

非线性动力学系统最优控制问题的保辛求解方法*

高强¹ 彭海军¹ 吴志刚² 钟万颀¹

(1. 大连理工大学工程力学系工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

(2. 大连理工大学航空航天学院工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要 基于对偶变量变分原理提出了求解非线性动力学系统最优控制问题的一种保辛数值方法. 以时间区段一端状态和另一端协态作为混合独立变量, 在时间区段内采用拉格朗日插值近似状态变量与协态变量, 然后利用对偶变量变分原理并将非线性最优控制问题转化为非线性方程组的求解, 最终得到求解非线性动力学系统最优控制问题的保辛数值方法. 数值实验验证了本文算法在求解精度与求解效率上的有效性.

关键词 非线性最优控制, 变分原理, 混合独立变量, 拉格朗日插值, 保辛

引言

最优控制理论是从上世纪五十年代中期在空间科学技术, 尤其是航空航天中的动力学问题的推动下开始形成并发展起来. 钱学森的工程控制论, Byrson 的经典著作^[1]等很多都是以动力学系统作为研究的受控对象, 表明了动力学与最优控制有着密不可分的联系. 此后, 最优控制理论自身不断发展, 而从辛几何力学的角度研究最优控制近年来又特别受到关注.

Marsden 首先在动力学中提出变分积分并广泛应用之后^[2], 进一步在拉格朗日力学体系下, 从离散力学的达朗贝尔原理出发将连续最优控制系统转化为离散的大规模参数优化问题求解^[3], 将动力学问题与最优控制问题紧密结合. 文献[4, 5]分别从变分积分以及李群变分积分的角度研究最优控制并做了应用性方面的研究工作, 这些也都属于拉格朗日力学系统的范畴. 正是由于保辛的数值方法在动力学积分中可保持哈密顿系统的辛几何结构, 因此得到了比较广泛的应用, 文献[6, 7]又着重突出了非完整力学系统和刚体的保辛最优控制方法. 同时文献[8]采用这种最优控制方法解决了卫星编队重构问题. 另外, 文献[9]采用 Rung - Kutta 差分格式将连续最优控制系统离散同样得到参数优化问题, 进一步文献[10]采用辛 Rung - Kutta 差分格式将连续最优控制系统离散, 而这种离散方法在

一定条件下与 Marsden 的离散力学方法是等价的. 文献[11, 12]从计算结构力学与最优控制模拟理论出发, 在统一的哈密顿体系下采用精细积分与区段混合能方法提出了一系列功能丰富、高性能的最优控制及鲁棒控制数值算法等.

本文从对偶变量变分原理^[13]出发研究非线性最优控制问题, 由于非线性系统的最优控制问题可以转化为具有辛几何结构的哈密顿系统, 并且哈密顿系统的一个主要性质是其相流保持辛几何结构. 采用保辛的数值方法可保持原哈密顿系统的辛几何结构^[13, 14], 所以非线性最优控制的数值求解方法也应当设法保持辛几何结构. 本文采用时间区段两端状态与协态混合独立变量表示的对偶变量变分原理, 在时间区段内部采用拉格朗日插值, 将非线性最优控制问题转化为非线性方程组的求解, 从而达到保持哈密顿系统辛几何结构的目的. 也就是说本文从动力学对偶变分原理的角度出发提出了保辛数值算法求解非线性系统的最优控制问题.

1 非线性最优控制与对偶变量变分原理

考虑非线性系统的最优控制问题, 性能指标为

$$J = \int_0^t \Phi(x(t), u(t), t) dt \quad (1)$$

系统的状态方程如下

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (2)$$

其中 x 是 d 维状态向量, u 是 p 维控制向量. 以上针

对拉格朗日 (Lagrange) 类型的非线性最优控制问题, 如果是波尔扎 (Bolza) 类型或者麦耶耳 (Mayer) 类型的非线性最优控制问题, 可以通过引进辅助变量的方法使得三类问题相互转化.

