

周期激励频率对蔡氏振子的动力学行为的影响*

陈章耀 张晓芳 季颖 毕勤胜

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

摘要 蔡氏振子在不同的参数条件下可以表现为两个共存的对称单涡卷周期振荡以及单个对称的双涡卷周期行为. 两个对称的单涡卷周期振荡在周期外激励作用下, 随着频率的变化, 分别演化为两个对称的混沌吸引子, 在混沌区域中存在着不同形式的周期窗口以及倍周期分岔过程. 同时在低频激励下, 两个对称的混沌吸引子会相互作用, 形成扩大的混沌吸引子, 其相应的轨迹交替在两个混沌子结构上来回长时间逗留. 而双涡卷周期行为在周期激励下, 可以导致共存的两个对称的概周期振荡. 它们之间经相互作用形成单个概周期解, 进而演化为双涡卷混沌吸引子.

关键词 周期激励, 蔡氏振子, 混沌吸引子, 共存

引言

作为一个经典的混沌电路, 蔡氏模型的复杂动力学行为经过多年的工作已经被深刻地认识^[1,2], 人们刻划了其通过倍周期分岔进入混沌的机制^[3], 给出了混沌吸引子从单涡卷到双涡卷的演化过程^[4]. 基于蔡氏模型, 通过适当改变其中的部分电路结构, 可以相应地建立其他混沌电路^[5]. 如通过增加一个与电感串联的线性电阻, 则可得到具有更为复杂混沌行为的蔡氏振子. 近年来各国学者对蔡氏电路及其各种修改电路进行了大量理论分析和实验研究^{[6][7]}, 揭示了其中诸如阵发混沌、周期激励增加等丰富的非线性行为^[8], 讨论了耦合蔡氏电路中的各种同步机制^[9]. 迄今为止, 这些结果大都是基于自治系统, 而对于电路系统而言, 其结构中可能包含各种形式的交变电源^[10]. 这些随时间按一定规律变化的交变电源对原自治系统会产生相应的激励, 从而导致整个电路的复杂化. 对于各种激励下的蔡氏振子的动力学特性, 据笔者所知, 至今尚没有较为系统的报道. 探讨周期激励下非线性电路的演化过程, 尤其是激励频率变化对系统的影响, 对于深入理解非线性电路系统的复杂性、控制其振荡特性都有重要的现实意义. 本文正是基于这样的背景, 分析周期激励频率变化下蔡氏振子的各种分岔行为.

1 周期激励下蔡氏振子的数学模型

蔡氏振子是由五个线性电子元件(两个电容、一个电感、两个电阻)和一个被称为蔡氏二极管的非线性电阻组成(图1a). 当 $R_0 = 0$ 时蔡氏振子即为经典的蔡氏电路^[4]. 为探讨周期激励下蔡氏振子的行为, 我们在该电路上并联一个周期变化的交变电流源(图1b). 这样就获得了一个非自治蔡氏振子. 其电路的状态方程为

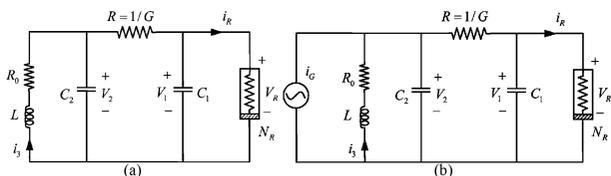


图1 电路图 (a) 蔡氏振子; (b) 周期激励下蔡氏振子
Fig. 1 (a) Chua's oscillator; (b) Nonautonomous Chua's oscillator with

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= \frac{1}{C_1} [G(v_2 - v_1) - f(v_1)], \\ \frac{dv_2}{dt} &= \frac{1}{C_2} [G(v_1 - v_2) + i_3 + I_C \sin \omega t], \\ \frac{di_3}{dt} &= -\frac{1}{L} (v_2 + R_0 i_3) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $G = \frac{1}{R}$, $\omega = 2\pi f$, I_C 和 f 分别代表交变电流源的幅值和频率.

$$f(v_1) = G_b v_1 + \frac{1}{2} (G_a - G_b) \{ |v_1 + E| - |v_1 - E| \} \quad (2)$$

2009-07-08 收到第1稿, 2009-07-22 收到修改稿.

