

基于间歇控制的不确定主从 Lur'e 系统的指数同步*

董佐永¹ 王亚娟² 白明辉² 左志强³

(1. 中国电子科技集团公司第五十四研究所, 石家庄 050081) (2. 石家庄东方热电股份有限公司热电三厂, 石家庄 050031)

(3. 天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

摘要 研究了不确定主从 Lur'e 系统的间歇控制同步问题. 运用 Lyapunov 稳定性理论和 S-过程, 首先推导出保证标称主从 Lur'e 系统指数同步的一个充分条件. 在此基础上进一步得到了具有范数有界不确定性主从 Lur'e 系统鲁棒指数同步的结果. 这些同步判据以矩阵不等式的形式给出. 另外我们还提出了一种最小化性能指标的优化策略. 最后, 通过两个数值例子验证了结果的有效性.

关键词 指数同步, 间歇控制, 参数不确定性, 矩阵不等式

引言

在过去的几十年中, 由于混沌同步^[1]在保密通信^[2]中的应用, 它已经成为人们关注的热点之一^[3]. 最近, 对于主从 Lur'e 系统同步问题的研究也引起了人们广泛的关注. Wu^[4]等人给出了动态系统同步和控制的统一框架. 运用绝对稳定性理论, Curran^[5]等得到了通过静态线性反馈使得主从 Lur'e 系统同步的条件. Chen^[6]等对各种不同的同步方法做了概述.

众所周知, 间歇控制是一种简单易行的工程方法, 已经被广泛应用于制造业、交通运输业、空气质量控制和通信等领域. 与连续控制方法相比, 间歇控制的效率更高. Zochowski^[7]研究了主从系统间歇耦合条件下的混沌同步. Li^[8]等人运用间歇控制, 处理了常微分方程描述的非线性系统的镇定问题. Xia^[9]等人研究了基于间歇控制的时滞复杂网络的牵制同步问题.

然而到目前为止, 尚没有关于不确定主从 Lur'e 系统的间歇指数同步问题的相关报道. 很显然, 这个问题的解决不仅具有重要的理论价值, 同时对于工程实际有很强的现实意义. 受上述思路的启发, 本文研究如何通过设计间歇反馈控制器以实现主从 Lur'e 系统的指数同步问题. 首先我们考虑了无不确定性的标称主从 Lur'e 系统的指数同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论和 S 过程, 给出了

使得误差系统指数稳定的充分条件以及这个条件的一个简化形式. 接着进一步讨论了系统具有范数有界不确定性情况下的主从 Lur'e 系统的鲁棒同步问题. 所得到的同步判据是以矩阵不等式的形式给出, 因此便于计算机求解. 另外, 我们还在上述工作的基础上研究了控制周期、控制宽度已知条件下如何设计次优控制器以优化性能指标的控制策略问题. 最后, 列举了两个例子以表明本文方法的有效性.

1 问题描述

考虑如下不确定 Lur'e 系统的主从同步间歇控制:

$$\begin{aligned} M_u : \dot{x}(t) &= (A + \Delta A(t))x(t) + (B + \Delta B(t))\sigma(Cx(t)) \\ S_u : \dot{y}(t) &= (A + \Delta A(t))y(t) + (B + \Delta B(t))\sigma(Cy(t)) + u(t) \\ C_u : u(t) &= \begin{cases} -K(x(t) - y(t)), & nT \leq t < nT + \tau \\ 0, & nT + \tau \leq t < (n+1)T \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

其中 M_u, S_u 和 C_u 分别代表不确定情况下的主系统、从系统和间歇控制器. $x(t), y(t) \in R^n$ 分别是主从 Lur'e 系统的状态变量, 参数不确定项 $\Delta A(t), \Delta B(t)$, 具有如下形式:

$$\Delta A(t) = D_1 F_1(t) E_1, \quad \Delta B(t) = D_2 F_2(t) E_2 \quad (2)$$

D_1, D_2, E_1, E_2 是已知的具有适当维数的实常数矩阵. 不确定矩阵 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 满足:

$$\|F_1(t)\| \leq 1, \quad \|F_2(t)\| \leq 1 \quad (3)$$

非线性函数 $\sigma(\cdot)$ 是 $R^n \rightarrow R^n$ 上的映射, 满足扇区

条件 $[0, \delta]$, 即对于任意给定的 $\xi \in R, i=1, 2, \dots, n_h$, $\sigma_i(\xi)(\sigma_i(\xi) - \delta\xi) \leq 0$. $u(t) \in R^n$ 是控制信号, $K \in R^{n \times n}$ 是控制增益矩阵, T 是控制周期, τ 是控制宽度. 总体说来, 我们的目标是设计合适的 T, τ 和 K , 使得对于所有允许的不确定性, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|x(t) - y(t)\| \rightarrow 0$. 定义误差信号 $e(t) = x(t) - y(t)$, 初始值 $e_0 = x(t_0) - y(t_0)$, 则可以得到如下误差系统:

$$\dot{e}(t) = \begin{cases} (A + \Delta A(t) + K)e(t) + (B + \Delta B(t)) \times \\ \eta(Ce(t), y(t)) \quad \text{if } nT \leq t < nT + \tau \\ (A + \Delta A(t))e(t) + (B + \Delta B(t)) \times \eta(Ce(t), y(t)) \\ \text{if } nT + \tau \leq t < (n+1)T \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\eta(Ce(t), y(t)) = \sigma(Ce(t) + Cy(t)) - \sigma(Cy(t))$.

为了证明主从系统的指数同步, 我们需要用到下面的假设和引理.

假设 1: 非线性函数 $\eta(Ce(t), y(t))$ 属于扇区 $[0, \delta]$, 即

$$0 \leq \frac{\eta_i(c_i e, y)}{c_i e} = \frac{\sigma_i(c_i e + c_i y) - \sigma_i(c_i y)}{c_i e} \leq \delta \quad (c_i e \neq 0) \quad (5)$$

其中, c_i 代表矩阵 C 的第 i 行, 则可以很容易证明

$$\eta_i(c_i e, y)(\eta_i(c_i e, y) - \delta c_i e) \leq 0 \quad (i=1, 2, \dots, n_h)$$

引理 1: 给定具有适当维数的矩阵 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 和常量 $\varepsilon > 0$, 使得 $0 < \Sigma_3 = \Sigma_3^T$, 则下列不等式成立:

$$\Sigma_1^T \Sigma_2 + \Sigma_2^T \Sigma_1 \leq \varepsilon \Sigma_1^T \Sigma_3 \Sigma_1 + \varepsilon^{-1} \Sigma_2^T \Sigma_3^{-1} \Sigma_2$$

2 标称Lur'e系统的主从同步

本小节首先考虑不带参数不确定性的Lur'e系统的间歇控制主从同步问题, 相应的标称系统模型为:

$$M: \dot{x}(t) = Ax(t) + B\sigma(Cx(t))$$

$$S: y(t) = Ay(t) + B\sigma(Cy(t)) + u(t)$$

$$C: u(t) = \begin{cases} -K(x(t) - y(t)), & nT \leq t < nT + \tau \\ 0, & nT + \tau \leq t < (n+1)T \end{cases} \quad (6)$$

M, S 和 C 表示标称情况下的主系统、从系统和间歇状态反馈控制器. 定义误差信号 $e(t) = x(t) - y(t)$, 可得到误差系统为:

$$\dot{e}(t) = \begin{cases} (A + K)e(t) + B\eta(Ce(t), y(t)) & nT \leq t < nT + \tau \\ Ae(t) + B\eta(Ce(t), y(t)) & nT + \tau \leq t < (n+1)T \end{cases} \quad (7)$$

定理 1: 令假设 1 成立, 如果存在矩阵 $P > 0, \Lambda > \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_h}\}$ 和常数 $g_1 > 0, g_2 > 0$ 满足以下三个条件:

$$\begin{bmatrix} PA + PK + A^T P + K^T P + g_1 P & PB + \delta C^T \Lambda \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda \end{bmatrix} \leq 0 \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - g_2 P & PB + \delta C^T \Lambda \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda \end{bmatrix} \leq 0 \quad (9)$$

$$\tau g_1 - (T - \tau) g_2 > 0 \quad (10)$$

则系统(6)是指数同步的, 并且有

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|e_0\| \exp\{-\gamma(t - \tau)\}$$

其中, 指数收敛率 $\gamma = [\tau g_1 - (T - \tau) g_2] / 2T$.

