第 8 卷第 1 期 2010 年 3 月
1672-6553/2010/08(1)/008-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 8 No. 1
Mar. 2010

Birkhoff 系统的 Hamilton 化*

丁光涛

(安徽师范大学物理与电子信息学院,芜湖　241000)

摘要　研究了 Birkhoff 系统的 Hamilton 化问题. 提出了 Birkhoff 系统变换为 Hamilton 系统的新方法和对应的条件,给出了利用规范变换和变量变换来构造 Birkhoff 系统的 Hamilton 函数的途径,指出了所有 2 阶规则的 Birkhoff 系统都可以 Hamilton 化. 举例说明结果的应用.

关键词　分析力学,　Birkhoff 系统,　Hamilton 化,　Birkhoff 规范变换

引 言

Birkhoff 方程是比 Hamilton 方程更普遍的动力学方程,后者是前者的特殊情形[1-3]. 文献[2]证明,通过非奇异的变量变换(非正则变换)Hamilton 系统变成 Birkhoff 系统;同时又证明,在一定条件下 Birkhoff 系统可以变为 Hamilton 系统,其方法建立在变量变换基础上. 由于 Hamilton 力学理论严整,方法多样,是处理数学、力学和物理学领域问题的有力工具[4],使一个力学系统量子化必须知道其 Hamilton 函数,故微分方程系统 Hamilton 化的问题和 Birkhoff 系统变换成 Hamilton 系统问题仍是重要的研究课题[5-8]. 本文研究 Birkhoff 系统的 Hamilton 化的问题,提出一种主要建立在 Birkhoff 规范变换基础上的新的有效方法,同时给出被变换的 Birkhoff 系统应满足的条件. 最后,举例说明所得到的结果.

1　Birkhoff 方程及其规范变换

Birkhoff 系统的运动方程为

$$\Omega_{\mu v}\dot{a}^{v}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{1}$$

$$\Omega_{\mu v}=\frac{\partial R_{v}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{v}}\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{2}$$

系统(1)是 $2n$ 阶的,$a^{\mu}(\mu=1,2,\cdots,2n)$是描述系统的变量,$R_{\mu}(t,a)(\mu=1,2,\cdots,2n)$称为 Birkhoff 函数组,$B(t,a)$称为 Birkhoff 函数;$\Omega_{\mu v}$称为 Birkhoff 张量. 式(1)中约定对同一项重复的希腊指标从 1 到 $2n$ 求和(下同).

规则的 Birkhoff 系统满足下列条件

$$\det(\Omega_{\mu v})\neq 0\tag{3}$$

对这种系统可以解出式(1)中全部 $\dot{a}^{\mu}$,得到

$$\dot{a}^{\mu}=\Omega^{\mu v}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{v}}+\frac{\partial R_{v}}{\partial t}\right)\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{4}$$

式中 $\Omega^{\mu v}$称为 Birkhoff 逆变张量,满足下列关系

$$\Omega^{\mu\tau}\Omega_{\tau v}=\delta^{\mu}_{v}\tag{5}$$

引入一阶 Lagrange 函数

$$L(t,a,\dot{a})=-R_{\mu}(t,a)\dot{a}^{\mu}+B(t,a)\tag{6}$$

方程(1)可以表示成 Lagrange 方程形式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{a}^{\mu}}-\frac{\partial L}{\partial a^{\mu}}=\Omega_{\mu v}\dot{a}^{v}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\quad(\mu,v=1,2,\cdots,2n)\tag{7}$$

定义 Birkhoff 规范变换为

$$R_{\mu}\to R_{\mu}^{'}=R_{\mu}+\frac{\partial G}{\partial a^{\mu}}\quad(\mu=1,2,\cdots,2n)\tag{8a}$$

$$B\to B^{'}=B-\frac{\partial G}{\partial t}\tag{8b}$$

函数 $G=G(t,a)$称为规范变换函数. 在此变换下,方程(1)保持不变,特别是

$$\Omega_{\mu v}^{'}=\frac{\partial R_{v}^{'}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}^{'}}{\partial a^{v}}=\frac{\partial R_{v}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{v}}=\Omega_{\mu v}\tag{9}$$

Birkhoff 张量在规范变换下是不变的.

