

Rossler 系统的 fold-Hopf 分岔分析*

李群宏 席洁珍 丁学利 谭洁燕

(广西大学数学与信息科学学院, 南宁 530004)

摘要 通过理论分析和数值仿真对混沌 Rossler 系统的余维二 fold-Hopf 分岔进行研究. 先求得系统的平衡点, 通过坐标变换, 把系统的平衡点平移到原点. 对经过坐标平移后所得新系统的 Jacobi 矩阵进行分析, 给出系统发生余维二 fold-Hopf 分岔的参数条件. 经验证, 在所选取的参数条件下 Rossler 系统满足发生余维二 fold-Hopf 分岔的非退化条件和横截条件. 因此, 借助一个复变量, 即可将原系统化到规范型形式, 并得到相应的分岔图. 选取符合理论推导的参数条件, 数值仿真实证 Rossler 系统的确发生 fold-Hopf 分岔, 从而验证了理论推导的正确性.

关键词 Rossler 系统, 余维二, fold-Hopf 分岔, 数值仿真

引言

1963 年美国气象学家 Lorenz 在研究气象预报时, 对无穷维动力系统的瑞利-伯纳德热对流问题进行三维截断得到第一个表现出奇异吸引子的动力学系统^[1]. 不久, 德国物理化学家 O. E. Rossler 于 1976 年从 Lorenz 系统中抽出了更为简单、非对称的吸引子结构, 新系统中只含有一个非线性项 x_1x_3 , 被称为 Rossler 系统^[2].

Rossler 系统是一个形式简单但内禀复杂的系统, 其系统方程形式为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = b + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad (1)$$

其中 a, b, c 为正的实常数. 较之于系统 (2) (Rossler, 1979)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + ax_2 \\ \dot{x}_3 = bx_1 + x_3(x_1 - c) \end{cases} \quad (2)$$

原点不可能为系统(1)的奇点, 而原点恒为系统(2)的奇点, 可见两个系统有着不同的动力学行为.

对系统(1)的研究通常集中在如何通过极限环的周期倍化分岔生成一个混沌吸引子或由于同宿轨的存在生成一个更为复杂的混沌吸引子. 文献[3-7]对系统(1)在通向混沌道路上基本的动力学

行为进行研究, 但许多结果均为通过数值分析而得到.

近年来许多学者在对 Rossler 系统混沌控制研究方面得到大量的结果. 文献[8]基于 Lyapunov 稳定性理论, 推导了适应的控制法则, 并将控制施加到具有三个参数的 Rossler 系统, 以达到混沌同步. 文献[9]利用反馈控制策略, 提出了一种新的控制几个经典混沌 Rossler 系统的方法.

余维二分岔点的出现将会极大地影响动力系统的定性性质, 而且对理解系统的全局行为相当重要. 文献[10]通过严格的数学推导及数值仿真研究了混沌 Lü 系统的余维二 Bautin 分岔, 得到了 Bautin 分岔的参数条件, 并给出了分岔曲线的解析表达式. 文献[11, 12]采用中心流形降维, 继而讨论了一个两自由度碰振系统的余维二 Hopf 分岔和混沌. 文献[13]通过谐波平衡法, 对 Rossler 系统进行分岔及动力学性质的定性分析.

本文将通过严格的数学推导及数值仿真研究 Rossler 系统的余维二分岔问题, 给出该系统发生 fold-Hopf 分岔的参数条件, 所得结果丰富了 Rossler 系统的研究成果.

1 Rossler 系统的 fold-Hopf 分岔

1.1 分析背景

考虑如下的光滑动力系统

2009-03-26 收到第 1 稿, 2009-06-04 收到修改稿.

* 广西自然科学基金(0640002)和广西青年科学基金(0832014)资助项目

$$\dot{X} = f(X, \alpha), \quad X \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (3)$$

假设当 $\alpha = 0$ 时原点是系统(3)的奇点, 奇点的算子有一个特征根为 0, 另有一对纯虚特征根 $\pm i\omega_0$, 且其余的 $n - 3$ 个特征根的实部都不为 0. 由中心流形定理, 我们知道系统(3)的中心流形是三维的, 并且在奇点 O 附近的几何结构除了为中心流形部分外, 其它部分都十分清楚, 下面只需考虑三维系统. 为简单起见, 我们仍采用原先的记号:

$$\dot{X} = f(X, \alpha), \quad X \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}^2 \quad (4)$$

将(4)的右端函数 f 在原点 O 附近展开, 得

$$\dot{X} = a(\alpha) + A(\alpha)X + F(X, \alpha) \quad (5)$$

其中 $a(\alpha)$ 为三维常数向量, A 是系统(4)在原点 O 附近的 Jacobi 矩阵, 它的三个特征根分别为 $\lambda_1 = \nu(\alpha)$, $\lambda_{2,3} = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$, $F(X, \alpha) = O(\|X\|^2)$, 是一个光滑的函数, 并且满足 $a(0) = 0, \nu(0) = 0, \mu(0) = 0$ 及 $\omega(0) = \omega_0$.

