

# 基于受控 Lorenz 系统的微弱脉冲信号检测\*

王德石 谌龙 史跃东

(海军工程大学兵器工程系, 武汉 430033)

**摘要** 利用 Lorenz 系统的参数非共振激励混沌抑制原理, 实现强噪声背景下微弱周期脉冲信号的检测. 将频率远大于系统特征频率的脉冲信号作为系统内置激励信号, 根据平均法和重整化方法得到受控 Lorenz 系统与原系统的参数等效关系, 并确定使系统由混沌状态突变为周期状态的检测参数临界值. 仿真结果表明此系统可以达到较低的信噪比工作下限. 此方法可根据理论分析结果预测参数临界值范围, 检测方式简便易行, 适于在目标探测和故障诊断领域推广应用.

**关键词** Lorenz 系统, 参数激励, 脉冲周期信号, 信号检测

## 引言

周期脉冲信号是通信和故障诊断等领域中的典型信号形式. 提高强噪声背景下微弱周期脉冲信号的检测能力对于增强检测系统抗干扰能力和发现早期故障具有重要意义. 利用取样积分、高阶累计量<sup>[1]</sup>等常规方法在特定条件下也可检测出信噪比较低的微弱周期信号, 但往往计算量较大, 且需要较长时间的检测数据而效率较低. 基于混沌系统的微弱周期信号检测方法是一种基于非线性系统突变效应的新型检测方法, 可以利用较少的测量数据在任意色噪声背景下实现极低的信噪比工作门限, 检测成本较低. 1992年 Bix 提出过一种初步方案<sup>[2]</sup>, 但由于当时有关基础理论尚不完善而缺乏深入理论研究. 近年来, 基于 Duffing 振子的微弱周期信号检测方法得到了深入研究<sup>[3-7]</sup>. 最初是利用对 Duffing-Holmes 方程的强迫激励项进行微扰来实现检测<sup>[3]</sup>, 信噪比工作门限可以达到常规方法的下限, 而对参数进行微扰等形式也是有效的途径, 如修正 Duffing-Holmes 方程系统<sup>[5]</sup>和双耦合 Duffing 振子系统<sup>[7]</sup>, 可以进一步降低信噪比工作下限.

以上这些混沌系统检测方法的基本原理都是通过非自治混沌系统的参数共振微扰实现混沌抑制, 所采用的模型也以 Duffing-Holmes 方程及其修正形式为主. 此类方法在理想情况下可以获得极低的信噪比工作下限, 但也存在一些不足. 首先, 此类

系统一般采用计算过程较复杂的 Melnikov 函数作为判据来计算系统出现混沌的参数临界值, 但 Melnikov 方法的分析结果不是充分条件<sup>[8]</sup>, 只能作为大致参考. 依据此方法一般只能给出系统由周期状态进入混沌的参数条件, 而实际检测时所采用的由混沌到大尺度周期的参数临界值无法直接计算, 因而实际采用的参数常常与理论结果相差很大, 获得合适的参数临界值要靠经验与尝试. 其次, 系统在强噪声影响下的分叉特性非常复杂<sup>[9]</sup>, 容易出现类似混沌状态的假象, 造成错误判决, 因而只有噪声功率很低时才能获得较好的检测效果. 以上这些问题是由 Duffing 系统的固有特性决定的, 仅通过对方程进行修正难以完全解决, 因而有必要研究基于其它工作原理的新型混沌检测系统.

近几年来国内外学者对以 Lorenz 系统为代表的自治混沌系统进行了深入研究, 在混沌的控制和应用领域取得了新的进展<sup>[10-12]</sup>, 同时对该系统全局动力学特性的研究也日趋完善, 为进一步开发利用混沌控制技术提供了良好的理论基础. 如能将此类新型混沌控制原理应用于微弱信号检测系统的设计, 就可以广泛利用现有的理论研究进展和混沌控制技术的最新成果, 丰富微弱周期信号的混沌系统检测方法. 本文将给出利用受控 Lorenz 系统的相态图突变特性实现微弱周期脉冲信号检测的具体方案. 仿真实验表明, 检测参数的临界值范围与理论分析结果基本符合, 检测系统可以准确判别强噪声

中是否存在微弱的脉冲信号,其信噪比工作下限可达 dB,是一种简便易行的微弱周期信号检测方法。

## 1 检测模型与参数估计

### 1.1 检测模型的建立

利用混沌系统检测微弱信号的理论基础是混沌的抑制.在 Duffing 系统中,这一原理表现为当系统处于临界混沌状态时,若微弱信号频率与系统强迫激励频率发生共振,系统将突变为周期状态,从而实现检测目的.目前一般采用以 Duffing 方程为代表的非自治混沌系统中.对于自治混沌系统,由于不存在显含时间的强迫激励项,系统特征频率也不能解析表达,因此不能直接应用这一原理。

