第 7 卷第 4 期 2009 年 12 月
1672-6553/2009/07(4)/324-4
动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 7 No. 4
Dec. 2009

一类不同维混沌广义同步系统的构造理论及其应用*

张丽丽[1] 雷友发[2]

(1. 广东工业大学 应用数学学院, 广州 510090)(2. 仲恺农业工程学院 计算科学系,广州 510225)

摘要 研究了一类不同维混沌广义同步系统的构造及其应用问题. 根据驱动系统的线性部分是否稳定,分别给出了两个构造定理,据此,人们可以自由构造维数高于驱动系统的广义同步系统,从而将进一步提高广义同步在保密通信中应用的可能性和抗破译性,提高保密通信的安全性. 理论分析和数值仿真进一步验证了本文方法的可行性和有效性.

关键词 混沌广义同步, 不同维, 数值模拟

引言

自从 1990 年美国学者 Pecora 和 Carroll 发现混沌同步以来,混沌同步一直是研究的热门课题. 人们在物理、生物医学、信息工程等众多领域对混沌同步进行了研究,并提出了许多不同类型的同步方法[1~10]. 由于现实中难以产生出两个完全相同的混沌系统, 人们提出了广义同步的概念,即在主从混沌系统之间建立一个函数关系,它比完全同步具有更广阔的应用领域及前景[2,11~12]. 广义同步定义如下:

定义:考虑如下两系统

$$\dot{x}=f(x) \tag{1}$$

$$\dot{y}=g(y,s(x)) \tag{2}$$

其中 $x\in R^n$, $y\in R^m$, $s(x):R^n\to R^m$ 为来自式(1)的驱动函数. 若存在变换 $H:R^n\to R^m$,流形 $M=\{(x,y):y=H(x)\}$,子集 $B=B_x\times B_y\subset R^n\times R^m$,且 $M\subset B$,使得对于所有初始条件在 B 中的响应系统(2)的轨道当 $t\to+\infty$ 时都趋于 M, 则称系统(1)和(2)通过变换 $y=H(x)$ 达到广义同步.

近年来,混沌在保密通信中应用的研究得到了迅速发展,而在此基础上的广义同步理论的发展为保密通信提供了新的工具[11~12].

构造可预见的广义同步系统[13~15]是广义同步的一个重要课题. 已有的成果都局限在对同维数两系统广义同步的研究,文献[15]中尽管已提出两不同维($n>m$)系统间广义同步的理论,但其理论仍取驱动系统中 m 维分量来构造响应系统,故本质上仍是同维数两系统间广义同步理论.

本文讨论的是与已知系统不同维且满足驱动系统维数 n 小于响应系统维数 $m(n<m)$ 的广义同步系统的构造理论及其应用. 本文将根据驱动系统的线性部分是否稳定,分别提出两个理论方法,据此,人们可以更自由地构造可预见的广义同步系统,从而将进一步提高广义同步在保密通信中应用的可能性和抗破译性,提高保密通信的安全性;同时,人们可以构造任意维动力系统的广义同步系统. 理论分析和数值仿真进一步验证了本文方法的可行性和有效性.

1 不同维广义同步系统的构造定理:

不失一般性,设驱动系统分解为

$$\dot{x}=Ax+\varphi(x)\quad x\in R^n \tag{3}$$

其中 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, Ax 是 $f(x)$ 的线性或部分线性部分. 设任意的 $B\in R^{m\times n}$ 且 B 满足列满秩,即 $R(B)=n$. 记 B_L^{-1} 为 B 的左逆,则有下述定理:

定理 1:若矩阵 A 的特征值都具有负实部,则系统(3)和系统(4)

$$\dot{y}=BAB_L^{-1}y+B\varphi(x)\quad y\in R^m \tag{4}$$

通过变换 $y=H(x)=Bx$ 达到广义同步.

证明:设 $z=B_L^{-1}y$,则 $\dot{z}=B^{-1}L\dot{y}=B_L^{-1}(BAB_L^{-1}y+B\varphi(x))=Az+\varphi(x)$.

设 $e=x-z$, 则误差系统 $\dot{e}=\dot{x}-\dot{z}=A(x-z)=Ae$.

