

一类三维混沌系统的 Bautin 分岔分析*

李群宏 谭洁燕 席洁珍 丁学利

(广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

摘要 研究一类具有三维自治常微分方程组形式的新的类 Chen 系统的余维二分岔. 首先通过坐标变换, 把原系统的平衡点平移到新系统的原点. 通过对平移后所得新系统的 Jacobi 矩阵的分析, 推导系统发生余维二 Bautin 分岔的参数条件. 借助计算机对类 Chen 系统进行数值仿真, 得到该系统发生 Bautin 分岔的分岔图, 与理论推导结果相符合, 从而验证了理论推导的正确性.

关键词 类 Chen 系统, 余维二, Bautin 分岔, 数值仿真

引言

自 1963 年 Lorenz^[1] 发现第一个混沌吸引子以来, 混沌理论得到了迅猛的发展. 由于混沌理论在通信、交通等诸多领域中的广泛应用, 许多学者对 Lorenz 进行了深入的研究. 在 Lorenz 吸引子的研究基础上, 1999 年 Chen^[2] 利用混沌反控制方法成功实现了一个新的三维混沌系统—Chen 系统. 2002 年 Lü 和 Chen^[3] 基于同样的思想发现了 Lü 系统, 这个三维混沌系统在 Lorenz 系统和 Chen 系统之间架起了一座桥梁. 对混沌系统的动力学行为进行深入细致的研究, 有助于我们更好地利用混沌吸引子. Lü 和 Duan^[4] 通过严格的数学推导及数值仿真研究了混沌 Lü 系统的余维二 Bautin 分岔, 得到了 Bautin 分岔的参数条件, 并给出了分岔曲线的解析表达式. Mello, Coelho^[5] 进一步讨论了 Lü 系统发生余维三退化 Hopf 分岔的情形. 徐慧东、谢建华^[6] 通过中心流形理论和范式方法理论分析了高维映射的余维二 Hopf-pitchfork 分岔. Li 等^[7] 在 Chen 系统中加入一个动态的控制器得到了所谓超混沌 Chen 系统. El-Dessoky^[8] 基于主动控制理论, 研究了超混沌 Chen 系统的同步与反同步问题. Yan 利用线性反馈控制、速度反馈控制、非线性双周期函数反馈控制和非线性双曲函数反馈控制等四种方法将超混沌 Chen 系统镇定到不稳定的平衡点.

最近, 王震、毛鹏伟^[9] 提出一种具有三维自治常微分方程组形式的新的类 Chen 系统, 并讨论了

该系统基本的动力学行为和平衡点处的 Hopf 分岔. 本文通过理论推导和数值仿真的方法对文献 [9] 中提出的类 Chen 系统做进一步分析, 讨论其余维二的 Bautin 分岔, 得到了更丰富的动力学结果.

1 Bautin 分岔的理论分析

考虑一个新的类 Chen 系统^[9], 其方程形式如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = (c - a)x - axz + cy \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c 为实数, 且 $abc \neq 0$. 较之于 Rossler 系统等其余的一些系统, 该系统在参数的选择上有较大的空间, 因而可表现出更加复杂的动力学行为. 下面我们将对该系统作进一步的理论分析.

为求系统(1)的平衡点, 令 $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$. 显然, (i) 当 $2abc - a^2b = 0$ 时, 系统只有一个平衡点 $O(0, 0, 0)$; (ii) 当 $2abc - a^2b > 0$ 时, 系统有三个平衡点 $O(0, 0, 0), E_+(\sqrt{\frac{2bc - ba}{a}}, \sqrt{\frac{2bc - ba}{a}}, \frac{2c - a}{a})$ 和 $E_-(-\sqrt{\frac{2bc - ba}{a}}, -\sqrt{\frac{2bc - ba}{a}}, \frac{2c - a}{a})$. 关于这三个平衡点的稳定性, 有以下结果:

引理 1^[9] 当 $2abc - a^2b > 0$, 则 (1) $O(0, 0, 0)$ 是非渐进稳定的, (2) 如果 $b < 0$ 或 $a > c, b > 0$ 或 $a < c$, 则 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的.

引理 2^[9] 平衡点 E_+, E_- 是渐进稳定的, 当且

仅当 $b+a-c > 0, 2abc-a^2b > 0, b^2c-bc^2-3abc+2a^2b > 0$.