通过变分法可以得到最优控制关于输入的必要条件, 即将控制输入 $u(t)$ 表示成状态变量 x 与协态变量 λ 的函数, 即

$$u(t) = g(x(t), \lambda(t)) \quad (3)$$

将得到的控制输入 $u(t)$ 表示成只是关于状态变量 x 与协态变量 λ 两类变量的哈密顿函数

$$H(x, \lambda, g(x, \lambda)) = \Phi(x(t), g(x, \lambda), t) + \lambda f(x(t), g(x, \lambda), t) \quad (4)$$

那么最优控制的必要条件, 正则方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x, \lambda, g(x, \lambda)) & x(0) = x_0 \\ \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} & \lambda(t_f) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

至此, 非线性最优控制问题其实已经转化为求解非线性两端边值问题. 以下先介绍对偶变量变分原理, 然后在此基础上给出求解非线性最优控制两端边值问题的保辛数值方法.

哈密顿正则方程 (5) 对应的对偶变量变分原理为

$$\bar{S} = \int_0^{\eta} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt, \quad \delta \bar{S} = 0 \quad (6)$$

作用量 \bar{S} 取驻值给出

$$\delta \bar{S} = \int_0^{\eta} (\delta x)^T [-\lambda - \frac{\partial H}{\partial x}] dt + \int_0^{\eta} (\delta \lambda)^T (\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \lambda}) dt + \lambda^T \delta x |_0^{\eta} \quad (7)$$

若认为在两端边界条件给定, 则可以在域内得到哈密顿正则方程. 若认为在域内已经满足哈密顿正则方程, 则可以得到作用量与两端状态的关系

$$d\bar{S}(x_0, x_{\eta}) = \lambda_{\eta}^T dx_{\eta} - \lambda_0^T dx_0 \quad (8)$$

将 (8) 式左右两边进一步变形整理可以得到

$$dS(x_0, \lambda_{\eta}) = d(\lambda_{\eta}^T x_{\eta}) - d\bar{S}(x_0, x_{\eta}) = x_{\eta}^T d\lambda_{\eta} + \lambda_0^T dx_0 \quad (9)$$

下面考虑以 (9) 式为出发点, 研究以左端状态变量 x 和右端协态变量 λ 作为混合独立变量的保辛算法求解非线性最优控制问题.

2 以初始状态变量 x_0 和终端状态变量 λ_{η} 为独立状态变量的保辛算法

将整个非线性最优控制问题的求解区域 $(0, t_f)$ 等分成 J 个子区段, 子区段的长度为 η , 其中第 j 个子区段内的状态变量 $x(t)$ 与协态变量 $\lambda(t)$ 分别采用等间距 $m-1$ 和 $n-1$ 次 Lagrange 插值, 即

$$x(t) = (M_1 \otimes I)x_{j-1} + (\bar{M} \otimes I)\bar{x}_j \quad (10)$$

$$\lambda(t) = (\underline{N} \otimes I)\lambda_j + (N_n \otimes I)\lambda_j \quad (11)$$

其中 x_{j-1} 表示第 j 个子区段最左端的状态变量, 而 \bar{x}_j 由第 j 个子区段其他插值点上的状态向量组成, λ_j 表示最右端的协态变量, 而 λ_j 由第 j 个子区段其他插值点上的协态向量组成. 由于将区段最左端状态变量和最右端的协态变量作为独立变量, 因此它们用普通的 x_{j-1} 和 λ_j 表示, 而其他不独立的状态向量和协态向量用 \bar{x}_j 和 λ_j 表示. 方程 (10) 和 (11) 中的 I 表示单位矩阵, 其他符号的含义如下

$$\bar{M} = [M_2, M_3, \dots, M_m] \quad (12)$$

$$\underline{N} = [N_1, N_2, \dots, N_{n-1}] \quad (13)$$

并且

$$M_i = \prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{t - (j-1)\eta / (m-1)}{(i-j)\eta / (m-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (14)$$

$$N_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{t - (j-1)\eta / (n-1)}{(i-j)\eta / (n-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

符号 \otimes 表示矩阵的 Kronecker 积, 其意义为: $k \times l$ 维矩阵 A 和 $s \times t$ 维矩阵 B 的 Kronecker 积为 $ks \times lt$ 维矩阵 $A \otimes B$, 即

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1l}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1}B & \cdots & a_{kl}B \end{bmatrix} \quad (16)$$

方程 (9) 是以微分形式表述的, 其积分形式为

$$S = \lambda_{\eta}^T x_{\eta} - \bar{S} = \lambda_{\eta}^T x_{\eta} - \int_0^{\eta} [\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda)] dt \quad (17)$$