* 国家自然科学基金资助项目(10872080)

公式(2)描述了通过非线性电阻 N_R 的电流与电压之间的关系,简称 $v-i$ 特性曲线方程,该曲线关于原点对称、三段线性且连续(见图2)。

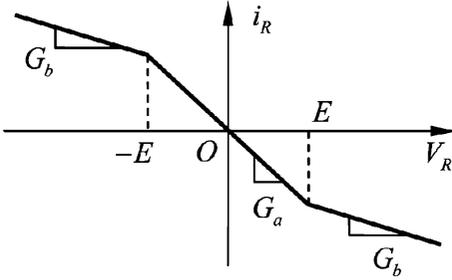


图2 非线性电阻的特性曲线

Fig.2 characteristic of the nonlinear resistor

引入变量 $\theta = \omega RC_2, A = \frac{R}{E} I_C, x = \frac{v_1}{E}, y = \frac{v_2}{E}, z = i_3 \frac{R}{E}, \alpha = \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, \gamma = \frac{RR_0 C_2}{L}, a = RG_b, b = RG_b,$

$\tau = \frac{t}{RC_2}$, 则方程(1)可以转换为如下无量纲形式

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= \alpha(y - x - f(x)), \frac{dy}{d\tau} = x - y + z + A \sin \theta \tau, \\ \frac{dz}{d\tau} &= -\beta y - \gamma z \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b) \{ |x + 1| - |x - 1| \} \quad (4)$$

2 蔡氏振子的平衡点分析

当 $I_C = 0$ 或 $\omega = 0$ 时,方程(3)即为典型的蔡氏振子.从方程(3)可知,无论怎样的参数条件,系统总存在平凡平衡点 $E_0 = (0, 0, 0)$.进一步分析可以发现,当 $(\beta + \gamma)b + \beta \neq 0$ 时:

对于 $\left| \frac{(b-a)(\beta+\gamma)}{\beta+b\beta+b\gamma} \right| > 1$,存在两个不平凡的平衡点,平衡点可写为:

$$\begin{aligned} E_- &= \left(-\frac{(b-a)(\beta+\gamma)}{\beta+b\beta+b\gamma}, \frac{(b-a)\gamma}{\beta+b\beta+b\gamma}, \frac{(b-a)\beta}{\beta+b\beta+b\gamma} \right), \\ E_+ &= \left(\frac{(b-a)(\beta+\gamma)}{\beta+b\beta+b\gamma}, \frac{(b-a)\gamma}{\beta+b\beta+b\gamma}, -\frac{(b-a)\beta}{\beta+b\beta+b\gamma} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

而对于 $\left| \frac{(b-a)(\beta+\gamma)}{\beta+b\beta+b\gamma} \right| < 1$,则只有一个平凡的平衡点即 $E_0 = (0, 0, 0)$.这些平衡点的稳定性由相应的特征方程确定.取定参数:

$$L = 12.0mH, C_2 = 21.32mF, R_0 = 0.0309\Omega,$$

$$G_a = -0.879mS, G_b = -0.412mS, E = 1mV \quad (6)$$

图3给出了在 $(R-C_1)$ 平面上的分岔集,其中 S_1, S_2 为简单分岔集, H_1, H_2 为 Hopf 分岔集.

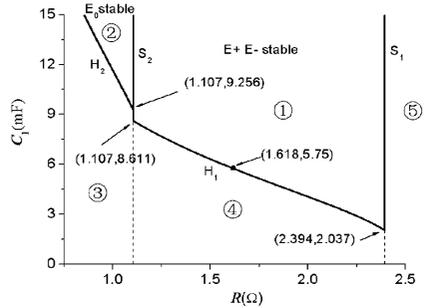


图3 平面上的分岔集线

Fig.3 Bifurcation sets on parameter plane

当参数穿越 H_1 进入区域④时, E_-, E_+ 同时失稳,均由 Hopf 分岔导致一对共存的周期振荡,随着参数的进一步变化,这对共存的周期行为均可以分别通过倍周期分岔进入混沌,也可以通过其周期吸引子在空间的扩张而产生相互作用,形成单个具有对称结构的周期振荡,进而进入混沌.数值模拟可以证实这些平衡点的稳定性及其分岔特性,在此从略.

由于蔡氏振子具有对称性,随着参数的变化,可以存在着单个具有对称结构的吸引子或共存着两个对称的吸引子.我们首先讨论蔡氏振子的分岔特性,进而探讨这两种不同情形下的振子随着周期激励频率变化下的复杂动力学行为.