证明: 定义如下李亚普诺夫函数:

$$V(e(t)) = e^T(t) P e(t) \quad (11)$$

由上式可以看出

$$\lambda_m(P) \|e(t)\|^2 \leq V(e(t)) \leq \lambda_M(P) \|e(t)\|^2 \quad (12)$$

$\lambda_{m(M)}(P)$ 表示 P 的最小(最大)特征值.

当 $nT \leq t < nT + \tau$ 时, 运用 S -过程, (11) 沿着系统(7)的轨迹关于时间的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= 2e^T P \dot{e} = 2e^T P(A + K)e + 2e^T P B \eta(Ce(t), y(t)) \leq \\ &e^T (PA + PK + A^T P + K^T P)e + 2e^T P B \eta(Ce(t), y(t)) - \\ &2 \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i \eta_i(c_i e, y) [\eta_i(c_i e, y) - \delta c_i e] = e^T (PA + PK + A^T P + \\ &K^T P + g_1 P)e + e^T (PB + \delta C^T \Lambda) \eta + \eta^T (B^T P + \delta \Lambda C) e - \\ &2 \eta^T \Lambda \eta - g_1 e^T P e = \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi & PB + \delta C^T \Lambda \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix} - \\ &g_1 e^T P e \end{aligned}$$

其中, $\eta = \eta(Ce(t), y(t))$

$$\Psi = PA + PK + A^T P + K^T P + g_1 P$$

则由条件(8)可知

$$\dot{V}(e(t)) \leq -g_1 V(e(t)), \quad nT \leq t < nT + \tau$$

于是当 $nT \leq t < nT + \tau$ 时, 可以得到

$$V(e(t)) \leq V(e(nT)) \exp(-g_1(t - nT)) \quad (13)$$

同理, 当 $nT + \tau \leq t < (n+1)T$ 时有

$$\dot{V}(e(t)) = 2e^T P \dot{e} = 2e^T P A e + 2e^T P B \eta(Ce(t), y(t)) \leq e^T (PA + A^T P)e + 2e^T P B \eta(Ce(t), y(t)) -$$

$$2 \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i \eta_i(c_i e, y) [\eta_i(c_i e, y) - \delta c_i e] =$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi & PB + \delta C^T \Lambda \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix} - g_2 e^T P e$$

因此, 当 $nT + \tau \leq t < (n+1)T$ 时, 我们由条件(9)

可以得到:

$$V(e(t)) \leq V(e(nT + \tau)) \exp(g_2(t - nT - \tau)) \quad (14)$$

根据(13)和(14)进行分析,有:

1) 当 $0 \leq t < \tau$ 时,

$$V(e(t)) \leq V(e_0) \exp(-g_1 t),$$

$$V(e(\tau)) \leq V(e_0) \exp(-g_1 \tau)$$

2) 当 $\tau \leq t < T$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(\tau)) \exp(g_2(t - \tau)) \leq \\ &V(e_0) \exp(-g_1 \tau + g_2(t - \tau)), V(e(T)) \leq \\ &V(e_0) \exp(-g_1 \tau + g_2(T - \tau)) \end{aligned}$$

3) 当 $T \leq t < T + \tau$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(T)) \exp(-g_1(t - T)) \leq \\ &V(e_0) \exp(-g_1 \tau - g_1(t - T) + g_2(T - \tau)) \end{aligned}$$

4) 当 $T + \tau \leq t < 2T$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(T + \tau)) \exp(g_2(t - T - \tau)) \leq \\ &V(e_0) \exp(-2g_1 \tau + 2g_2(T - \tau)) \end{aligned}$$

重复以上的推导,于是有:

5) 当 $nT \leq t < nT + \tau$, 即 $t - \tau/T < n \leq t/T$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(nT)) \exp(-g_1(t - nT)) \leq \\ &V(e_0) \exp(-ng_1 \tau + ng_2(T - \tau)) \exp(-g_1(t - \\ &nT)) \leq V(e_0) \exp(-ng_1 \tau + ng_2(T - \tau)) \leq \\ &V(e_0) \exp\left(-\frac{\tau g_1 - (T - \tau)g_2}{T}(t - \tau)\right) \quad (15) \end{aligned}$$