将方程 (10) 和 (11) 的近似状态和协态变量带入方程 (17) 表示的作用量, 可得到

$$V_j(x_{j-1}, \lambda_j, \bar{x}_j, \bar{\lambda}_j) = \lambda_j^T (M_1(\eta) \otimes I)x_{j-1} + (\bar{M}(\eta) \otimes I)\bar{x}_j - \int_0^{\eta} (\lambda^T \dot{x} - H(x, \lambda))_j dt \quad (18)$$

方程 (9) 表明, 若认为在域内已经满足微分方程, 则作用量应该仅是左端状态变量与右端协态变量的函数, 因此第 j 个子区段内的近似作用量可以通过方程 (18) 对中间变量 $\bar{x}_j, \bar{\lambda}_j$ 取驻值得到

$$S_j(x_{j-1}, \lambda_j) = \text{stat}_{\bar{x}_j, \lambda_j} V_j(x_{j-1}, \lambda_j, \bar{x}_j, \bar{\lambda}_j) \quad (19)$$

因为方程(19)的驻值条件,有

$$\frac{\partial V_j(x_{j-1}, \lambda_j, \bar{x}_j, \bar{\lambda}_j)}{\partial \bar{x}_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, J \quad (20)$$

$$\frac{\partial V_j(x_{j-1}, \lambda_j, \bar{x}_j, \bar{\lambda}_j)}{\partial \bar{\lambda}_j} = 0, \quad j=1, 2, \dots, J \quad (21)$$

通过连续两个子区段首尾的连接关系,将所有子区段的近似作用量 $S_j(x_{j-1}, \lambda_j)$ 相加,并对所有链接子区段的状态与协态变量取驻值,可得到整个区域的近似作用量,即

$$S(x_0, \lambda_J) = \text{stat}_{\substack{x_{k-1}, k=2, \dots, J \\ \lambda_k, k=1, \dots, J-1}} \left(\sum_{j=1}^J S_j(x_{j-1}, \lambda_j) - \sum_{j=1}^{J-1} \lambda_j^T x_j \right) \quad (22)$$

因此有

$$\frac{\partial S_j}{\partial x_{j-1}} - \lambda_{j-1} = 0 \quad j=2, \dots, J \quad (23)$$

$$\frac{\partial S_j}{\partial \lambda_j} - x_j = 0 \quad j=1, 2, \dots, J-1 \quad (24)$$

得到整个求解区域上的近似作用量 $S(x_0, \lambda_J)$ 后,根据方程(9)可给出

$$\lambda_0 = \frac{\partial S(x_0, \lambda_J)}{\partial x_0}, \quad x_J = \frac{\partial S(x_0, \lambda_J)}{\partial \lambda_J} \quad (25)$$

因此,非线性最优控制问题被转换为一组非线性方程(20), (21), (23), (24)和(25)的求解. 由于非线性方程组的由来是基于对偶变量变分原理的,所以说这种求解非线性最优控制问题算法是一种保辛的数值方法. 下一步为了方便实施计算,还应当将每一个子区段逐步计算并累加,为此定义

$$F_1^j = \frac{\partial S_j}{\partial x_{j-1}} - \lambda_{j-1} = - \int_0^\eta (\bar{M}_1^T \otimes \lambda - \bar{M}_1^T \otimes \frac{\partial H}{\partial x})_j dt - \lambda_{j-1} \quad j=1, 2, \dots, J \quad (26)$$

$$F_2^j = \frac{\partial V_j}{\partial \bar{x}_j} = (\bar{M}^T(\eta) \otimes I) \lambda_j - \int_0^\eta (\bar{M}^T \otimes \lambda - \bar{M}^T \otimes \frac{\partial H}{\partial x})_j dt \quad j=1, 2, \dots, J \quad (27)$$

$$F_3^j = \frac{\partial V_j}{\partial \bar{\lambda}_j} = - \int_0^\eta (\bar{N}^T \otimes (\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \lambda}))_j dt \quad j=1, 2, \dots, J \quad (28)$$

$$F_4^j = \frac{\partial S_j}{\partial \lambda_j} - x_j = (\bar{M}(\eta) \otimes I) \bar{x}_j - \int_0^\eta (\bar{N}_n^T \otimes (\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial \lambda}))_j dt - x_j \quad j=1, 2, \dots, J-1, J \quad (29)$$