因为 A 的特征值都具有负实部,故同步误差系

2009-05-23 收到第 1 稿,2009-08-12 收到修改稿.
* 广东工业大学青年教师基金资助项目(062053)

统渐近稳定,从而 $\lim\limits_{t\to\infty} e = 0$,即系统(3)和系统(4)通过变换 $y = H(x) = Bx$ 达到广义同步.

定理 2:若 $\sigma \in R$,则当 $|a_{ij}| \leqslant \dfrac{\sigma}{n}$ 时,系统(3)与系统(5)

$$\dot{y} = BAB_L^{-1}y + B(\varphi(x) + \sigma x) - \sigma y \tag{5}$$

通过变换 $y = H(x) = Bx$ 达到广义同步.

证明:设 $z = B_L^{-1}y$,则

$$\dot{z} = B_L^{-1}\dot{y} = B_L^{-1}(BAB_L^{-1}y + B(\varphi(x) + \sigma x) - \sigma y) = Az + \varphi(x) + \sigma x - \sigma z$$

设 $e = x - z$,则误差系统 $\dot{e} = \dot{x} - \dot{z} = Ax + \varphi(x) - [Az + \varphi(x) + \sigma(x - z)] = (A - \sigma I)e$.

作 Lyapunov 函数 $V = \dfrac{1}{2}e^T e$,则 $V \geqslant 0$ 且等号当且仅当 $e = 0$ 时成立,

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\dot{e}^T e + \frac{1}{2}e^T \dot{e} = e^T(\frac{A^T + A}{2} - \sigma I)e$$

$\because$ $\dfrac{A^T + A}{2}$ 为对称阵,且其谱半径 $\rho(\dfrac{A^T + A}{2}) \leqslant \|\dfrac{A^T + A}{2}\|_\infty \leqslant \|A\|_\infty \leqslant \sigma$

$\therefore$ $\dot{V} \leqslant 0$

故系统(5)和系统(4)通过变换 $y = H(x) = Bx$ 达到广义同步.

推论:

若 $\sigma = n \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$,则系统(3)与系统(5)通过变换 $y = H(x) = Bx$ 达到广义同步.

2　构造定理的应用

例 1 取驱动系统为以下光滑 Chua's 电路[13]

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 - x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 \\ \dot{x}_3 = \alpha(x_1 - x_3 - bx_3 - \dfrac{(a-b)}{\pi}\arctan(5x_3)) \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\alpha = 10, \beta = 15, a = -1, b = 0.2$.

取线性部分矩阵为 $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -\beta & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha(1+b) \end{bmatrix}$,此时 A 的特征值分别为 $\lambda_{1,2} = -0.1138 \pm 3.7523i$, $\lambda_3 = -12.7724$, $\varphi(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dfrac{(a-b)}{\pi}\arctan(5x_3) \end{bmatrix}$.

不妨取 $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,则 b 的广义左逆为 $B_L^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,由定理 1 知与系统(6)广义同步的响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \\ \dot{y}_2 = -8.5y_1 + y_2 + y_3 - 8.5y_4 \\ \dot{y}_3 = 5y_1 - 12y_3 + 5y_4 - \dfrac{\alpha(a-b)}{\pi}\arctan(5x_3)) \\ \dot{y}_4 = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \end{cases} \tag{7}$$

驱动系统(6)与响应系统(7)的初始值分别选取为

$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.0265, 0.3730, -0.2154)$

$(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (0.0265, 0.3995, -0.2154, 0.0265)$

数值模拟结果如下图 1:

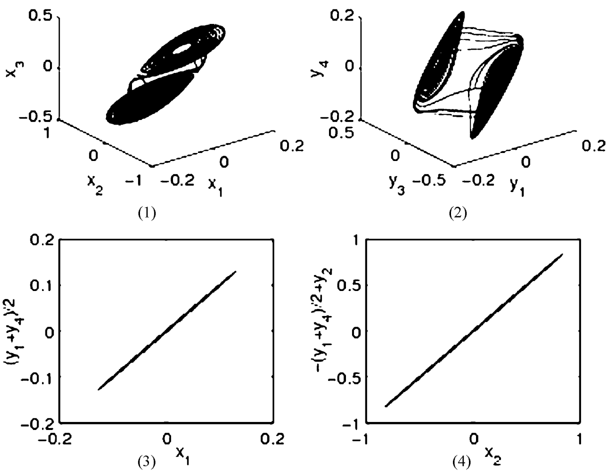

图 1　系统(6)与系统(7)的广义同步图

Fig. 1　The generalized synchronization simulation of system (6) and system (7)