6) 当 $nT + \tau \leq t < (n + 1)T$, 即 $t/T < n + 1 \leq t + T - \tau/T$ 时,

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq V(e(nT + \tau)) \exp(g_2(t - nT - \tau)) \leq \\ &V(e_0) \exp(-(n + 1)g_1 \tau + (n + 1)g_2(T - \\ &\tau)) \leq V(e_0) \exp\left(-\frac{\tau g_1 - (T - \tau)g_2}{T}t\right) \leq \\ &V(e_0) \exp\left(-\frac{\tau g_1 - (T - \tau)g_2}{T}(t - \tau)\right) \quad (16) \end{aligned}$$

由(15)和(16)可知,对于任意的 $t > 0$, 下式成立:

$$\begin{aligned} V(e(t)) &\leq \\ &V(e_0) \exp\left(-\frac{\tau g_1 - (T - \tau)g_2}{T}(t - \tau)\right) \quad (17) \end{aligned}$$

利用(12)对(17)进行简单计算可以得到

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|e_0\| \exp\{-\gamma(t - \tau)\}$$

证毕.

注1:当 $\tau \rightarrow T$ 时, 间歇反馈将退化为一般的连续状态反馈, 在这种情况下, 条件(8)则变为系统

(6)的同步判据(条件(9)和(10)是多余的), 相应的控制律为:

$$u(t) = -K(x(t) - y(t)), \quad \forall t > 0$$

下面,我们考虑一类特殊的控制律:

$$u(t) = \begin{cases} -k(x(t) - y(t)), & nT \leq t < nT + \tau \\ 0, & nT + \tau \leq t < (n + 1)T \end{cases} \quad (18)$$

$k \in R$, 记 g_2^* 是 g_2 的最小值, 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} P^* A + A^T P^* - g_2^* P^* & P^* B + \delta C^T \Lambda^* \\ B^T P^* + \delta \Lambda^* C & -2\Lambda^* \end{bmatrix} \leq 0 \quad (19)$$

其中, $P^* > 0$, $\Lambda^* > 0$ 是当 $g_2 = g_2^*$ 时定理1中(9)的可行解, (19)等价于下式:

$$\begin{bmatrix} P^* A + A^T P^* & P^* B + \delta C^T \Lambda^* \\ B^T P^* + \delta \Lambda^* C & -2\Lambda^* \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} g_2^* P^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

用 $g_2 \geq g_2^*$ 代替(9), 并且令 $P = P^*$, $\Lambda = \Lambda^*$, 由(8)可得:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P^* A + A^T P^* + 2kP^* + g_1 P^* & P^* B + \delta C^T \Lambda^* \\ B^T P^* + \delta \Lambda^* C & -2\Lambda^* \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} P^* A + A^T P^* & P^* B + \delta C^T \Lambda^* \\ B^T P^* + \delta \Lambda^* C & -2\Lambda^* \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} (2k + g_1)P^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} (2k + g_1 + g_2^*)P^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是我们可以得到以下推论:

推论 1: 设 g_2^* 是使定理1中(9)成立的 g_2 的最小值, 如果存在常数使得下列式子成立:

- 1) $2k + g_1 + g_2^* \leq 0$
- 2) $g_2 \geq g_2^*$
- 3) $\tau g_1 - (T - \tau)g_2 > 0$

则系统(6)是指数同步的, 同时,

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|e_0\| \exp\{-\gamma(t - \tau)\}$$

其中, $\gamma = [\tau g_1 - (T - \tau)g_2]/2T$.

3 参数不确定 Lur's 系统的主从同步

在这一部分, 我们研究带范数有界不确定 Lur'e 系统的间歇控制主从同步问题. 基于上一节得到的结论, 我们可以很容易推导出系统(1)的鲁棒同步判据.

定理 2: 令假设1成立, 如果存在矩阵 $P = P^T > 0$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_h}\} > 0$, 正的常数 g_1, g_2, α 和

β ,使得下列式子成立:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & PB + \delta C^T \Lambda & PD_1 & PD_2 \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda + \beta E_2^T E_2 & 0 & 0 \\ D_1^T P & 0 & -\alpha I & 0 \\ D_2^T P & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} \Pi_2 & PB + k C^T \Lambda & PD_1 & PD_2 \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda + \beta E_2^T E_2 & 0 & 0 \\ D_1^T P & 0 & -\alpha I & 0 \\ D_2^T P & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} \leq 0 \quad (21)$$

$$\tau g_1 - (T - \tau) g_2 > 0 \quad (22)$$

则系统(4)是鲁棒指数稳定的,并且

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|e_0\| \exp\{-\gamma(t - \tau)\}$$