其中

$$\dot{x}(t) = (\dot{M}_1 \otimes I) x_{j-1} + (\dot{M} \otimes I) \bar{x}_j \quad (30)$$

则方程(20), (21), (23), (24)和(25)可表示为

$$F_1^j = 0; F_2^j = 0; F_3^j = 0; F_4^j = 0 \quad (31)$$

本文采用牛顿法求解非线性方程组(31),因此需要计算非线性方程组的 Jacobi 矩阵. 本文在终端时间固定下考虑两种终端状态情况:

(1) 终端状态自由,将所有未知变量排列为 $\{\lambda_0; \bar{x}_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_1, x_1; \bar{x}_2, \bar{\lambda}_2, \lambda_2, x_2; \dots; \bar{x}_J, \bar{\lambda}_J, x_J\}^T$, 非线性方程组(31)对未知变量求导得到 Jacobi 矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} A, K_1^1, K_2^1, K_3^1, B \\ A, K_1^2, K_2^2, K_3^2, K_4^2, B \\ \vdots \\ A, K_{1,free}^J, K_{2,free}^J, K_{3,free}^J \end{bmatrix} \quad (32)$$

其中

$$K^1 = [K_1^1 \quad K_2^1 \quad K_3^1] = \begin{bmatrix} K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$K^j = [K_1^j \quad K_2^j \quad K_3^j \quad K_4^j] = \begin{bmatrix} K_{11}^j & K_{12}^j & K_{13}^j & K_{14}^j \\ K_{21}^j & K_{22}^j & K_{23}^j & K_{24}^j \\ K_{31}^j & K_{32}^j & K_{33}^j & K_{34}^j \\ K_{41}^j & K_{42}^j & K_{43}^j & K_{44}^j \end{bmatrix}, \quad (j=2, 3, \dots, J-1) \quad (34)$$

$$K_{free}^J = [K_{1,free}^J \quad K_{2,free}^J \quad K_{3,free}^J] = \begin{bmatrix} K_{11}^J & K_{12}^J & K_{13}^J \\ K_{21}^J & K_{22}^J & K_{23}^J \\ K_{31}^J & K_{32}^J & K_{33}^J \\ K_{41}^J & K_{42}^J & K_{43}^J \end{bmatrix} \quad (35)$$

方程(32)中具体元素的表达见附录. 同时可得到非线性方程组牛顿迭代所需要的右端向量为

$$F = [F_1^1, F_2^1, F_3^1, F_4^1; F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2; \dots; F_1^J, F_2^J, F_3^J, F_4^J]^T \quad (36)$$

(2) 终端状态固定,将所有未知变量排列为

$\{\lambda_0; \bar{x}_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_1, x_1; \bar{x}_2, \bar{\lambda}_2, \lambda_2, x_2; \dots; \bar{x}_J, \bar{\lambda}_J, x_J\}^T$, 非线性方程组对未知变量求导得到 Jacobi 矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} A, K_1^1, K_2^1, K_3^1, B \\ A, K_1^2, K_2^2, K_3^2, B \\ \vdots \\ A, K_{1,fix}^J, K_{2,fix}^J, K_{3,fix}^J, K_{4,fix}^J, B \end{bmatrix} \quad (37)$$

其中, 符号 $K_{1,fix}^J, K_{2,fix}^J, K_{3,fix}^J, K_{4,fix}^J$ 的具体表达如下, 其他符号意义如(33), (34)所示.

$$K_{fix}^J = [K_{1,fix}^J, K_{2,fix}^J, K_{3,fix}^J, K_{4,fix}^J] = \begin{bmatrix} K_{11}^J & K_{12}^J & K_{13}^J & K_{14}^J \\ K_{21}^J & K_{22}^J & K_{23}^J & K_{24}^J \\ K_{31}^J & K_{32}^J & K_{33}^J & K_{34}^J \\ K_{41}^J & K_{42}^J & K_{43}^J & K_{44}^J \end{bmatrix} \quad (38)$$

方程(37)中具体元素的表达见附录. 同时可得到非线性方程组牛顿迭代所需要的右端向量为

$$F = [F_1^1, F_2^1, F_3^1, F_4^1; F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2; \dots; F_1^J, F_2^J, F_3^J, F_4^J]^T \quad (39)$$

至此, 完成了牛顿法求解非线性方程组所需的 Jacobi 矩阵(32), (37)式以及右端向量(36), (39)式. 从方程(32), (37)可以看出 Jacobi 矩阵为稀疏带状矩阵, 采用稀疏带状的线性代数方程组求解算法可获得良好的计算效率.