3 周期激励下的蔡氏振子

当 $I_C \neq 0$ 时,蔡氏振子会在周期激励下产生许多复杂的动力学行为.我们讨论如下两种较为典型的情形:一种是共存着一对对称的周期吸引子 P_1 和 P_2 (图4a, b),另一种是该振子只存在单个具有

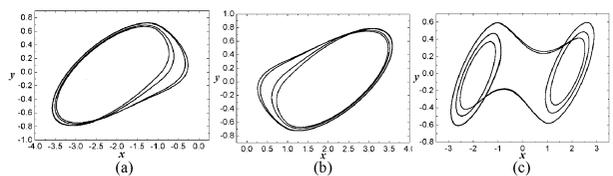


图4 蔡氏振子的周期吸引子:(a)与(b)为当 $R = 1.571\Omega, C = 5.75mF$ 共存的一对对称的周期解;(c)为当 $R = 1.477\Omega, C = 5.75mF$ 时单个具有对称结构的周期解

Fig.4 Periodic attractors of Chua's oscillator:(a),(b) two coexisted symmetric periodic solutions for $R = 1.571\Omega, C = 5.75mF$;(c) a periodic solution with two symmetric structures for $R = 1.477\Omega, C = 5.75mF$

对称结构的周期振荡 P_3 (图 4c), 它们分别在周期激励下的动力学演化过程.

3.1 P_1 和 P_2 单独存在时的分岔行为

当 $R = 1.571\Omega, C_1 = 5.75\text{mF}$ 时, 自治蔡氏振子共存着一对对称的周期吸引子 (图 4a, b). 图 5 给出了幅值为 $I_c = 12.5\text{mA}$ 周期激励频率变化下的分岔过程.

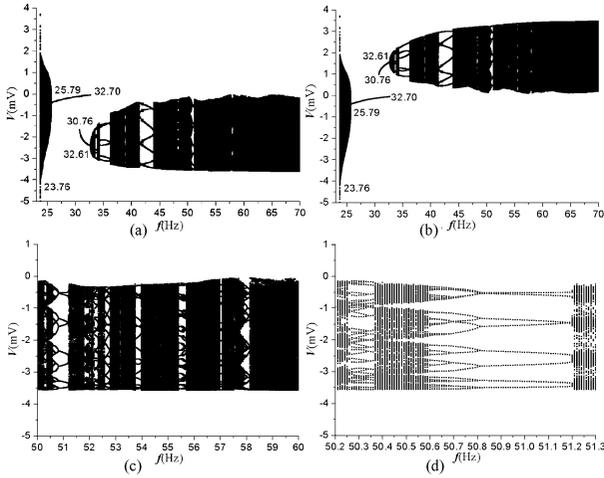


图 5 分岔图 (a) 与 (b) 为共存对称的两种分岔模式 (c) 与 (d) 为 (a) 中分岔模式的局部放大图

Fig. 5 Bifurcation diagrams: (a) (b) two coexisted symmetric forms (c) (d) locally enlarged bifurcation

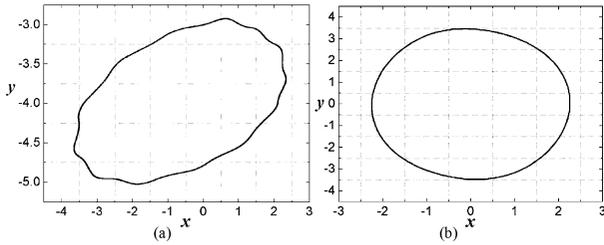


图 6 不同频率下的行为 (a) $f = 23.80\text{Hz}$ 时的 Poincaré 映射, (b) $f = 27.00\text{Hz}$ 时的相图

Fig. 6 Dynamics for different frequencies:

(a) Poincaré maps $f = 23.80\text{Hz}$, (b) Phase portraits $f = 27.00\text{Hz}$

周期激励频率变化下的振子也存在两种对称的分岔模式. 当 $f < 25.79\text{Hz}$ 时, 电路呈概周期振荡 (图 6a). 在 $f = 25.79\text{Hz}$ 处产生亚临界 Hopf 分岔, 导致当 $f \in [25.79\text{Hz}, 32.70\text{Hz}]$ 时, 概周期振荡失稳, 演化为周期行为 (图 6b). 而当 $f \in [30.76\text{Hz}, 32.61\text{Hz}]$ 时, 共存着三种周期振荡现象, 其相应的轨迹分别围绕 E_-, E_0, E_+ (图 7). 当 $f \in [32.61\text{Hz}, 32.70\text{Hz}]$ 时, 围绕 E_-, E_+ 的周期振荡产生 Hopf 分岔, 扭扩为概周期振荡, 而围绕平衡点 E_0 的周期振荡依然保持稳定 (图 8), 直到 $f = 32.70\text{Hz}$ 时消失.

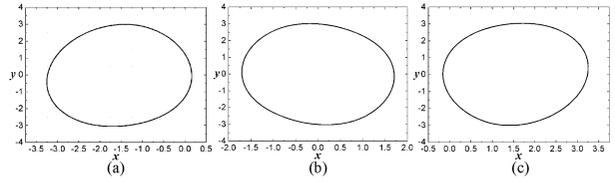


图 7 $f = 31.00\text{Hz}$ 时三个共存的周期解

Fig. 7 Three coexisted periodic solutions for $f = 31.00\text{Hz}$

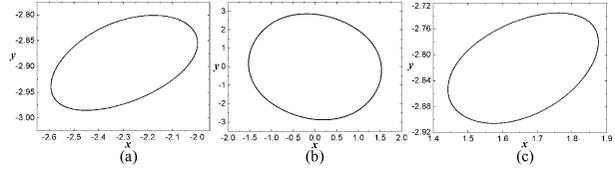


图 8 $f = 32.68\text{Hz}$ 时共存的吸引子 (a) (c) Poincaré 映射; (b) 相图
Fig. 8 Coexisted attractors with $f = 32.68\text{Hz}$ (a) (c) Poincaré maps; (b) Phase portrait

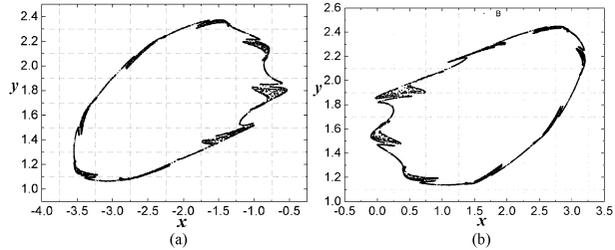


图 9 $f = 49.00\text{Hz}$ 时共存的一对混沌吸引子

Fig. 9 The coexisted chaotic attractors for $f = 49.00\text{Hz}$

随着 f 的继续增加, 共存的两种分岔模式均在周期和概周期之间来回交替, 直到 $f = 49.00\text{Hz}$ 时分别由环面破裂导致两个对称的混沌吸引子 (图 9). 在混沌区域中可以观察到各种周期窗口. 从局部放大图 (图 5c, d) 中可以明显地发现典型的倒倍周期分岔窗口以及在混沌和周期之间互相演化的阵发现象, 这里只画出与 E_- 相关的分岔图.

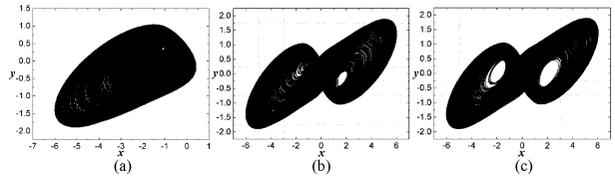


图 10 不同频率下的混沌吸引子 (a) $f = 0.01\text{Hz}$ 时共存的一对混沌吸引子中的一个; (b) $f = 0.02\text{Hz}$; (c) $f = 0.04\text{Hz}$

Fig. 10 The chaotic attractors for different frequencies:

(a) one of two coexisted symmetric chaotic attractors $f = 0.01\text{Hz}$; (b) $f = 0.02\text{Hz}$; (c) $f = 0.04\text{Hz}$

当外激励频率相对较小时, 从 $f = 0.0$ 时 E_-, E_+ 经 Hopf 分岔和倍周期分岔出两个对称的周期 4 解 (图 4a, b). 随 f 的增加, 系统分别演化为两个对