我们仅对平衡点 E_+ 处的分岔进行讨论, 其余平衡点处的分岔可做类似讨论. 为此先将平衡点移至原点 $O(0,0,0)$, 即做坐标变换:

$$X = x - \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}, Y = y - \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}, Z = z - \frac{2c-a}{a} \quad (2)$$

将变换(2)代入(1)式, 得新系统:

$$\begin{cases} \dot{X} = a(Y-X) \\ \dot{Y} = -cX + cY - a\sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}Z - aXZ, \\ \dot{Z} = \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}X + \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}Y - bZ + XY \end{cases} \quad (3)$$

系统(3)的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -a\sqrt{\frac{2bc-ba}{a}} \\ \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}} & \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}} & -b \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$p = \begin{pmatrix} \frac{-(a-2c)(4a^4-14a^3c+6a^2c^2+10ac^3+2c^4-i(5ac^2-2a^2c-c^3)\sqrt{-2a^2+3ac+c^2})}{2a\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}(4a^4-16a^3c+14a^2c^2+3ac^3+c^4)} \\ \frac{-(a-2c)(4a^4-10a^3c+4a^2c^2+2ac^3+i(3ac^2+6a^2c+c^3-4a^3)\sqrt{-2a^2+3ac+c^2})}{2a\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}(4a^4-16a^3c+14a^2c^2+3ac^3+c^4)} \\ \frac{c(a-2c)(a+c)}{14a^3+2ac^2-2c^3-8a^2c-i(6ac+2c^2-4a^2)\sqrt{-2a^2+3ac+c^2}} \end{pmatrix},$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 \mathbb{C}^3 中标准内积.

将系统(3)改写成如下形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ -c & c & -a\sqrt{\frac{2bc-ba}{a}} \\ \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}} & \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}} & -b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -aXZ \\ XY \end{pmatrix} \quad (7)$$

记 $F(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -aXZ \\ XY \end{pmatrix}$, 由

$$B_i(u, v) = \sum_{j,k=1}^3 \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} u_j v_k, i=1, 2, 3 \quad (8)$$

系统(3)的 Jacobi 矩阵对应的特征方程为

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a+b-c)\lambda^2 + bc\lambda + 4abc - 2a^2b \quad (5)$$

假设方程(5)有一对共轭纯虚特征根 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$,

其中 $\omega > 0$. 则可推得

$$\begin{cases} \omega^2 = bc > 0, \\ b = \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c} \end{cases} \quad (6)$$

这里 $c^2 + 3ac - 2a^2 > 0$.

由 $Jq = i\omega q, q \in \mathbb{C}^3$, 借助 Mathematica 5.0 推导得

$$q = \begin{pmatrix} \frac{-a^2\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}}{(2a^2-3ac-c^2)+(a-c)\sqrt{2a^2-3ac-c^2}} \\ \frac{-a\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}(a+\sqrt{2a^2-3ac-c^2})}{(2a^2-3ac-c^2)+(a-c)\sqrt{2a^2-3ac-c^2}} \\ 1 \end{pmatrix},$$

由 $J^T p = -i\omega p, p \in \mathbb{C}^3$, 且使得 $\langle p, q \rangle = 1$, 可求得特征向量 p 的表达式为

$$C_i(u, v, w) = \sum_{j,k,l=1}^3 \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} u_j v_k w_l, i=1, 2, 3 \quad (9)$$

由式(8)和(9), 以及非线性项 F 的表达式, 我们有

$$\begin{aligned} B(q, \bar{q}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -a(q_1 \bar{q}_3 + \bar{q}_1 q_3) \\ q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_1 q_2 \end{pmatrix}, \\ B(q, q) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -2aq_1 q_3 \\ 2q_1 q_2 \end{pmatrix}, C(q, q, \bar{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

将 p, q 表达式代入式(10)进行计算, 并再次利用 Mathematica 5.0, 我们容易计算得到 J^{-1} 及 $(2i\omega E - J)^{-1}$, 其中 E 为 3×3 阶单位矩阵, 则有

$$J^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a-c}{-2a^2+4ac} & \frac{1}{2a-4c} & \frac{1}{2\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}} \\ \frac{a-3c}{2a^2-4ac} & \frac{1}{2a-4c} & \frac{1}{2\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}} \\ \frac{c}{a^2\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}} & -\frac{1}{a\sqrt{-7a+\frac{2a^2}{c}+5c+\frac{2c^2}{a}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$(2i\omega E - J)^{-1}$ 的表达式过于复杂, 此处从略.