在近年来提出的混沌抑制方法中,利用参数非共振激励实现混沌抑制是一种值得关注的开环控制方法,且已在自治混沌系统中得到了成功应用.文献[10]利用频率远大于系统特征频率的谐和信号作为参数激励,实现了 Lorenz 系统的混沌抑制,使系统从混沌状态转变为周期状态或稳定于平衡点,并通过电路实验加以验证. Lorenz 系统是全局动力学行为已得到深入分析和严格证明的经典自治混沌系统,其系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\sigma = 10, b = 8/3$ , 当  $0 < r < 1$  时系统稳定于原点,  $1 < r < 24.74$  时原点不稳定,另两个平衡点稳定.  $r > 24.74$  时系统为混沌或周期状态. 将各状态变量看作相位连续、包络随机变化的谐和信号,定义系统的特征频率为信号相位的平均变化率<sup>[10]</sup>, 即

$$\omega_0 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi N(T)}{T}$$

其中  $N$  为时间  $T$  内信号的波峰或波谷数目. 以参数非共振激励混沌抑制原理为基础,假定待检测微弱周期脉冲信号的频率为  $\omega$ , 且  $\omega$  远大于系统(1)的特征频率  $\omega_0$ , 设计检测系统如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = r[1 + ks(\omega t) + \beta u(t)]x - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\sigma, b$  取值与系统(1)相同,  $r$  为可调节参数,  $s(t)$  表示幅度为 1、周期为  $2\pi$  的脉冲信号, 则  $ks$

( $\omega t$ ) 表示幅度为  $k$ 、频率为  $\omega$  的内置脉冲激励信号,  $\beta$  用于控制输入信号功率, 输入信号  $u(t) = d(t) + n(t)$ ,  $d(t)$  表示待检测的微弱周期脉冲信号,  $n(t)$  为背景噪声. 将变量  $x$  和  $y$  的相态图作为判决依据, 根据其状态的突变来判断微弱脉冲信号是否存在. 当待检测脉冲信号的频率为其它值  $\omega_1$  时, 对系统(2)作时间尺度变换  $t = \omega_1 t_1 / \omega$  即可。

### 1.2 检测参数的估计

下面利用平均法<sup>[13]</sup>来计算检测系统(2)的临界参数. 平均法是求解非线性振动方程的一种近似解析方法, 其基本思想是认为非线性振动系统的解具有快变和慢变两种时间尺度, 在快变周期内可将其视为幅值和初相角不变的简谐振动, 但较长时间内其幅值和初相角会缓慢变化, 即系统的解是包络缓慢变化的简谐振动. 首先考虑  $u(t) = 0$ , 即无输入信号时的情形. 将内置周期脉冲信号展开为傅立叶级数, 设信号周期为  $T$ , 脉冲宽度为  $D$ , 得

$$ks(\omega t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \cos(\omega_n t) \quad (3)$$

其中  $a_0 = D/T, a_n = 2\sin(n\pi D/T), \omega_n = n\omega$ , 利用平均法的基本思想并参考文献[10]的变量处理方法, 将系统变量分解为与内置激励有关的快变量和由系统(1)特征频率决定的慢变量, 即

$$x = x_s + x_q, y = y_s + y_q, z = z_s + z_q \quad (4)$$

变量下标  $s$  和  $q$  分别表示快变和慢变. 考虑到  $\omega \gg \omega_0$ , 在快变周期  $T = 2\pi/\omega$  内可认为慢变量保持不变, 而将快变量看作周期  $T$  内平均值为零的高频交流分量. 令算子  $\langle \cdot \rangle$  表示  $\frac{1}{T} \int_0^{t+T} (\cdot) dt$ , 则有  $\langle x \rangle = x_s(t), \langle y \rangle = y_s(t), \langle z \rangle = z_s(t)$ . 此外由于系统(2)具有低通特性<sup>[9]</sup>, 可设快变量幅度远小于慢变量. 将(4)式代入系统(2), 利用平均法和算子  $\langle \cdot \rangle$  对系统(2)进行积分得

$$\begin{cases} \langle \dot{x}_s + \dot{x}_q \rangle = \sigma(\langle y \rangle - \langle x \rangle) \\ \langle \dot{y}_s + \dot{y}_q \rangle = \langle r[1 + ks(\omega t) + \beta u(t)](x_s + x_q) \rangle - \langle y \rangle - \langle (x_s + x_q)(z_s + z_q) \rangle \\ \langle \dot{z}_s + \dot{z}_q \rangle = \langle (x_s + x_q)(y_s + y_q) \rangle - b \langle z \rangle \end{cases} \quad (5)$$