2　Birkhoff 系统的 Hamilton 化的方法

将变量 a^{μ} 分成两组 r^{k} 和 $y_{k}(k=1,2,\cdots,n)$

$$(a^{\mu})=\begin{pmatrix}r^{k}\\ y_{k}\end{pmatrix}\begin{matrix}(\mu=k,k=1,2,\cdots,n)\\(\mu=n+k,k=1,2,\cdots,n)\end{matrix}\tag{10}$$

2009-08-04 收到第 1 稿,2009-10-16 收到修改稿.

Birkhoff 函数组也分成相应的两组

$$(R^{\mu})=\begin{pmatrix}N_k\\ Q_k\end{pmatrix}\begin{matrix}(\mu=k,k=1,2,\cdots,n)\\ (\mu=n+k,k=1,2,\cdots,n)\end{matrix}\tag{11}$$

作规范变换，并选择函数 G，使

$$N_k'=N_k+\frac{\partial G}{\partial r^k}\neq 0\quad(k=1,2,\cdots,N)\tag{12a}$$

$$Q_k'=Q_k+\frac{\partial G}{\partial y_k}=0\quad(k=1,2,\cdots,N)\tag{12b}$$

因此，式(6)的一阶 Lagrange 函数变换为

$$L'(t,r,y,\dot r)=-N_k'(t,r,y)\dot r^k+B'(t,r,y)\tag{13}$$

式中对同一项中重复的拉丁指标从 1 到 n 求和(下同)，且

$$B'(t,r,y)=B(t,r,y)-\frac{\partial}{\partial t}G(t,r,y)\tag{14}$$

定义新变量

$$p_k=-N_k'(t,r,y)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{15}$$

如果下列条件成立

$$\det(\partial p_i/\partial y_j)\neq 0\tag{16}$$

则该系统称为严格规则系统，可从式(15)中以显式解出

$$y_k=y_k(t,r,p)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{17}$$

定义 Hamilton 函数为

$$H(t,r,p)=-B'(t,r,y)\mid_{y_k\to y_k(t,r,p)}\tag{18}$$

则式(13)成为

$$\bar L=p_k\dot r^k-H(t,r,p)\tag{19}$$

由 $\bar L$ 导出的新变量(r,p)表示的运动微分方程为

$$\dot r^k=\partial H/\partial p_k\tag{20a}$$

$$\dot p_k=-\partial H/\partial r^k\tag{20b}$$

式(20)是 Hamilton 正则方程，r^k 和 p_k 为正则共轭变量，Birkhoff 系统(1)实现了 Hamilton 化.

3　Birkhoff 系统 Hamilton 化的条件

前面曾指出，Birkhoff 张量在规范变换下保持不变. 变换(12)完成后，张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 可分为四组

$$\Omega_{ij}=\frac{\partial N_j'}{\partial r^i}-\frac{\partial N_i'}{\partial r^j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\tag{21a}$$

$$\Omega_{i(n+j)}=-\frac{\partial N_i'}{\partial y^j}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\tag{21b}$$

$$\Omega_{(n+i)j}=-\frac{\partial N_j'}{\partial y^i}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\tag{21c}$$

$$\Omega_{(n+i)(n+j)}=0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\tag{21d}$$

写成矩阵形式为

$$\Omega_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\Omega_{ij} & \Omega_{i(N+j)}\\ \Omega_{(n+i)j} & \Omega_{(n+i)(n+j)}\end{pmatrix}\tag{22}$$

由于反对称性，Birkhoff 张量中 $2n$ 个对角分量 $\Omega_{\mu\mu}$(μ 不是求和指标)必为零. 根据式(21)可以断定，变换(12)前后，Birkhoff 系统张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 中，非对角分量为零的，至少有 $n(n-1)$ 个($\Omega_{(n+i)(n+j)}$ 的非对角分量). 如果 Birkhoff 系统(1)中，存在不少于 $n(n-1)$ 个为零的非对角分量，则可以利用变量序号的调整，再成对选出 $n(n-1)$ 个为零的非对角分量，组成 $\Omega_{(n+i)(n+j)}$，相应的变量 a^{μ}($\mu=n+1,n+2,\cdots,2n$)组成式(10)中的 y_k($k=1,2,\cdots,n$)，函数 R_{μ}($\mu=n+1,n+2,\cdots,2n$)经规范变换(12b)而等于零. 实际上，式(12b)是确定规范变换函数 G 的方程，而 $\Omega_{(n+i)(n+j)}=0$ 是方程(12b)的解 G 存在的条件.

