

车桥耦合振动的摄动分析方法*

钱长照

(长沙理工大学土木与建筑学院, 长沙 410076)

摘要 基于结构摄动理论, 推导车桥耦合动力系统的摄动方程, 将原有的车桥耦合动力方程变成一组车辆和桥梁之间不相互耦合的方程组, 实现车辆与桥梁之间的解耦. 理论上基于摄动分析方法进行严格推导, 以简支梁为例, 采用 1/4 车辆模型, 验证了方法的可靠性. 提出了该方法在大型有限元软件中的应用方法.

关键词 耦合振动, 摄动法, 车辆-桥梁系统

引言

车桥系统振动是一个古老而又复杂难解的课题, 其振动机理在桥梁设计、维护和控制中起着重要的作用. 早在 100 多年前, 英国铁路桥梁在列车通过时发生强烈振动而破坏, 提出了移动荷载作用下的车桥耦合振动问题. 自此, 移动荷载问题引起了各国学者的关注与广泛性研究^[1-2]. 已有大量关于移动荷载下桥梁振动的理论研究、数值研究和实验分析^[3-5], 但迄今为止仍然没有清楚桥梁振动的所有特征. 由于同时考虑移动车辆和桥梁荷载两者质量的振动微分方程带有时变系数, 给方程的求解带来了很大的困难, 以往的研究中采用过许多不同的车辆模型来对问题进行求解. 为了揭示不同车辆模型对研究车桥耦合问题的影响, 文[6]对采用 3 种不同车辆模型: 移动质量、四分之一车模型和二分之一车模型的车桥耦合问题进行对比分析, 从反映整体规律方面考察各个模型的适用性, 再比较各种模型的区别. 事实上, 仅有几种简化模型分析仍然是不够的, 随着工业的进步, 工程技术的提高, 桥梁设计越来越复杂化、轻型化, 模型简化对分析数据的影响进一步加大, 因此, 需要一种可以求解复杂桥梁及复杂车辆模型耦合振动的方法或工具. 大型通用软件 ANSYS 可以分析复杂的桥梁结构动力问题, 也可以对复杂的车辆模型进行动力分析, 但对于二者的耦合分析存在着困难, 为此, 一些学者试图寻求解决这种问题的方法^[7].

本文利用结构摄动理论, 从理论上严格证明摄

动方法对耦合方程解耦求解的可行性, 用实例分析验证了求解结果的可靠性. 同时由所得摄动方程揭示了摄动解的本质, 为利用 ANSYS 软件求解车桥耦合振动问题提供了编程思想, 算例也表明了该方法是可行的. 拓宽了 ANSYS 软件的应用, 为工程求解耦合振动问题提供了一种新的方法.

1 理论分析

车桥系统的相互影响是复杂的, 为了方便介绍本文方法, 抓住主要矛盾, 将车桥系统简化为如图 1 所示的质量弹簧桥梁系统, 桥简化为具有等效刚度的 Euler-Bernoulli 梁. 车辆只考虑竖向模型, 并假定轮胎不离桥面, 则系统的运动微分方程为

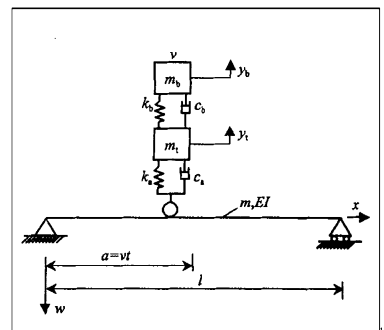


图 1 车桥系统模型

Fig. 1 vehicle-bridge modal

$$m_t \frac{d^2 y_t}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} + c_a \left(\frac{dy_t}{dt} + \frac{dy_w}{dt} \right) + k_a (y_t + w) = 0 \quad (1)$$

$$m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2} + c_b \left(\frac{dy_b}{dt} - \frac{dy_t}{dt} \right) + k_b (y_b - y_t) = 0 \quad (2)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \delta(x - vt) [(m_l + m_b)g + m_l \frac{d^2 y_l}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2}] \quad (3)$$

其中 m_b 为车体质量; m_l 为构架质量与轮对质量之和; k_a 为一系垂向刚度; c_a 为一系垂向阻尼; k_b 为二系垂向刚度; c_b 为二系垂向阻尼; v 为车辆通过桥梁时的速度(假定为恒量). 利用模态叠加原理, 令 $w(x, t) = Y_n(x)T(t)$, 根据简支梁边界条件, 可取 $Y(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}$, 利用模态正交性, 可得桥梁系统的振动方程

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2(m_l + m_b)g}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} + \frac{2}{ml} (m_l \frac{d^2 y_l}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_b}{dt^2}) \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (4)$$

可以看出, 方程(1)(2)(4)是相互耦合的微分方程组, 难以直接得到解析解, 通常的做法是利用数值方法进行求解, 研究车桥耦合振动的特点.