在积分区间内将各慢变量及其导数视为常量, 形如  $\langle x_s z_q \rangle$  的快慢变量乘积项积分为零, 而形如  $\langle x_q z_q \rangle$  的快变量乘积项积分为高阶小量, 可舍去. 将方程(5)展开并逐项积分后得慢变系统演化方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \sigma(y_s - x_s) \\ \dot{y}_s = r(1 + a_0)x_s - y_s - x_s z_s + rk \langle x_q \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \rangle \\ \dot{z}_s = x_s y_s - bz_s \end{cases} \quad (6)$$

对比系统(2)和(6),可得快变量的演化方程:

$$\begin{cases} \dot{x}_q = \sigma(y_q - x_q) \\ \dot{y}_q = rkx_s \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \end{cases} \quad (7)$$

消去  $\dot{y}_q$  后得  $\ddot{x}_q = \sigma \{ rkx_s \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t)] - \sigma(y_q - x_q) \}$ , 考虑到上式中  $x_q, y_q$  远小于  $x_s$ , 可略去, 则积分后得方程(7)的稳态响应为:

$$x_q = -\sigma rkx_s \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) / \omega_n^2] \quad (8)$$

由式(8)可知快变量的状态取决于慢变量, 因而只需研究慢变系统的特性即可. 利用积分关系式

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2, \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$$

可以计算系统(6)中的

$$\begin{aligned} rk \langle x_q \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(\omega_n t)] \rangle &= -\sigma r^2 k^2 x_s \times \\ &\langle \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(\omega_n t)] \sum_{m=1}^{\infty} [a_m \sin(\omega_m t) / \omega_m^2] \rangle = \\ &-\frac{1}{2} \sigma r^2 k^2 x_s \sum_{n=1}^{\infty} (a_n / \omega_n)^2 \end{aligned}$$

因此系统(2)的慢变系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_s = \sigma(y_s - x_s) \\ \dot{y}_s = r_s x_s - y_s - x_s z_s \\ \dot{z}_s = x_s y_s - bz_s \end{cases} \quad (9)$$

其中  $r_e = r[1 + a_0 - \frac{1}{2} \sigma r^2 k^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n / \omega_n)^2]$ , 对比系统(1)与系统(9), 当  $r_e = r$  时, 两系统具有相同的动力学特性. 由于  $r > 24.74$  时系统(1)进入混沌状态, 则系统(9)出现混沌时其参数  $k$  应满足的条件可由  $r_e > 24.74$  解得

$$\begin{aligned} k < k_c &= \sqrt{\frac{2(r + ra_0 - 24.74)}{\sigma r^2 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n / \omega_n)^2}} = \\ &\frac{\omega \pi}{2r} \sqrt{\frac{2(r + ra_0 - 24.74)}{\sigma \sum_{n=1}^{\infty} [\sin^2(a_0 n \pi) / n^4]}} \end{aligned} \quad (10)$$

即  $k < k_c$  时检测系统的输出信号  $y$  为混沌状态, 而当  $k$  略大于  $k_c$  时, 输出为与内置脉冲信号频率相同的周期运动. 因此, 在检测系统(2)中令内置激励幅值  $k = k_c$ , 适当调节系数  $\beta$  以控制输入信号功率, 当存在微弱周期脉冲信号  $s(t)$  时, 系统相态图

将由混沌状态突变为周期状态, 从而达到检测目的. 由于得到重整化系统(9)时略去了高阶小量, 临界参数  $k_c$  的实际取值会与理论预测值有一定偏离, 可通过系统仿真加以调整.