根据第一 Lyapunov 系数计算公式^[10],

$$l_1 = \frac{1}{2\omega} \text{Re} [\langle p, C(q, q, \bar{q}) \rangle - 2 \langle p, B(q, J^1 B(q, \bar{q})) \rangle + \langle p, B(\bar{q}, (2i\omega E - J)^{-1} B(q, q)) \rangle] \quad (11)$$

结合 p, q 及 J^{-1} , $(2i\omega E - J)^{-1}$ 代入的表达式, 我们可计算得

$$l_1 = \frac{-a^4(4a^7 - 30a^6c + 66a^5c^2 - 34a^4c^3 - 25a^3c^4 + 15ac^6 + 4c^7)}{2(a-2c)(a+c)\sqrt{-2a^2+3ac+c^2}(a^4-4a^3c+2a^2c^2+3ac^3+c^4)(4a^4-16a^3c+14a^2c^2+3ac^3+c^4)} \quad (12)$$

由此, 我们可得到下列的定理:

定理 若类 Chen 系统(1)的参数 a, b, c 同时

满足如下条件: (i) $abc \neq 0$; (ii) $b = \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c}$ 且 $c^2 + 3ac - 2a^2 > 0$; (iii) $4a^7 - 30a^6c + 66a^5c^2 - 34a^4c^3 - 25a^3c^4 + 15ac^6 + 4c^7 = 0$ 时, 则该系统在平衡点 E_+ 处发生余维二的 Bautin 分岔.

由上述定理中的条件(iii), 把参数 a 看成已知数, 我们可求得系统参数 a 与 c 间解析的表达式. 由系统(1)的参数 a, b, c 为实数的条件, 我们首先舍去方程的虚数解. 对方程剩下的解, 我们逐一考察它们是否满足 $c^2 + 3ac - 2a^2 > 0$. 舍去那些不满足 $c^2 + 3ac - 2a^2 > 0$ 的条件的解, 我们可以得到当 $c = a$ 或 $c = -\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3(-37+9\sqrt{17})^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{3}(-37+9\sqrt{17})^{\frac{1}{3}}a$ 时有 $l_1 = 0$. 于是我们可以得到下面的推论:

推论 若类 Chen 系统(1)的参数 a, b, c 同时满足如下两组条件之一:

(i) $a > 0, c^2 + 3ac - 2a^2 > 0, c = a, b = \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c}$;

(ii) $a > 0, c^2 + 3ac - 2a^2 > 0, c = -\frac{2a}{3} + \frac{2a}{3(-37+9\sqrt{17})^{\frac{1}{3}}}$

$-\frac{1}{3}(-37+9\sqrt{17})^{\frac{1}{3}}a, b = \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c}$;

则该系统在平衡点 E_+ ($\sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}, \sqrt{\frac{2bc-ba}{a}}, \frac{2c-a}{a}$) 处发生余维二的 Bautin 分岔.

2 数值仿真

借助分岔软件 Matcont, 我们可以直接对原系统进行数值仿真. 选取参数 a 为控制参数, 固定另两个参数 b 和 c 的值分别为 1.4 和 0.75, 此时系统(1)随参数 a 变化, x 方向上的分岔图如图 1 所示.