其中, $\Pi_1 = PA + PK + A^T P + K^T P + \alpha E_1^T E_1 + g_1 P$

$$\Pi_2 = PA + A^T P + \alpha E_1^T E_1 - g_2 P.$$

$$\gamma = [\tau g_1 - (T - \tau) g_2] / 2T$$

证明:用 $A + D_1 F_1(t) E_1$ 和 $B + D_2 F_2(t) E_2$ 分别代替定理1中的 A 和 B ,则有:

$$\begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & -2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{12}^T & -2\Lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \end{bmatrix} \leq 0 \quad (24)$$

其中

$$\Sigma_{11} = P(A + D_1 F_1(t) E_1) + PK + (A + D_1 F_1(t) E_1)^T P + K^T P + g_1 P$$

$$\Sigma_{12} = P(B + D_2 F_2(t) E_2) + \delta C^T \Lambda$$

$$\Omega = P(A + D_1 F_1(t) E_1) + (A + D_1 F_1(t) E_1)^T P - g_2 P$$

令 $z = F_1(t) E_1 e, v = F_2(t) E_2 \eta$,通过一些简单计算,可知(23)等价于下式:

$$\begin{bmatrix} e \\ \eta \\ z \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta & PB + \delta C^T \Lambda & PD_1 & PD_2 \\ B^T P + \delta \Lambda C & -2\Lambda & 0 & 0 \\ D_1 P & 0 & 0 & 0 \\ D_2 P & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ \eta \\ z \\ v \end{bmatrix} \leq 0 \quad (25)$$

其中 $\Theta = PA + PK + A^T P + K^T P + g_1 P$

由于 $F_1(t)$ 和 $F_2(t)$ 满足(5),则可以得到

$$\alpha z^T z \leq \alpha e^T E_1^T E_1 e, \beta v^T v \leq \beta \eta^T E_2^T E_2 \eta$$

从而可以很容易验证(20)可以保证(25)成立.同理可知,定理2中的(21)是成立的,对于 $\forall t > 0$

$$\|e(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|e_0\| \exp\{-\gamma(t - \tau)\}$$

因此,由定理2可知,主从系统(1)对于所有允许的不确定性都能达到同步,此时误差系统(4)有唯一全局渐近稳定平衡点 $e = 0$. 证毕.

显然,推论1在参数不确定情况下也是成立的,此时相应的控制律是(18),具体的证明过程这里不再赘述.

4 基于性能指标优化的控制器设计

我们注意到间歇控制器中包含三个需要确定的参数.在这一部分,主要讨论如何确定这些参数使得给定的成本函数在前面推导出的同步条件下是最小的.考虑以下形式的成本函数:

$$J = \int_0^{+\infty} \|u(t)\| dt \quad (26)$$

我们进行最优控制器设计的目的可归结为:系统(1)是指数同步的且 $\min J = \int_0^{+\infty} \|u(t)\| dt$ (27)

由于非线性的存在和间歇控制的作用,目前几乎没有恰当的方法来求解最优问题(27).我们在已得到的同步条件的基础上,可以把上述问题转化为一类次优问题求解.为此我们进行如下处理:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{+\infty} \|u(t)\| dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{nT+\tau} \|Ke(t)\| dt \leq \\ &\|K\| \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{nT}^{nT+\tau} \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \|e_0\| \exp\{-\gamma(t - \tau)\} dt = \|K\| \|e_0\| \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \frac{\exp(\gamma\tau) - 1}{\gamma} \\ &\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-\gamma nT) dt = \|K\| \|e_0\| \sqrt{\frac{\lambda_M(P)}{\lambda_m(P)}} \frac{\exp(\gamma\tau) - 1}{\gamma(1 - \exp(-\gamma T))} \end{aligned}$$

令 $J_1 = \|K\| \frac{\exp(\gamma\tau) - 1}{\gamma(1 - \exp(-\gamma T))}$,则次最优问题可表述为: $\min J_1 = \|K\| \frac{\exp(\gamma\tau) - 1}{\gamma(1 - \exp(-\gamma T))}$,且定理1或2成立.