3 数值算例

算例 1: 为了说明算法在不同参数下的计算精度与效率问题, 首先考虑一个具有分析解的终端状态自由情况非线性最优控制问题^[15], 极小化性能指标如下:

$$J = \int_0^1 (u^2 + xu + \frac{5}{4}x^2) dt$$

系统的微分方程及初始状态为

$$\dot{x} = 0.5x + u, \quad x(0) = 1$$

此问题具有解析解, 最优状态 $x^*(t)$, 协态 $\lambda^*(t)$ 与控制输入 $u^*(t)$ 分别为

$$x^*(t) = \frac{\cosh(1-t)}{\cosh(1)}$$

$$\lambda^*(t) = \frac{2\cosh(1-t)\tanh(1-t)}{\cosh(1)}$$

$$u^*(t) = \frac{(\tanh(1-t) + 0.5)\cosh(1-t)}{\cosh(1)}$$

通过大量数值实验表明, 状态变量的插值参数 m 与协态变量的插值参数 n 的最佳匹配情况是 m

$= n$, 这种参数搭配计算精度与效率能够达到最佳. 因此, 在这里将状态变量与协态变量分别采用 $m = 2, n = 2, m = 3, n = 3$ 和 $m = 4, n = 4$ 三种插值方法求解此问题. 将求解区域等分 16 份情况下状态变量、协态变量与控制输入的数值精度如图 1 所示, \circ 表示取 $m = 2, n = 2$ 计算的结果, $*$ 表示取 $m = 3, n = 3$ 计算的结果, \square 表示取 $m = 4, n = 4$ 计算的结果, 可以看出插值阶数越高, 求解精度越高. 图 2 给出了性能指标随步长减小后的变化情况, 即步长越小性能指标趋于收敛. 状态变量、协态变量与控制输入的数值计算精度随步长减小的变化以及 Hamilton 函数的相对误差如图 3 和 4 所示, 图 4 中的曲线从上到下表示步长按变化 $\tau = 1/2^N$ ($N = 5, 6, \dots, 10$).

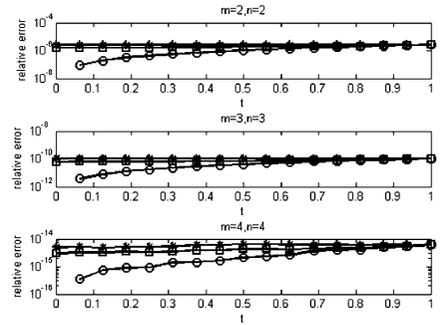


图 1 步长为 $\tau = 1/16$ 时的数值精度

Fig. 1 Numerical precisions for $\tau = 1/16$

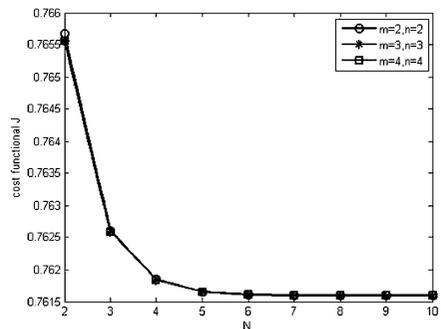


图 2 随步长减小性能指标的变化情况 $\tau = 1/2^N$

Fig. 2 Cost function for different time step $\tau = 1/2^N$

下面从数值结果分析本文保辛算法的精度. 记本文算法的精度为 s 阶, 表明如果时间步长为 η , 则算法的误差为 $C\eta^s$, 并记为 $O(\eta^s)$. 因此, 如果采用两个不同的时间步长 η_1 和 η_2 求解, 且它们数值求解的误差分别为 e_1 和 e_2 , 则有