称的混沌吸引子(这里只画出一个,图 10a)). 当 f 继续增加,这两个对称的吸引子会产生相互作用,从而形成连接 E_- , E_+ 的扩大了混沌振荡. 随着 f 的增加,混沌吸引子的轨迹虽然在空间上拓展,但其定性结构保持不变(图 10b, c). 同时从时间历程上可以发现,混沌轨迹明显地分别在两个原来对称的混沌子结构上长时间逗留,其相应的逗留时间长度随 f 的增加而缩短(图 11). 同时与 f 较大时的情况相比,系统呈现出明显的快慢效应。

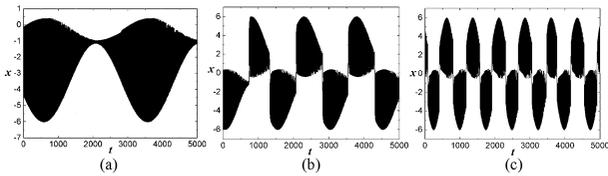


图 11 相应的时间历程(a) $f=0.01\text{Hz}$; (b) $f=0.02\text{Hz}$; (c) $f=0.04\text{Hz}$

Fig. 11 Time histories for different frequencies;

(a) $f=0.01\text{Hz}$; (b) $f=0.02\text{Hz}$; (c) $f=0.04\text{Hz}$

3.2 只存在 P_3 时的分岔行为

当 $R=1.477\Omega$, $C_1=5.75\text{mF}$ 时,原自治系统只存在单个具有对称结构的周期吸引子(图 4c),图 12 绘出了幅值为 $I_c=23.09\text{mA}$ 随周期激励频率变

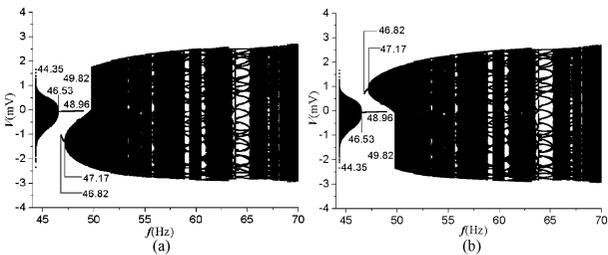


图 12 共存的两种分岔模式

Fig. 12 Two coexisted bifurcation forms

化的分岔特性. 此时依然共存有两个不同的分岔模式. 当 $f < 46.53\text{Hz}$ 时,外激励使得原周期运动扭扩为概周期振荡. 相似地,当 $f \in [46.82\text{Hz}, 47.17\text{Hz}]$ 时,三个分别围绕 E_- , E_0 , E_+ 的周期振荡共存,而当 $f \in [47.17\text{Hz}, 48.96\text{Hz}]$,围绕 E_0 的周期解仍保持稳定,而与 E_- , E_+ 相关的周期轨道经 Hopf 分岔后分别产生两个对称概周期解. 当 $f \in [48.96\text{Hz}, 49.82\text{Hz}]$ 时,与 E_0 相关的周期轨道消失,只剩下两个对称的概周期振荡(图 13a, b). 当 $f > 49.82\text{Hz}$ 时,两个概周期吸引子相互作用,形成扩大了的原点对称的单个概周期振荡(图 13c). 该概周期振荡失稳后进入混沌状态,在混沌区域中,存在各类形式的周期窗口. 随着频率 f 的继续增加,混沌吸引

子结构基本保持定性一致(图 13d).

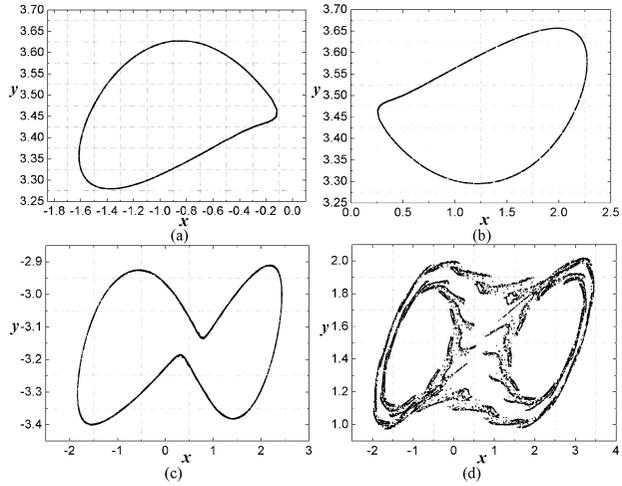


图 13 不同频率下的 Poincaré 映射 (a) (b) $f=49.20\text{Hz}$ 时共存的概周期解; (c) $f=50.50\text{Hz}$ 时的概周期解; (d) $f=62.30\text{Hz}$ 时的混沌吸引子

