and after mode control

4 分析与讨论

在实施极点配置的振动控制策略中,获得未实施控制时系统动力学方程的一般解是进行振动控制设计的基础.过去,为实现对悬臂结构的动力学控制,多采用弹性梁模型,而不采用平板模型,其根本原因在于难以获得悬臂板振动问题的一般解.与平板动力学的经典解法即半逆解法不同,本文基于Hamilton列式将平板纵向坐标模拟为时间,分析研究了悬臂板结构的振动问题.确定了平板结构中纵横两方向各振动模式的色散关系,给出了平板动力学问题的一般解.

根据文中获得的悬臂板振动问题的解析解,可实现对悬臂板振动的独立模态控制设计.独立模态控制对结构振动有良好的控制效果,并具有很好的独立性.数值仿真结果表明:当考虑结构的横向尺寸的有限性(采用板模型而不是梁模型),即采用基于Hamilton体系得到的平板振动的解析解进行振动控制设计时,其振动控制效果考虑了空间参数的分布性.

本文给出的平板振动的一般解及其振动控制

方法可望能在航天器结构、土木建筑结构的动力学分析与振动控制设计中得到应用.

参 考 文 献

- 1 钟万勰著.应用力学对偶体系.北京:科学出版社,2002 (Zhong W X ed. Duality system in applied mechanics. Beijing: Science Press, 2002 (in Chinese))
- 2 曹志远著.板壳振动理论.北京:中国铁道出版社,1989 (Cao Z Y. Vibration theory of plates and shells. Beijing: Publishing House of China's Railway, 1989 (in Chinese))
- 3 马兴瑞,苟兴宇,李铁寿等.航天器动力学发展概况.宇航学报,2000,21(3):1~5 (Ma X R, Gou X Y, Li T S, et al. Development generalization of spacecraft dynamics. *Journal of Astronautics*, 2000, 21(3): 1~5 (in Chinese))
- 4 Xu P C, Datta S K. Guided waves in a bonded plate: a parametric study. *Journal of Applied Physics*, 1990, 67(11): 6779~6786
- 5 胡海昌著.弹性力学的变分原理及其应用.北京:科学出版社,1981 (Hu H C. Variational principle in elasticity and its applications. Beijing: Science Press, 1981 (in Chinese))
- 6 梁立孚著.变分原理及其应用.黑龙江:哈尔滨工程大学出版社,2005 (Liang L F. Variational principle and its applications. Heilongjiang: Publishing House of Harbin Engineering University, 2005 (in Chinese))
- 7 鲍四元,邓子辰.哈密顿体系下矩形薄板自由振动的一般解.动力学与控制学报,2005,3(2):10~16 (Bao S Y, Deng Z C. A general solution of free vibration for rectangular thin plates in Hamilton systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(2): 10~16 (in Chinese))
- 8 鲍亦兴,毛昭宙著,刘殿魁,苏先榭译.弹性波的衍射与动应力.北京:科学出版社,1993 (Bao Y H, Mao C C ed, Liu D K, Su X Y Trans. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations. Beijing: Science Press, 1993 (in Chinese))
- 9 Hu C, Chen T, Han G, Huang W H. Flexural wave propagation and localized vibration in narrow Mindlin's plate. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 306(3-5): 389~399
- 10 胡超,陈涛,黄文虎.基于行波与模态的混合方法对Timoshenko梁进行振动主动控制.航空学报,2007,28(2):301~308 (Hu C, Chen T, Huang W H. Active vi-

bration control of Timoshenko beam based on hybrid wave/
mode method. *Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica*,

2007, 28(2): 301 ~ 308 (in Chinese))

DYNAMICS OF CANTILEVER PLATES AND ITS VIBRATION CONTROL *

Guo Wang Hu Chao

(*School of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China*)

Abstract Applying Lagrange-Germain's theory of elastic thin plates and Hamilton formulism to study the dynamics of cantilever plates and its vibration control problem, a solution of the problem was given. Dispersion equations of propagation mode of strip plates were deduced from eigenfunction expansion method. The mode control was applied to study the active vibration control of the strip plates, and the control effect was compared to the Euler-Bernoulli beam. At last, the results were analyzed and discussed.

Key words cantilever plate, Hamilton formulism, dispersion equations, elastic wave and vibration mode control