从 $\Omega_{\mu\nu}$ 的矩阵结构式(22)，以及四组分量(21)，可以得出结论，如果条件(16)成立，则条件(3)也成立，即系统(1)是规则的，反之亦然；若条件(3)不成立，那么，条件(16)也不能成立.

综上所述，可以得到如下结论：

$2n$ 阶 Birkhoff 系统，若(ⅰ)系统是规则的，即满足条件(3)，(ⅱ)系统的 Birkhoff 张量存在不少于 $n(n-1)$ 个为零的非对角分量，则可以实现 Hamilton 化. 方法步骤为：(1)调整变量序号，进行式(10)变量分组；(2)进行式(12)和(14)的规范变换；(3)引入新变量 p_k，进行式(15)和(17)的部分变量变换；(4)根据式(18)得到 Hamilton 函数.

对于 2 阶 Birkhoff 系统，上述条件(ⅱ)总是满足的，故可得如下推论：

规则的 2 阶 Birkhoff 系统原则上都是可以实现 Hamilton 化的.

4　算例

例 1 由线性阻尼振子

$$\ddot x+x+\gamma\dot x=0\tag{23}$$

的 Birkhoff 表示[2,3,9]，构造 Hamilton 函数.

线性阻尼振子有多种等效的 Birkhoff 表示，取文献[9]中的一种表示

$$R_1=\frac{1}{2}a^2e^{\gamma t},R_2=-\frac{1}{2}a^1e^{\gamma t}$$

$$B=\frac{1}{2}e^{\gamma t}[(a^1)^2+(a^2)^2+\gamma a^1a^2]\tag{24}$$

式中

$$a^1 = x, \quad a^2 = \dot{x} \tag{25}$$

选 Birkhoff 规范变换函数为

$$G = \frac{1}{2} a^1 a^2 e^{\gamma t} \tag{26}$$

则有

$$R_1' = a^2, R_2' = 0$$

$$B' = \frac{1}{2} e^{\gamma t} [(a^1)^2 + (a^2)^2] \tag{27}$$

作变量变换

$$x = a^1, p = -R_1' = -a^2 e^{\gamma t} \tag{28}$$

反解得

$$a^2 = -pe^{-\gamma t} \tag{29}$$

得线性阻尼振子的 Hamilton 函数为

$$H = -\frac{1}{2}(x^2 e^{\gamma t} + p^2 e^{-\gamma t}) \tag{30}$$

例2　由 Hojman－Urrutia 方程

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + y = 0 \tag{31}$$

的 Birkhoff 表示[2,3]，构造 Hamilton 函数.

方程(31)也有多种等效的 Birkhoff 表示，取文献[2]中的表示

$$R_1 = a^2 + a^3, R_2 = 0, R_3 = a^4, R_4 = 0$$

$$B = \frac{1}{2}[(a^3)^2 + 2a^2 a^3 - (a^4)^2] \tag{32}$$

式中

$$a^1 = x, a^2 = y, a^3 = \dot{x}, a^4 = \dot{y} \tag{33}$$

Birkhoff 张量为

$$\Omega_{12} = -1,\ \Omega_{13} = -1,\ \Omega_{14} = 0$$

$$\Omega_{23} = 0,\ \Omega_{24} = 0,\ \Omega_{34} = -1 \tag{34}$$

系统是规则的，因为

$$\mathrm{del}(\Omega_{\mu\nu}) = 1 \tag{35}$$

且为零的非对角分量为6个，故系统满足 Hamilton 化的条件. 由于 Birkhoff 表示(32)中，$R_2 = R_4 = 0$，故不必要进行规范变换，而直接进行变量分组