$$e_1 = C\eta_1^s, e_2 = C\eta_2^s$$

那么算法的精度阶数可通过如下方程计算, 即

$$s = \frac{\log(e_1) - \log(e_2)}{\log(\eta_1) - \log(\eta_2)}$$

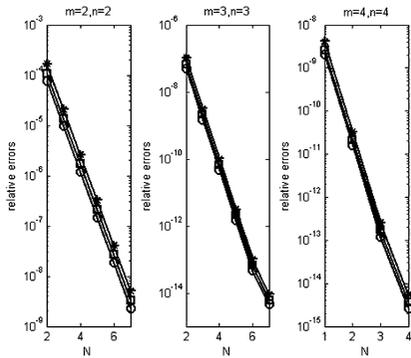


图 3 数值精度随步长减小的变化情况 $\tau = 1/16$

Fig. 3 Numerical precisions for different time step

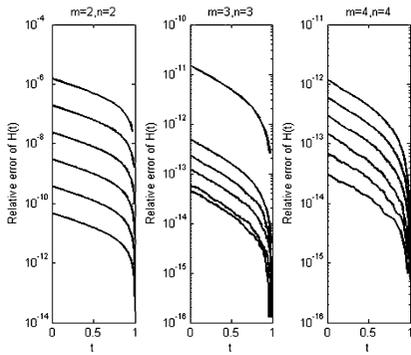


图 4 Hamilton 函数相对误差随步长减小的变化情况

Fig. 4 Relative errors of Hamilton function for different time step

通过此算例计算得到本文算法的精度如表 1 所示. 从表 1 中可以看到本文算法的精度在参数 $m = 2, n = 2, m = 3, n = 3, m = 4, n = 4$ 和 $m = 5, n = 5$ 的情况下分别具有 3 阶、5 阶、7 阶和 9 阶精度. 更多的数值试验表明本文算法具有 $s = 2(m - 1) + 1$ 阶精度.

表 1 保辛算法数值精度

Table 1 The order of symplectic algorithm

| | $m = 2, n = 2$ | $m = 3, n = 3$ | $m = 4, n = 4$ | $m = 5, n = 5$ |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 状态 x | 3.005205(3) | 5.006708(5) | 7.018805(7) | 8.955913(9) |
| 协态 λ | 3.000611(3) | 4.984167(5) | 6.973800(7) | 9.034749(9) |
| 控制 | 2.996898(3) | 4.980423(5) | 6.958970(7) | 8.977757(9) |

算例 2: 本算例考虑另一种边界条件, 即终端状态固定的非线性最优控制问题. 非线性单摆在指定的时间内从初始状态控制到期望状态^[16], 其性能指标为

$$J = \int_0^T u^2 dt, \quad T = \pi/2$$

系统的微分方程及初始与末端状态条件为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, & x_1(0) = 3\pi/5, x_1(T) = 2\pi/5 \\ \dot{x}_2 = -\sin(x_1) + u, & x_2(0) = 0, x_2(T) = 0 \end{cases}$$

由于此非线性最优控制问题没有分析解, 因此采用 Matlab 提供的 bvp4c 函数求解 Hamilton 两端边值问题, 得到系统状态 $x^*(t)$, 协态 $\lambda^*(t)$ 与控制输入 $u^*(t)$ 作为参考解. (其中 bvp4c 函数的绝对误差精度控制为 10^{-13} , 相对误差精度控制为 10^{-11})