## 2 仿真实验

下面通过数值仿真测试系统的检测性能. 在检测系统(2)中取参数  $r = 168$ , 当无输入时系统的特征频率  $\omega \approx 10.5 \text{ rad/s}$ , 综合考虑参数要求后取检测频率  $\omega = 70 \text{ rad/s}$ , 脉冲信号参数  $a_0 = D/T = 0.1$ , 信号波形如图1所示. 由(8)式计算结果并经系统仿真修正后得检测参数临界值  $k_c = 2.36889$ . 令  $k = k_c, \beta = 1$ , 当系统输入信号  $u(t) = 0$  时, 系统相态图为临界混沌状态, 如图2所示. 当输入信号为功率

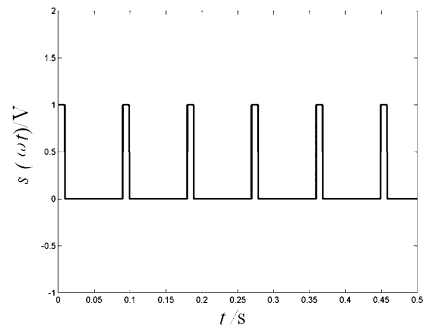


图1 脉冲信号波形图

Fig.1 waveform of pulse signal

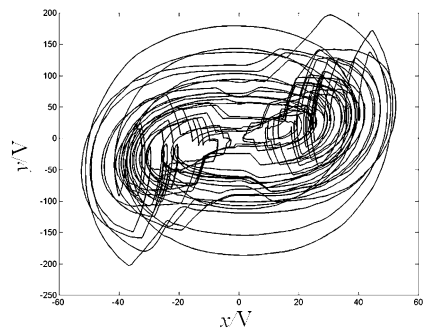


图2 输入信号为白噪声时的系统相图

Fig.2 System phase portrait when the input signal is white noise

$P = 9.8 \times 10^3 \text{ W}$  的高斯白噪声时, 系统输出依然为混沌信号. 令  $d(t) = \mu s(\omega t)$ , 当  $\mu$  由 0 逐渐增大时 (步长选为  $0.5 \times 10^{-6}$ ), 系统输出迅速发生变化. 当  $\mu = 1 \times 10^{-5}$  时, 输入信号依然处于极低的信噪比, 如图3所示, 但输出信号已经突变为周期信号, 其相态图 (略去过渡状态) 表现出明显周期特征, 如图4所示. 因此, 通过观察系统相态图是否为稳定周期轨道即可判定待检测的微弱周期脉冲信号

是否存在. 此外也可由系统时域波形图进行判别, 相应图形此处略.

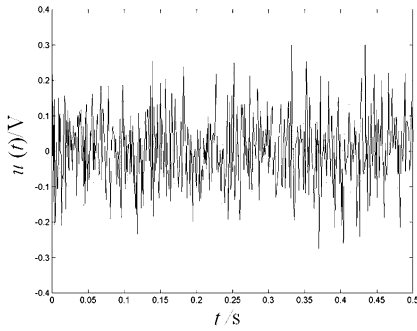


图3 含微弱脉冲信号的白噪声信号

Fig. 3 White noise signal including weak periodic pulse signal in it

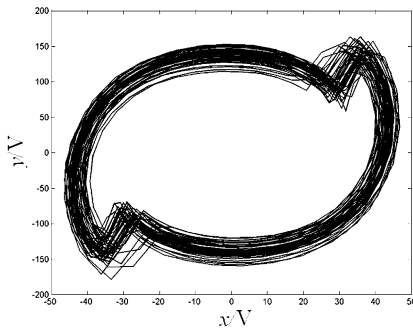


图4 输入信号为图3中信号时的系统相图

Fig. 4 System phase portrait when the input is signal in Fig. 3

从以上仿真结果可以计算出系统的信噪比工作门限为

$$\text{SNR} = 10 \log \frac{0.1 \times (1 \times 10^{-5})^2}{9.8 \times 10^{-3}} = -89.93 \text{ dB}$$

如果进一步优化系统参数并降低检测概率要求, 还可以继续降低信噪比工作下限. 不过此方法只能检测持续的周期脉冲信号, 而无法判别单个脉冲或非周期脉冲信号的存在.

### 3 结论

(1) 利用参数非共振激励混沌抑制原理, 建立了基于受控 Lorenz 系统的强噪声背景下微弱周期脉冲信号检测模型, 并通过平均法和重整化分析方法确定检测参数临界值. 当输入信号中含有微弱周期脉冲信号时系统相态图由混沌状态突变为周期状态. 仿真实验表明此方法有效, 且可以达到极低的信噪比工作下限.

(2) 相比于目前研究较多的基于参数共振微扰方法的混沌检测系统, 本方法可以由理论分析结果预测参数临界值的范围, 为最优检测参数的选取

提供指导. 同时此类系统的应用也有利于借鉴在自治混沌系统的控制领域中已取得的大量研究成果, 为微弱周期信号的混沌检测方法提供新原理和新思路.