$$r^1 = a^1, r^2 = a^3, y^1 = a^2, y^2 = a^4 \tag{36}$$

引入动量变量

$$p_1 = -R_1 = -(y^1 + \gamma^2), p_2 = -R_3 = -y^2 \tag{37}$$

反解得

$$y^1 = -(p_1 + r^2), y^2 = -p_2 \tag{38}$$

得到 Hamilton 函数

$$H = \frac{1}{2}[(r^2)^2 + 2r^2 p_1 + p_2^2] \tag{39}$$

5 结论与讨论

本文对 Birkhoff 系统 Hamilton 化问题的研究表明，$2n$ 阶规则的 Birkhoff 系统，若具有不少于 $n(n-1)$ 个为零的 Birkhoff 张量非对角分量，则可以通过变量分组式(10)，规范变换式(12)和(14)，引入变量变换式(15)和(17)，从规范变换后的 Birkhoff 函数中进行部分变量变换，得到 Hamilton 函数；2阶规则的 Birkhoff 系统总是可以利用上述方法实现 Hamilton 化. 这种新方法的中心环节是 Birkhoff 规范变换，其前后的步骤都是有规则可循的，对被变换的 Birkhoff 系统条件的分析也简单明确，这是本文得到结果的优越之处. 理论分析和示例表明，利用这个方法，可以使较大范围的 Birkhoff 系统 Hamilton 化. 对 Birkhoff 方程的研究，使很多学科领域的微分方程系统可以化作 Birkhoff 系统[2,3,9]，而这些微分方程系统之中有一些是利用传统方法不能直接部分化作 Hamilton 系统的，对这样的系统可以利用本文结果，将微分方程 Birkhoff 化与 Birkhoff 系统 Hamilton 化结合起来，从而可以利用 Hamilton 力学方法处理更多的其他学科领域问题.

参 考 文 献

1 Birkhoff G D. Dynamical systems. Providence RI: AMS College Publ, 1927

2 Santilli R M. Foundations of theoretical mechanics Ⅱ. New York: Springer-Verlag, 1983

3 梅凤翔，史荣昌，张永发，吴惠彬. Birkhoff 系统动力学 北京：北京理工大学出版社，1996 (Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B. Dynamics of Birkhoffian system. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 1996 (in Chinese))

4 Goldstein H, Poole C, Safko J. Classical mechanics. 3rd ed. Redwood city: Addison-Wesley, 2002

5 Mei F X, Wu H B, Zhang Y F. Hamilton-Jacobi method for solving ordinary differential equations. *Chin. Phys*, 2006, 15(8): 1662～1664

6 葛伟宽，黄文华. 微分方程的 Hamilton 化与解法，动力学与控制学报，2006，4(3): 201～204 (Ge W K, Huang W H. Hamiltonian formularization of differential equations and their method of solution. *Journal of Dynamics and*

Control, 2006,4:201 ~ 204(in Chinese))

7 张睿超，王连海，岳庆成. 微分方程的部分 Hamilton 化与积分. 物理学报,2007, 56(6):3050 ~ 3053(Zhang R C , Wang L H, Yue Q C. Partially Hamiltonization and integration of differential equations. *Acta Phys. Sin.* 2007, 56(6): 3050 ~ 3053 (in Chinese))

8 李元成,梁景辉,梅凤翔. 二阶 Birkhoff 系统的 Hamilton 化. 固体力学学报,2002,23(6):203 ~ 206(Li Y C, Liang J H, Mei F X. Hamilton's realization of second order Birkhoff's system. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 2002, 23(6): 203 ~ 206(in Chinese))

9 丁光涛. 两种构造 Birkhoff 表示的新方法. 物理学报, 2008,57(12):7414 ~ 7417(Ding G T. Two new methods for construction of Birkhoffian representation. *Acta Phys. Sin.* 2008, 57(12): 7414 ~ 7417 (in Chinese))

HAMILTONIZATION OF BIRKHOFFIAN SYSTEMS *

Ding Guangtao

(*The College of Physics and Electronic Information*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

Abstract The Hamiltonization of Birkhoffian systems was studied . A new method and the corresponding conditions for the transformation of Birkhoffian systems into Hamiltonian ones were presented. The approach to the construction of Hamiltonian for the Birkhoffian systems by means of the gauge transformations and the transformations of the variables was given. It was pointed out that Hamiltonization for all second order regular Birkhoffian systems can be realized. Two examples were given to illustrate the application of the results.

Key words analytical mechanics, Birkhoffian system, Hamiltonization, Birkhoffian gauge transformations

* Received 4 August 2009, revised 16 October 2009.