图 1 中(1)为驱动系统(6)的混沌吸引子;(2)为响应系统(7)的混沌投影图;(3)表明变量 x_1 与 $\dfrac{y_1 + y_4}{2}$ 实现了广义同步;(4)表明变量 x_2 与 $-\dfrac{y_1 + y_4}{2} + y_2$ 实现了广义同步,该模拟结果表明系统(6)与系统(7)通过变换 $y = H(x) = Bx$ 达到了广义同步.

例 2:对例 1 中系统(6),将参数 $b = 0.2$ 改为 $b = -1.35$,此时 A 有特征值 $4.6275 > 0$. 取 $\sigma = 45$,

由定理2知与系统(6)广义同步的响应系统为

$$\begin{cases}\dot{y}_1 = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + \sigma(x_1 - y_1) \\ \dot{y}_2 = -8.5y_1 + y_2 + y_3 - 8.5y_4 + \sigma(x_1 + x_2 - y_2) \\ \dot{y}_3 = 5y_1 - 12y_3 + 5y_4 - \dfrac{\alpha(a-b)}{\pi}\arctan(5x_3)) + \\ \quad \sigma(x_3 - y_3) \\ \dot{y}_4 = -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + \sigma(x_1 - y_4)\end{cases} \tag{8}$$

取例1中初始值,数值模拟结果如下图2

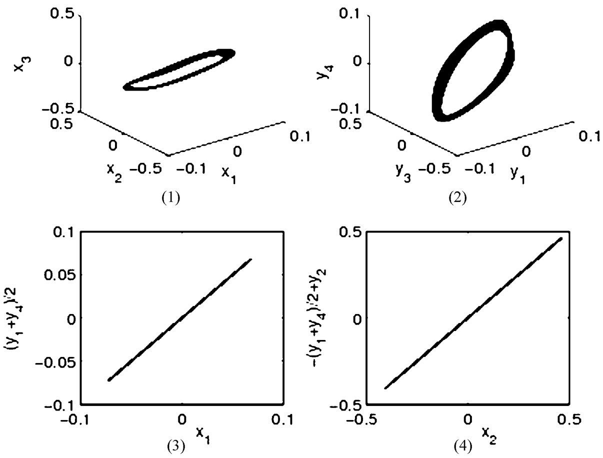

图2 系统(6)与系统(8)的广义同步图

Fig. 2 The generalized synchronization of simulation of system (6) and system (8)

图2中(1)为驱动系统(6)的复杂极限环;(2)为响应系统(8)的复杂极限环投影图;(3)表明变量 x_1 与 $\frac{y_1+y_4}{2}$ 实现了广义同步;(4)表明变量 x_2 与 $-\frac{y_1+y_4}{2}+y_2$ 实现了广义同步,该模拟结果表明系统(6)与系统(8)通过变换 $y=H(x)=Bx$ 达到了广义同步.

3 结论

本文讨论了与已知系统不同维且满足驱动系统维数小于响应系统维数( )的广义同步系统的构造理论及其应用问题. 文中分别就驱动系统的线性部分是否稳定,提出了两个广义同步构造定理,据此,人们可以更自由地构造可预见的广义同步系统. 理论分析和数值仿真进一步验证了本文方法的可行性和有效性. 这将进一步提高广义同步在保密通信中应用的可能性和抗破译性,提高保密通信的安全性.