### 参 考 文 献

- 1 马彦, 石要武, 康小涛. 混合色噪声背景下谐波恢复: 一种可消除谱估计伪峰的互谱 SVD-SL 方法. 电子学报, 2002, 30(1):14~18 (Ma Y, Shi Y W, Kang X T. Harmonic recovery in mixed color noise: a cross spectrum SVD-SL method without fake peak in spectrum estimate. *Acta Electronica Sinica*, 2002, 30(1):14~18 (in Chinese))
- 2 Birk D I. Chaotic oscillators and CMFFNS for signal detection in noise environments. *IEEE International Joint Conference on Neural Networks*, 1992, 881~888
- 3 王冠宇, 陶国良, 陈行等. 混沌振子在强噪声背景信号检测中的应用. 仪器仪表学报, 1997, 18(2):209~212 (Wang G Y, Tao G L, Chen X, et al. Application of signal detection in strong noise with chaotic oscillations. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 1997, 18(2):209~212 (in Chinese))
- 4 赵向阳, 魏明献, 刘君华. 基于混沌技术的频率测试仪的研制. 测试技术学报, 2004, 18(2):156~161 (Zhao X Y, Wei M X, Liu J H. Development of frequency test instrument based on chaos technology. *Journal of Test and Measurement Technology*, 2004, 18(2):156~161 (in Chinese))
- 5 李月, 杨宝俊. 检测强噪声背景下周期信号的混沌系统. 科学通报, 2003, 48(1):19~20 (Li Y, Yang B J. Chaotic systems of detecting period signals in strong noise. *Chinese Science Bulletin*, 2003, 48(1):19~20 (in Chinese))
- 6 Li Y, Yang B J, Du L Z. The bifurcation threshold value of the chaos detection system for a weak signal. *Chinese Physics*, 2003, 12(7):714~720
- 7 李月, 路朋, 杨宝俊等. 用一类特定的双耦合 Duffing 振子系统检测强噪声背景中的周期信号. 物理学报, 2006, 55(4):1672~1677 (Li Y, Lu P, Yang B J, et al. Applying a special kind of two coupled Duffing oscillators to detect periodic signals under the background of strong colored noise. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(4):1672~1677 (in Chinese))
- 8 刘曾荣. 混沌的微扰判据. 上海:上海科技教育出版社,

- 1994(Liu Z R. Perturbation criteria for chaos. Shanghai: Shanghai Eduzational Publishing House, 1994 (in Chinese))
- 9 杨晓丽, 徐伟, 孙中奎. 谐和激励与有界噪声激励下具有同宿和异宿轨道的 Duffing 振子的混沌运动. 物理学报, 2006, 55(4):1678 ~ 1686(Yang X L, Xu W, Sun Z K. Influence of harmonic and bounded noise excitations on chaotic motion of Duffing oscillator with homoclinic and heteroclinic orbits. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55(4):1678 ~ 1686(in Chinese))
- 10 Choe C U, Hohne K, Benner H, et al. Chaos suppression in the parametrically driven Lorenz system. *Physical Review E*, 2005, 72(3):036206
- 11 Soong C Y, Huang W T, Lin F P, et al. Controlling chaos with weak periodic signals optimized by a genetic algorithm. *Physical Review E*, 2004, 70(1):016211
- 12 张丽丽, 雷友发. 一个三维非线性系统的混沌动力学特征. 动力学与控制学报, 2006, 4(1):5 ~ 7(Zhang L L, Lei Y F. The chaotic characters of a 3-dimensional nonlinear dynamics. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1):5 ~ 7(in Chinese))
- 13 刘延柱, 陈立群. 非线性振动. 北京:高等教育出版社, 2001(Liu Y Z, Chen L Q. Nonlinear vibrations. Beijing: Higher Education, 2001 (in Chinese))

## DETECTION OF WEAK PULSE SIGNALS BASED ON A CONTROLLED LORENZ SYSTEM\*

Wang Deshi   Chen Long   Shi Yuedong

(Weaponry Engineering Department, Naval University of Engineering, Wuhan 430033)

**Abstract** Based on the principle about suppression of chaos with parametric nonresonant drive in the Lorenz system, the detection of weak periodic pulse signals in strong noise was realized. Periodic pulse signal, whose frequency is much more larger than the system characteristic frequency, was introduced as the system internal drive signal. According to the parametric equivalent relation obtained by the averaging method and renormalization method between the controlled Lorenz system and the original system, the critical value of detection parameter was determined. Simulations results show that rather low signal-to-noise ratio in detection can be obtained by the proposed system. This method can predict the range of parameter threshold by theoretical analysis result. The detection scheme is simple and feasible, which is fit for generalization and application in object detection and fault diagnosis.

**Key words** Lorenz system, parametric drive, periodic pulse signal, signal detection