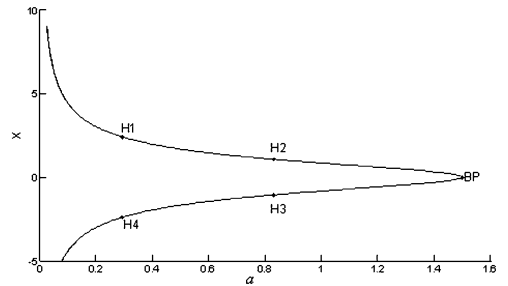


图 1 类 Chen 系统分岔图, $b = 1.4, c = 0.75$

Fig. 1 The bifurcation diagram of

Chen-like system with $b = 1.4$ and $c = 0.75$

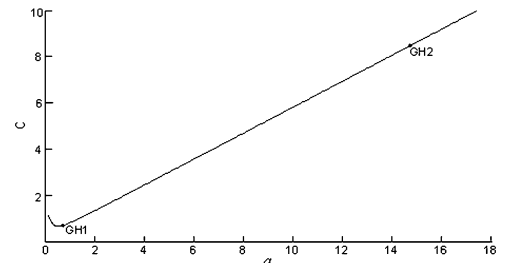


图 2 (a, c) 平面上类 Chen 系统分岔的投影图, $b = 1.4$

Fig. 2 The two-parameter bifurcation diagram of

Chen-like system in the (a, c) -plane with $b = 1.4$

从图中我们可以看到, 参数 $a = 1.5$ 是系统(1)发生分岔的临界参数值. 当 $a > 1.5$ 时, 系统

(1) 没有平衡点; $a = 1.5$ 时, 系统(1) 只有一个平衡点, 即原点 $O(0,0,0)$; 当 $a < 1.5$ 时, 系统(1) 有三个平衡点, 它们的坐标分别为 O 、 E_+ 和 E_- . 点 H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 表示 Hopf 分岔临界点, 当参数 a 取值逐渐增大, 经过相应的临界值时, 在 H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) 点处将发生 Hopf 分岔, 生成稳定极限环或原有的极限环消失.

图 2 给出了 $b = 1.4$ 时系统(1) 的 Hopf 分岔曲线 $b = \frac{c^2 + 3ac - 2a^2}{c}$ 在 (a, c) 平面的投影图. GH1 和 GH2 点分别表示 Bautin 分岔点. 其中在 GH1 处 $a = 0.7, c = 0.7$; 在 GH2 处 $a = 14.748125, c = 8.476383$. 参数取值与推论的结论相符合, 验证了理论分析的正确性.

3 结束语

针对新提出的三维自治的类 Chen 系统, 我们从理论与数值仿真两方面研究了该系统的余维二 Bautin 分岔, 给出了类 Chen 系统发生余维二 Bautin 分岔的参数条件. 数值结果与理论研究的结论相符, 从而验证了理论推导的正确性, 丰富了对该系统动力学行为的认识.

参 考 文 献

1 Lorenz EN. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*,

1963, 20: 130 ~ 141

2 Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 1999, 9: 1465 ~ 1466

3 Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2002, 12: 659 ~ 661

4 Lü Z, Duan L. Codimension-2 Bautin bifurcation in the Lü system. *Physics Letters A*, 2007, 366: 442 ~ 446

5 Mello L F, Coelho S F. Degenerate Hopf bifurcation in the Lü system. *Physics Letters A*, 2009, 373: 1116 ~ 1120

6 徐慧东, 谢建华. 高维映射的 Hopf-pitchfork 分岔及其在碰撞振动系统中的应用. *应用力学学报*, 2008, 25(2): 268 ~ 273 (Xu Huidong, Xie Jianhua. Hopf-pitchfork bifurcation of high dimensional maps with applications to vibro-impact systems. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2008, 25(2): 268 ~ 273 (in Chinese))

7 Li Yuxia, Tang Wallace K S, Chen Guanrong. Generating hyperchaos via state feedback control. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 2005, 15(10): 3367 ~ 3375

8 El-Dessoky M M. Synchronization and anti-synchronization of a hyperchaotic Chen system. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, 39(4): 1790 ~ 1797

9 王震, 毛鹏伟. 一类三维混沌系统的分叉及稳定性分析. *动力学与控制学报*, 2008, 6(1): 16 ~ 21. (Wang Zhen, Mao Pengwei. Bifurcation and stability analysis of a 3D chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(1): 16 ~ 21 (in Chinese))

10 Kuznetsov Y A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*, second ed. New York: Springer-Verlag. 1998

BAUTIN BIFURCATION OF A 3-DIMENSIONAL CHAOTIC SYSTEM*

Li Qunhong Tan Jieyan Xi Jiezheng Ding Xueli

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract The codimension-2 bifurcation in a three-dimensional differential system derived from the famous Chen system was investigated. At first, the equilibrium discussed in the original system was translated to the origin of the coordinates of the new dynamical system by the change of variables. Then the parameter conditions for the codimension-2 Bautin bifurcation were presented by analyzing the Jacobian matrix of the corresponding system. Bifurcation diagrams of the aforementioned system, which demonstrate the Bautin bifurcation, were obtained by numerical simulations. It is shown that the numerical results agree very well with the analytical ones, thus validating the theoretical analysis.

Key words Chen-like system, codimension-two, Bautin bifurcation, numerical simulation

Received 7 July 2009, revised 24 July 2009.

* The project supported by the Youth Foundation of Guangxi, China (0832014)