参考文献

1 杨涛,邵惠鹤. 一类混沌系统的同步方法. 物理学报,2002,51(4):742~748 (Yang T, Shao H H. Synchronization for a class of chaotic systems. *Acta Physica Sinica*, 2002,51(4):742~748(in Chinese))

2 王兴元,孟娟. 超混沌系统的广义同步化. 物理学报,2007, 56(11):6288~6293(Wang X Y, Meng J. Generalized synchronization of hyperchaos systems. *Acta Physica Sinica*,2007,56(11):6288~6293(in Chinese))

3 Lu J H, Zhou T S, Zhang S C. Chaos synchronization between linearly coupled chaotic systems. *Chaos, Solitons and Fractals*,2002,14:529~541

4 J M Gutierrez, A. Iglesias. Synchronizing chaotic systems with positive conditional Lyapunov exponents by using convex combinations of the drive and response systems. *Physics Letters A*, 1998, 239: 174~180

5 陶朝海,陆君安. 混沌系统的速度反馈同步. 物理学报,2005, 54(11): 5058~5061 (Tao C H, Lu J A. Speed feedback synchronization of a chaotic system. *Acta Physica Sinica*,2005,54(11):5058~5061(in Chinese))

6 Wang Qi. Bidirectional partial generalized synchronization in chaotic and hyperchaotic systems via a new scheme. *Commun. Theor. Phys.*, 2006, 45: 1049~1056

7 Yan Jianping, Li Changpin. Generalized projective synchronization for the chaotic Lorenz system and the chaotic Chen system. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 2006, 10(4):299~304

8 王小娟,杨志民. Lorenz 混沌系统的一种广义同步方法. 西北师范大学学报, 2007, 43(5): 47~49 (Wang X J, Yang Z M. An approach of generalized synchronization of Lorenz chaotic system. *Journal of Northwest Normal University (Natural Science)*, 2007, 43(5): 47~49(in Chinese))

9 Shihua Chen, Jinhu Lu. Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2002, 14: 643~647

10 陈保颖. 线性反馈实现 Liu 系统的混沌同步. 动力学与控制学报, 2006,4(1):1~4. (Chen B Y. Linear feedback control for synchronization of Liu chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006,4(1):1~4(in Chinese))

11 Min Lequan, Zhang Xiaodan, Chen guanrong. A generalized synchronization theorem for an array differential equations with application to secure communication. *Int. J. Bi-*

furc. Chaos, 2005,15(1):119 ~ 135

12 朱玮,闵乐泉等.基于混沌系统广义同步定理的信息隐藏方案.计算机工程与应用, 2007, 43(23): 119 ~ 123 (Zhu W, Min L Q, et a1. Encryption scheme and hiding technology of voice based on generalized synchronization theorem for chaos system. *Computer Engineering and Applications*,2007,43(23):119 ~ 123(in Chinese))

13 Zhang X D, Zhang L L, Min L Q. Construction of generalized synchronization for a kind of array differential equations and applications. *Chin. Phys Lett.* ,2003, 20(12): 2114 ~ 2117

14 张丽丽,雷友发.数组微分方程组广义同步系统理论研究.系统工程与电子技术,2006, 28(7): 1067 ~ 1069 (Zhang L L, Lei Y F. Theory study on generalized synchronization for array differential equations and its application. *Systems Engineering and Electronics*, 2006, 28(7): 1067 ~ 1069(in Chinese))

15 Zhang Xiaodan, Min Lequan. Theory for constructing generalized synchronization and applications. *Journal of University of Science and Technology Beijing* , 2000, 7: 235 ~ 239

CONSTRUCTION OF GENERALIZED SYNCHRONIZATION FOR A KIND OF CHAOS SYSTEMS OF DIFFERENT DIMENSIONS AND APPLICATIONS *

Zhang LiLi[1]　Lei YouFa[2]

(1. *Faculty of Applied Mathematics*, *Guangdong University of Technology*, *Guangzhou* 510090,*China*)

(2. *Department of Computer Science*, *ZhongKai University of Agriculture and Engineering Guangzhou* 510225,*China*)

Abstract The construction of generalized synchronization for a kind of chaos systems of different dimensions and applications were investigated. Based on the stability or instability of the linear part of the driving system, two construction theorems were proposed respectively, and one can obtain the generalized synchronization system, whose dimension is higher than the driving one easily. Thus the probability and security of secure communication can be enhanced. Theorem analyses and numerical simulations further demonstrate the effectiveness and validity of the proposed schemes.

Key words generalized synchronization of chaos, different dimension, numerical simulation

Received 23 May 2009,revised 12 August 2009.

* The project supported by the Young Teacher Foundation of Guangdong University of Technology (062053)