在控制律为(18)式的情况下,可以得到一个简化的次优问题:

$$\min J_2 = \|k\| \frac{\exp(\gamma\tau) - 1}{\gamma(1 - \exp(-\gamma T))}, \text{且推论1成立.}$$

5 数值仿真

例1:考虑如下 Chua 电路:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - h(x_1)) \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = -bx_2 \end{cases}$$

其中,参数 $a=9, b=14.28, c=1, m_0 = -(1/7), m_1 = 2/7$,非线性项为:

$$h(x_1) = m_1 x_1 + 1/2(m_0 - m_1)(|x_1 + c| - |x_1 - c|)$$

把系统转化为 Lur'e 的形式,则有

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 m_1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -b & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -a(m_0 - m_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$C = [1 \ 0 \ 0], \sigma(\xi) = 1/2(|\xi + c| - |\xi - c|)$ 定义在扇区 $[0, \delta], \delta = 1, n_h = 1$. 在仿真中,我们假设控制周期 $T=2$,控制宽度 $\tau=1.5$. 求解定理 1 中的矩阵不等式组,我们可以得到 g_2 最小值 $g_2^* = 4.44, A$

$$= 26.6790, P = \begin{bmatrix} 12.3938 & 2.5444 & 8.6024 \\ 2.5444 & 28.8645 & -1.3987 \\ 8.6024 & -1.3987 & 8.3390 \end{bmatrix},$$

运用间歇控制律(18),并在 $g_2^* = 4.44$ 求解优化问题(29)得到最小成本值 $J_2 = 12.8135, k = -3.6104, g_1 = 2.7809, g_2 = 4.44$. 图 1-3 给出了仿真结果.

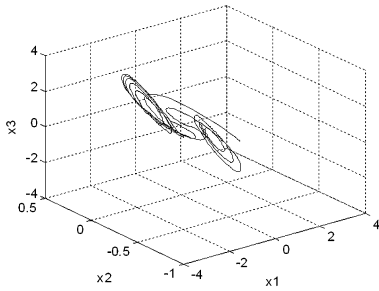


图 1 标称主系统的状态轨迹

Fig.1 State trajectory of nominal master system

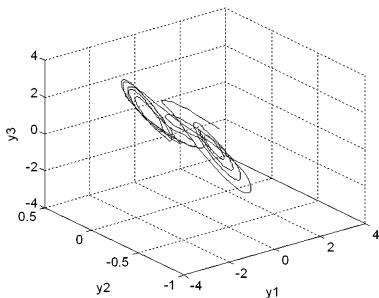


图 2 标称从系统的状态轨迹

Fig.2 State trajectory of nominal slave system

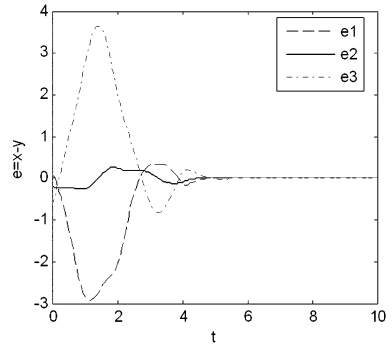


图 3 标称误差系统的轨迹图

Fig.3 Trajectories of nominal error system

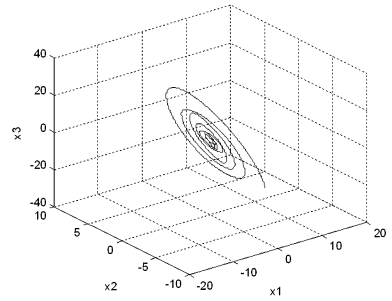


图 4 不确定主系统的状态轨迹

Fig.4 State trajectory of uncertain master system

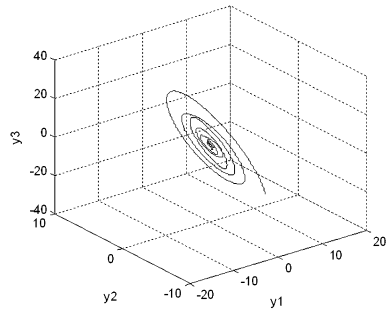


图 5 不确定从系统的状态轨迹

Fig.5 State trajectory of uncertain slave system

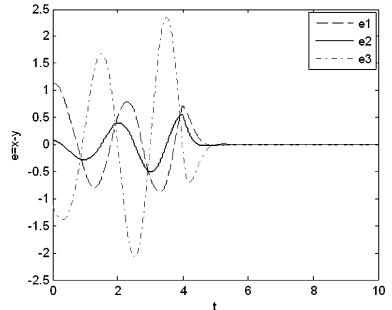


图 6 不确定误差系统的轨迹图

Fig.6 Trajectories of uncertain error system

例2:考虑带有不确定项主从系统同步的情况, $\Delta A(t) = D_1 F_1(t) E_1, \Delta B(t) = D_2 F_2(t) E_2, E_1 = [1 \ 1 \ 0], E_2 = 0.5, D_1 = [0.1 \ 0.1 \ -0.12]^T, D_2 = [0.1 \ -0.1 \ -0.2]^T, F_1(t) = \sin(t), F_2$