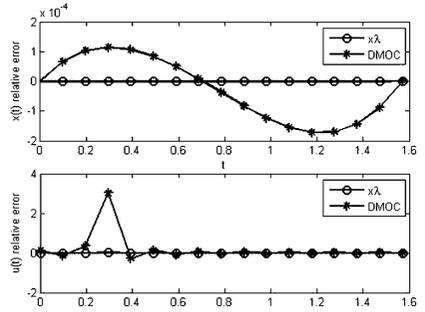


图 5 步长为 $\tau = T/16$ 时的数值精度

Fig. 5 Numerical precisions for $\tau = T/16$

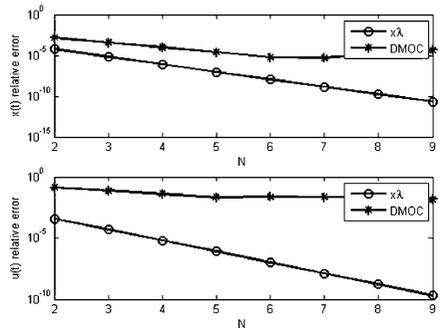


图 6 数值精度随步长减小的变化情况 $\tau = T/2^N$

Fig. 6 Numerical precisions for different time step $\tau = T/2^N$

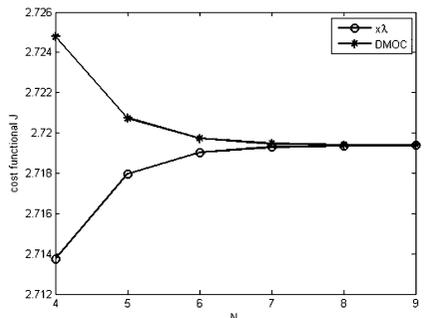


图 7 随步长减小性能指标的变化情况 $\tau = T/2^N$

Fig. 7 Cost function for different time step $\tau = T/2^N$

同样, 根据大量数值算例经验, 状态变量的插值参数与协态变量的插值参数 n 的最佳匹配情况是 $m = n$, 这种参数搭配计算精度与效率能够达到最佳. 采用 $m = 2, n = 2$ 这种插值方法求解此问题, 并与离散力学的最优控制方法^[3]做比较. 为了方便

下文叙述,记符号 $x\lambda$ 表示本文保辛算法,而符号 DMOC 表示离散力学的最优控制方法. 将求解区域等分 16 份情况下状态变量与控制输入的数值精度如图 5 所示,即在相同的离散时间间隔下 DMOC 方法无论是状态变量还是控制输入的数值精度都远小于本文的方法. 当离散时间间隔逐步加密($\tau = T/2^N$)时,状态与控制输入的平均相对误差如图 6 所示,可以看出在相同的离散时间间隔下本文方法求解的状态变量与控制输入精度始终要好于 DMOC 方法,并且随着散时间间隔逐步加密数值精

度不断提高,而 DMOC 方法最终导致大规模非线性优化,随着非线性优化的规模越来越大不仅效率越来越低,最优控制的数值精度也受大规模优化算法的影响. 同时,两种方法随着离散时间间隔逐步加密,性能指标都趋于收敛,如图 7 所示.

下面为了比较计算效率将状态变量与协态变量分别采用 $m = 2, n = 2, m = 3, n = 3, m = 4, n = 4$ 这三种插值方法求解,并且相同离散时间间隔下与 DMOC 方法的计算效率如表 2 所示. 表 2 表明本文方法在效率上远远优越于 DMOC 方法.

表 2 计算效率的比较

Table 2 Comparison of efficiency

| | N=4 | N=5 | N=6 | N=7 | N=8 | N=9 |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|------------|
| DMOC | 0.401833 | 1.627433 | 3.502586 | 7.319485 | 24.98074 | 272.724315 |
| $x\lambda, m=2, n=2$ | 0.027691 | 0.053655 | 0.118960 | 0.286796 | 0.559556 | 1.121085 |
| $x\lambda, m=3, n=3$ | 0.054776 | 0.116787 | 0.296248 | 0.567520 | 1.127806 | 2.415808 |
| $x\lambda, m=4, n=4$ | 0.098641 | 0.172783 | 0.453264 | 0.886170 | 1.842379 | 3.604089 |

4 结论

本文提出了基于对偶变量变分原理求解非线性最优控制问题的保辛算法. 由于非线性系统的最优控制问题具有哈密顿系统的辛几何结构,采用保辛的数值方法可保持原哈密顿系统的辛几何结构. 通过大量数值实验得到如下结论:

(1) 本文算法求解非线性最优控制问题算法的计算精度与效率的最佳匹配参数是 $m = n$, 即表明状态变量的插值参数 m 与协态变量的插值参数 n 应该相同,这种参数匹配情况下的算法精度为 $s = 2(m = 1) + 1$ 阶.

(2) 本文算法随着时间间隔划分越来越密,非线性最优控制的性能指标趋于收敛,并且哈密顿函数的相对误差随时间间隔划分加密也越来越小.

(3) 本文算法与基于离散力学的最优控制方法都是保辛算法,但本文算法无论在计算效率还是计算精度上都要优于基于离散力学的最优控制方法.