摄动方法是求解复杂方程或方程组的一种有效方法, 在求解非线性方程即参数激励系统中有着广泛的研究与应用. 基于摄动理论思想, 先将方程(1)(2)(4)的解假设为

$$y_l = \varepsilon y_{l1} + \varepsilon^2 y_{l2} + \dots \quad (5)$$

$$y_b = \varepsilon y_{b1} + \varepsilon^2 y_{b2} + \dots \quad (6)$$

$$T_n(t) = T_{n0}(t) + \varepsilon T_{n1}(t) + \varepsilon^2 T_{n2}(t) \dots \quad (7)$$

其中 ε 为摄动参数, 通常为小参数, 这里可取 $\varepsilon = 1$. 将方程(5)(6)(7)代入到方程(1)(2)(4)并令 ε 各幂次系数为零, 可得:

$$\varepsilon^0: \ddot{T}_{n0}(t) + \omega_n^2 T_{n0}(t) = \frac{2(m_l + m_b)g}{ml} \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (8)$$

$$\varepsilon^1: m_l \frac{d^2 y_{l1}}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_{b1}}{dt^2} + c_a (\frac{dy_{l0}}{dt} + \frac{dy_{b0}}{dt}) + k_a (y_{l1} + y_{b0}) = 0 \quad (9)$$

$$m_b \frac{d^2 y_{b1}}{dt^2} + c_a (\frac{dy_{b0}}{dt} + \frac{dy_{l0}}{dt}) + k_b (y_{b1} - y_{l1}) = 0 \quad (10)$$

$$\ddot{T}_{n1}(t) + \omega_n^2 T_{n1}(t) = \frac{2}{ml} (m_l \frac{d^2 y_{l1}}{dt^2} + m_b \frac{d^2 y_{b1}}{dt^2}) \sin \frac{n\pi vt}{l} \quad (11)$$

.....

求解方程(8)可得桥梁振动响应的一解近似解. 该方程实际上是将车辆看作是作用力大小为车辆静

轴重的移动荷载的车桥耦合振动方程^[6]. 由 Duhamel 积分可得

$$T_{n0}(t) = \frac{2(m_l + m_b)g}{ml} \left[\left(\frac{n\pi v}{l} \right)^2 - \omega_n^2 \right] \left[\frac{n\pi v}{l} \sin \omega_n t - \omega_n \sin \frac{n\pi vt}{l} \right] \quad (12)$$

由此可得

$$y_{u0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi vt}{l} T_{n0}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi vt}{l} \frac{2(m_l + m_b)g}{ml} \left[\left(\frac{n\pi v}{l} \right)^2 - \omega_n^2 \right] \left[\frac{n\pi v}{l} \sin \omega_n t - \omega_n \sin \frac{n\pi vt}{l} \right] \quad (13)$$

将(13)式代入方程(9)(10)可得车辆振动响应的一阶近似解 y_{l1} 和 y_{b1} , 再将 y_{l1} 和 y_{b1} 代入到方程(11)可得梁振动响应的二阶近似解. 整个求解过程可以看出, 表征车辆和桥梁运动的摄动方程不再耦合. 具体求解过程不再赘述.

2 数值分析

为了验证本方法的可靠性, 取实例分别采用两种方法计算进行比较, 一种方法是直接采用数值计算对耦合方程(1)(2)(4)进行求解, 这是目前研究车桥耦合振动的主要方法, 本文称之为数值解, 并认为其结果为真实结果. 另一种方法采用本文介绍的方法求解, 得出桥梁响应的一阶近似解和二阶近似解并与数值解相比较. 比较结果如图2, 图3所示.