$(t) = \cos(t)$, $A, B, C, \sigma(\xi), T, \tau$ 与例1中的相同.

求解定理2中不等式组,可以得到 g_2 的最小值

$$g_2^* = 4.93, \Lambda = 56.9835, \alpha = 1.9259, \beta = 2.4358,$$

$$P = \begin{bmatrix} 22.6637 & 12.6905 & 13.1743 \\ 12.6905 & 36.0336 & 3.6278 \\ 13.1743 & 3.6278 & 10.6465 \end{bmatrix}, \text{最小成本 } J_2$$

= 13.9711. 图4-6给出了相应的仿真结果.

6 结论

本文探讨了Lur'e主从系统间歇控制的指数同步问题. 首先研究了标称系统, 得到误差系统实现稳定的判据. 在此基础上, 进一步分析了不确定主从系统鲁棒同步的间歇控制. 另外, 我们还讨论了如何减小成本函数的控制器优化设计问题. 仿真结果验证了本文方法的有效性.

参 考 文 献

- 1 Pecora L M, Carroll T L. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(8): 821 ~ 824
- 2 Hasler M. Synchronization principles and applications, Circuits and Systems: Tutorials. IEEE-ISCAS'94, 1994, 314 ~ 326

- 3 唐新华, 陆君安, 张伟伟. 基于反步法的混沌系统函数投影同步. *动力学与控制学报*, 2007, 5(3): 216 ~ 219 (Tang Xinhua, Lu Junan, Zhang Weiwei. The function projective synchronization of chaotic system using backstepping design. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(3): 216 ~ 219 (in Chinese))
- 4 Wu C W, Chua L O. A unified framework for synchronization and control of dynamical systems. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1994, 4(4): 979 ~ 998
- 5 Curran P F, Suykens J A K, Chua L O. Absolute stability theory and master-slave synchronization. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1997, 7(12): 2891 ~ 2896
- 6 Chen G, Dong X. From chaos to order-perspectives, methodologies, and applications. Singapore: World Scientific, 1998
- 7 Zochowski M. Intermittent dynamical control. *Physica D*, 2000, 145(3-4): 181 ~ 190
- 8 Li C, Feng G, Liao X. Stabilization of nonlinear systems via periodically intermittent control. *IEEE Trans. Circuits Syst. II*, 2007, 54(11): 1019 ~ 1023
- 9 Xia W, Cao J. Pinning synchronization of delayed dynamical networks via periodically intermittent control. *Chaos*, 2009, 19(1): 013120

EXPONENTIAL SYNCHRONIZATION OF UNCERTAIN MASTER-SLAVE LURE SYSTEMS VIA INTERMITTENT CONTROL *

Dong Zuoyong¹ Wang Yajuan² Bai Minghui² Zuo Zhiqiang³

(1. China Electronics Technology Group Corporation The 54th Research Institute, Shijiazhang 050081, China)

(2. Shijiazhuang Dongfang Thermoelectric Co. Ltd, Shijiazhang 050031, China)

(3. School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract This paper dealt with the problem of master-slave synchronization for uncertain Lur'e systems via intermittent control. By using Lyapunov theory and S-procedure, a sufficient condition was firstly derived such that the nominal Lur'e master and slave systems were exponentially synchronous. Based on the obtained result, the robust exponential synchronization for Lur'e master and slave system with norm-bounded uncertainties was then presented. These synchronization criteria were expressed in terms of matrix inequalities. An optimization strategy was also given to minimize the performance index. Finally, two numerical examples were presented to verify the effectiveness of the theoretical results.

Key words exponential synchronization, intermittent control, parametric uncertainty, matrix inequalities

Received 12 March 2009, revised 9 July 2009.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (60774039)