Fig. 13 Poincaré maps for different frequencies: (a) (b) coexisted quasi-periodic solutions for $f=49.20\text{Hz}$, (c) quasi-periodic solutions for $f=50.50\text{Hz}$, (d) chaotic attractor for $f=62.30\text{Hz}$

4 结论

蔡氏振子对于两个共存的对称单涡卷和单个原点对称的双涡卷周期振荡在周期激励下具有不同的分岔特性. 单涡卷周期解随着外激励频率的变化,分别导致两个对称的混沌行为,而双涡卷周期解则走向双涡卷混沌. 同时,其分岔过程中的精细结构也存在着明显的差别. 需要指出的是,当外激励频率很小时,系统呈现出明显的快慢效应,即使在两个单涡卷混沌相互作用导致双涡卷混沌吸引子后,这种快慢效应依然非常明显。

参 考 文 献

- 1 Chua L O, Lin G N. Canonical realization of Chua's circuit family. *IEEE Trans. Circ. Syst*, 1990, 37: 885 ~ 902
- 2 Albuquerque H A, Rubinger R M, Rech P C. Theoretical and experimental time series analysis of an inductorless Chua's circuit. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2007, 233: 66 ~ 72
- 3 Korneta W, Gomes I, Mirasso C, Toral R. Experimental study of stochastic resonance in a Chua's circuit operating in a chaotic regime. *Physica D*, 2006, 219: 93 ~ 100
- 4 Chua L O, Wu C W, Huang A, Zhong G Q. A universal circuit for studying and generating chaos. *IEEE Trans. Circ*

- Syst*, 1993 40:732 ~ 745
- 5 李险峰, 张建刚, 褚衍东, 常迎香. 一个新类 Lorenz 混沌系统的动力学分析及电路仿真. *动力学与控制学报*, 2007, 5(4): 324 ~ 329 (Li Xianfeng, Zhang Jiangan, Chu Yandong, ChangYingxian. Dynamics analysis and circuit experiment simulation for a new Lorenz-like chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 324 ~ 329 (in Chinese))
 - 6 Tang F, Wang L. An adaptive active control for the modified Chua's circuit. *Phys. Lett. A*, 2005, 346: 342 ~ 346
 - 7 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (Chen Baoying. Linear feedback control for synchronization of liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 1 ~ 4 (in Chinese))
 - 8 Chen Z, Zhang X, Bi Q. Bifurcations and chaos of coupled electrical circuits. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2008, 9: 1158 ~ 1168
 - 9 Cincotti S, Stefano S D. Complex dynamical behaviours in two non-linearly coupled Chua's circuits. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 21: 633 ~ 641
 - 10 Chen L, Wang D S. Nonfeedback control of Chen's chaotic system. *Acta Phys. Sin.*, 2007, 56: 91 ~ 94 (in Chinese)

THE INFLUENCE OF THE FREQUENCY RELATED TO THE PERIODIC EXCITATION ON THE DYNAMICAL BEHAVIORS OF CHUA'S OSCILLATOR*

Chen Zhangyao Zhang Xiaofang Ji Ying Bi Qinsheng
(Faculty of Science, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

Abstract Under different parameter conditions, Chua's oscillator may display two types of coexisted single-scrolled periodic oscillations which are symmetric to each other, or behaves in single double-scrolled periodic oscillation with symmetric structure. With the variation of the periodic excitation, the two coexisted periodic solutions may evolve to two symmetric chaotic attractors respectively. Periodic windows as well as period-doubling sequence can be observed in the evolution. Furthermore, for relatively low frequency related to the excitation, the two coexisted chaotic attractors may interact with each other to form an enlarged chaotic attractor, and the trajectory may be around the two sub-attractors in turn for relatively long time. While for the double-scrolled periodic oscillation, the periodic excitation may cause two coexisted quasi-periodic movements, which may interact with each other to form a single quasi-periodic oscillation and finally evolve to a double-scrolled chaotic attractor.

Key words periodic excitation, Chua's oscillator, chaotic attractors, coexistence