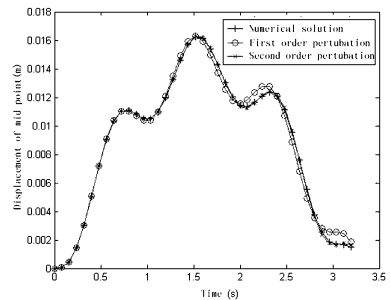


图2 v = 10 跨中位移响应曲线

Fig. 2 displacement of midpoint as v = 10m/s

实例中, 计算参数取值为, 简支梁跨长 $l = 32m$, 抗弯刚度 $EI = 1.143 \times 10^9 N \cdot m^2$, 单位长度质量 $m = 2000kg/m$; 车辆数据: $m_l = 2000kg$, $m_b = 400kg$, $k_a = 0.8 \times 10^7 N/m$, $k_b = 0.5 \times 10^7 N/m$, $c_a = c_b = 0$.

计算中仅取3阶模态, 由图可以看出, 二阶近似解与数值解结果相当吻合, 这说明本文方法在求

解桥梁位移响应是有效的. 但本文的主要目的并不是强调这种方法, 而是强调这种思想, 既然证明了这种思路是可行的, 那么回顾整个解题思路可以看出, 一阶近似解实际上就是把车辆荷载看成数值不变的移动荷载求解出来的桥梁响应, 而二阶近似解的获得过程是将桥梁响应的一阶近似结果作为输入施加到车辆上, 求出车辆对桥梁的反作用力, 然后再将求得的反作用力作用于桥梁求出桥梁响应. 该思路的重要性在于可以将这种思路应用于有限元, 事实上, 求解复杂桥梁结构-与车辆耦合振动问题一直是比较难以解决的问题, 主要是耦合振动中车辆与桥梁之间的连接如何处理的问题, 那么接下来介绍将这种思路推广到大型通用有限元程序 ANSYS 中求解车辆-桥梁耦合振动问题.

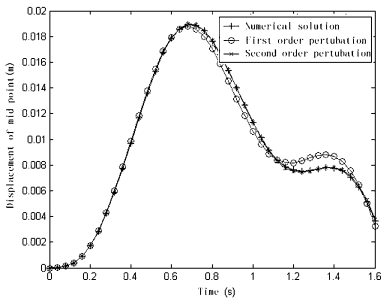


图3 v = 20 跨中位移响应曲线

Fig. 3 displacement of midpoint as v = 20m/s

3 摄动方法在 ANSYS 中应用

ANSYS 作为大型通用有限元程序可以解决很多复杂的工程实际问题, 其强大的二次开发功能使得其在解决工程实际问题中成为求解复杂问题的首选, 但由于车桥耦合振动问题的复杂性, 轮轨接触力不仅大小为时变函数且其位置也是与时间相关的函数, 这给通用软件的应用带来了不便. 本文用结构摄动理论严格证明了摄动方法的可行性, 且揭示了一阶摄动解和二阶摄动解的物理意义, 可以应用 ANSYS 编程求解, 流程图 4 所示, 同样计算前面实例, 得到结果如图 5、图 6 所示.

图 5、图 6 中数值解为直接求解微分方程组所得的结果, 二阶摄动解为按照流程图应用 ANSYS 求得的结果, 由图 5、图 6 可以看出, 计算结果相当吻合. 该方法成功的意义在于 ANSYS 可以独立求解复杂的桥梁模型和车辆模型, 本文方法可使原本耦合的模型独立开来求解, 拓宽了 ANSYS 的工程应用.