本文主要讨论了固定时间步长下基于对偶变量变分原理,并以时间区段两端的状态和协态作为混合独立变量的保辛算法用于求解非线性最优控制问题. 更深入的研究还应当考虑如何进一步提高算法的求解效率,或者在给定数值精度的情况下设计自适应算法,毕竟非线性最优控制问题的在线实

时计算是关键. 另外,基于对偶变量变分原理,还可以考虑以时间区段两端状态变量作为独立变量以及以时间区段两端协态变量作为独立变量这两种保辛算法在求解非线性最优控制问题时的数值精度与效率.

参 考 文 献

- 1 Bryson A E, Ho Y C. Applied optimal control. New York: Hemisphere Publishing Corporation, 1975
- 2 Marsden J E, West M, Discrete mechanics and variational integrators. *Acta Numerica*, 2001, 10: 357 ~ 514
- 3 Junge O, Marsden J E, Ober-Blöbaum S. Discrete mechanics and optimal control. *Proceeding of 16th IFAC Conference on Decision and Control*, 2005
- 4 Leon M de, D Martin de Diego. A Santamaria-Merino. Discrete variational integrators and optimal control theory. *Advances in Computational Mathematics*, 2007, 26(1-3): 251 ~ 268
- 5 Melvin Leok. An overview of lie group variational integrators and their applications to optimal control. *International Conference on Scientific Computation and Differential Equations*, 2007
- 6 Leon M de, Martin de Diego, D Santamaria-Merino A. Geometric numerical integration of nonholonomic systems and optimal control problems. *European Journal of Control*, 2004 10(5): 515 ~ 521

- 7 Bloch A, Hussein I, Leok M, Sanyal A. Geometric symplectic optimal control of the rigid body. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2009, 15(3): 307 ~ 330
- 8 Oliver Junge, Sina Ober-Blobaum. Optimal reconfiguration of formation flying satellites. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, 2005
- 9 Hager, William W. Runge-kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system. *Numerische Mathematik*, 2000, 87(2): 247 ~ 282
- 10 Bonnans J F, Laurent-Varin, Julien. Computation of order conditions for symplectic partitioned Runge-Kutta schemes with application to optimal control. *Numerische Mathematik*, 2006, 103(1): 1 ~ 10
- 11 钟万勰, 欧阳华江, 邓子辰. 计算结构力学与最优控制. 大连: 大连理工大学出版社, 1993 (Zhong Wanxie, Ouyang Huajiang, Deng Zichen. Computational structure mechanics and optimal control. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1993(in Chinese))
- 12 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算. 北京: 科学出版社, 2007 (Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Tan Shujun. Theory and computation of state-space control. Beijing: Science Press, 2007(in Chinese))
- 13 高强, 谭述君等. 基于对偶变量变分原理和两端动量独立变量的保辛方法. 动力学与控制学报, 2009, 7(2): 97 ~ 103 (Gao Qiang, Tan Shujun, et al. Symplectic method based on dual variable principle and independent momentum at two ends. *Journal of Dynamics and Control*, 2009, 7(2): 97 ~ 103
- 14 Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics. New York: Springer-Verlag, 1989
- 15 Anna Engelsone Stephen L. Campbell John T Betts. Order of convergence in the direct transcription solution of optimal control problems. Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, 2005
- 16 Mathew I Cross. Symplectic integrators and optimal control. Masters thesis, University of Manchester, 2005

SYMPLECTIC METHOD FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEM OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS*

Gao Qiang¹ Peng Haijun¹ Wu Zhigang² Zhong Wanxie¹

(1. Department of Engineering Mechanics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

(2. School of Aeronautics and Astronautics, State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract Based on dual variable principle, a symplectic algorithm for solving optimal control problem of nonlinear dynamic system was proposed. State variables at left end of time interval and costate at right end of time interval were taken as independent mixed variables, and the state and costate variables inside the time interval were approximated by Lagrange interpolation. Nonlinear optimal control problems were replaced by nonlinear equations through dual variable principle, and the symplectic algorithm for solving nonlinear optimal control problems can be obtained at the same time. Numerical simulation shows the precision and efficiency of the proposed algorithm.

Key words nonlinear optimal control, dual variable principle, mixed independent variable, Lagrange interpolation, symplectic