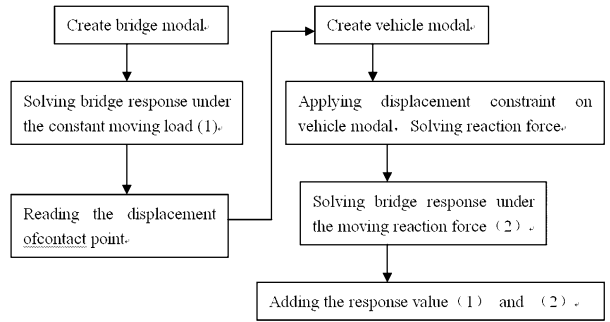


图4 ANSYS 摄动求解流程图

Fig. 4 perturbation solving program using ANSYS

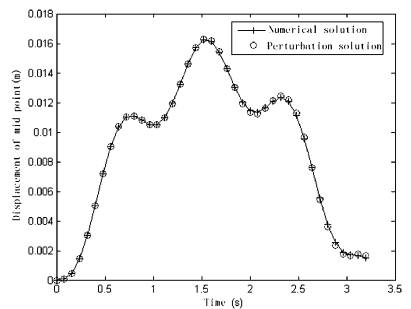


图5 v = 10 跨中位移响应曲线

Fig. 5 displacement of midpoint as v = 10m/s

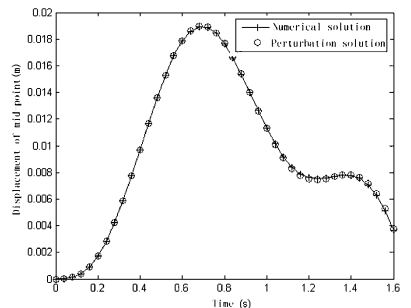


图6 v = 20 跨中位移响应曲线

Fig. 6 displacement of midpoint as v = 20m/s

4 结论

本文利用结构摄动理论, 从理论上严格证明摄动方法对耦合方程解耦求解的可行性, 用实例分析验证了求解结果的可靠性. 同时由所得摄动方程揭示了摄动解的本质:

(1) 一阶摄动方程实质上是将移动车辆看作是静轴载作用下的车桥耦合振动方程;

(2) 二阶摄动方程中车辆运动微分方程与桥梁动力微分方程不再耦联, 车辆运动微分方程的求解只与桥梁响应的一阶摄动结果相关, 可独立求出. 然后可由车辆的摄动结果求解出桥梁的二阶摄动, 即二阶摄动与车辆动力特性相关.

本文为利用 ANSYS 软件求解车桥耦合振动问题提供了编程思想,算例也表明了该方法是可行的. 拓宽了 ANSYS 软件的应用,为工程求解耦合振动问题提供了一种新的方法. 实例为了与理论解相比较,所选取的桥梁结构与车辆模型都比较简单,对于工程中更为复杂的桥梁模型与车辆模型,本文方法有待进一步验证.

参 考 文 献

- 1 Michaltsos G, Sophianopoulos D, Kounadis A N. The effect of a moving mass and other parameters on the dynamic response of a simply supported beam. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(3): 3572362
- 2 Hillerborg A. Dynamic influences of smoothly running loads of simply supported girders. Stockholm: Kungl. Tekhn. Hogskolan, 1951:1250
- 3 Lee H P. Dynamic response of beam with a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 191(2): 289 ~ 294
- 4 Tan G H, Brameld G H, Thambiratnam D P. Development of an analytical model for treating bridge-vehicle interaction. *Engineering Structures*, 1998, 20(1/2): 250 ~ 260
- 5 Kawatani M, Kim C W. Computer simulation for dynamic wheel loads of heavy vehicles. *Structural Engineering and Mechanics*, 2001, 12(4): 409 ~ 428
- 6 肖新标,沈火明. 3种车桥耦合振动分析模型的比较研究. 西南交通大学学报, 2004, 39(2): 172 ~ 175 (Xiao Xinbiao, Shen Huoming. Comparison of Three Models for Vehicle-Bridge Coupled Vibration Analysis. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2004, 39(2): 172 ~ 175 (in Chinese))
- 7 彭献,殷新锋,茆秋华. 车-桥系统的振动分析及控制. 动力学与控制学报, 2006, 4(3): 253 ~ 258 (Peng Xian, Yin Xinfeng, Mao Qiuhua. Vibration analysis and control on vehicle-bridge system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(3): 253 ~ 258 (in Chinese))

PERTURBATION METHOD FOR COUPLING VIBRATION OF VEHICLE-BRIDGE SYSTEM*

Qian changzhao

(College of civil and architecture Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, China)

Abstract Based on the perturbation method of structure, the perturbation equations of vehicle-bridge system were obtained, which are a group of self-governed equations for vehicle or bridge system. Compared with Runge_Kutta method, perturbation method can obtain explicit expression describing the response law of dynamics system. On the other hand, perturbation method can be applied in finite element program as an algorithm.

Key words coupling vibration, perturbation method, vehicle-bridge system