设 $q_0 \in \mathbb{R}^3, q_1 \in \mathbb{C}^3$ 分别是 A 对应着 ν 和 $\lambda = \mu + i\omega$ 的特征向量. 令 $p_0 \in \mathbb{R}^3, p_1 \in \mathbb{C}^3$ 是 A^T 对应着 ν 和 $\bar{\lambda} = \mu - i\omega$ 的特征向量, 且满足

$$\begin{aligned} \langle p_0, q_0 \rangle &= \langle p_1, q_1 \rangle = 1, \\ \langle p_1, q_0 \rangle &= \langle p_0, q_1 \rangle = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

取 $u = \langle p_0, X \rangle, z = \langle p_1, X \rangle$, 则任一实向量 X 可表示成

$$X = uq_0 + zq_1 + \bar{zq_1} \quad (7)$$

令

$$g(u, z, \bar{z}) = \langle p_0, F(uq_0 + zq_1 + \bar{zq_1}, \alpha) \rangle \quad (8)$$

$$h(u, z, \bar{z}) = \langle p_1, F(uq_0 + zq_1 + \bar{zq_1}, \alpha) \rangle \quad (9)$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 \mathbb{C}^3 上的标量积. 将 g 和 h 进行 Taylor 展开, 显然展开式中的项的次数最低为二次, 即

$$g(u, z, \bar{z}) = \sum_{j+k+l \geq 2} \frac{1}{j! k! l!} g_{jkl} u^j z^k \bar{z}^l \quad (10)$$

$$h(u, z, \bar{z}) = \sum_{j+k+l \geq 2} \frac{1}{j! k! l!} h_{jkl} u^j z^k \bar{z}^l \quad (11)$$

当 $g_{200} \neq 0, g_{011} \neq 0, E \neq 0$ 时, 通过适当的坐标和时间变换, 可将系统(4)化成 fold-Hopf 分岔的 Normal Form 形式:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \beta_1(\alpha) + \xi^2 + s|\zeta|^2 + O(\|\xi, \zeta, \bar{\zeta}\|^4) \\ \dot{\zeta} = (\beta_2(\alpha) + i\omega_1(\alpha))\zeta + (\theta(\alpha) + i\vartheta(\alpha))\xi\zeta + \xi^2\zeta + O(\|\xi, \zeta, \bar{\zeta}\|^4) \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\xi \in \mathbb{R}^1, \zeta \in \mathbb{C}^2$ 是经过坐标变换后的新变量,

$\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha)$ 等是参数 α 的函数, 且可用 g_{jkl} 及 h_{jkl} 等已知函数的组合表示, 详细的推导过程和全新变量的表达式形式可参看文献[14]和[15].

1.2 余维二的 fold-Hopf 分岔

下面我们来讨论系统(1)是否存在 fold-Hopf 分岔情况. 由系统(1)可求得平衡点为

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right) \quad (13)$$

易见(i)当 $c^2 - 4ab = 0$ 时, 系统(1)仅有一个平衡点 $S_1(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2a}, \frac{c}{2a})$; (ii)当 $c^2 - 4ab > 0$ 时, 系统(1)有两个平衡点, 分别为

$$S_2\left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right)$$

及

$$S_3\left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}\right).$$

下面仅就 $c^2 - 4ab = 0$ 的情况进行讨论, 此时参数 b 可用参数 a, c 表示, 系统(1)实际上只与参数 a, c 有关. 对 $c^2 - 4ab > 0$ 的情况可做类似讨论.

由于平衡点 $S_1(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2a}, \frac{c}{2a})$ 不在原点处, 因此我们需要先通过坐标变换将平衡点换至原点 O 处. 为此, 作如下坐标变换, 令

$$x_1 = X + \frac{c}{2}, x_2 = Y - \frac{c}{2a}, x_3 = Z + \frac{c}{2a} \quad (14)$$

则系统(1)转化成如下等价系统

$$\begin{cases} \dot{X} = -Y - Z, \\ \dot{Y} = X + aY, \\ \dot{Z} = \frac{c}{2a}X - \frac{c}{2}Z + XZ. \end{cases} \quad (15)$$

系统(15)在原点处的 Jacobi 矩阵可写为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{2a} + Z & 0 & -\frac{c}{2} + X \end{pmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{2a} & 0 & -\frac{c}{2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

对应的特征方程为

$$\lambda^3 + (\frac{c}{2} - a)\lambda^2 - \frac{ac}{2}\lambda + \lambda + \frac{c}{2a}\lambda = 0 \quad (17)$$

显然 $\lambda_1 = 0$ 是方程 (17) 的一个根. 现假设方程 (17) 另有一对共轭纯虚特征根, 即 $\lambda_{2,3} = \pm i\omega_0$ ($\omega_0 > 0$). 将 $\lambda_2 = i\omega_0$ 代入方程 (17), 由方程等号两边实部、虚部分别相等, 我们有

$$c = 2a, \omega_0^2 = -a^2 + 2 \quad (18)$$

因此, 方程 (17) 出现一对共轭纯虚特征根的条件是

$$0 < a < \sqrt{2} \quad (19)$$

接下来我们验证出现 fold-Hopf 分岔的其它条件. 首先, 我们对系统 (15) 进行如下改写

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{2a} & 0 & -\frac{c}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XZ \end{pmatrix} \quad (20)$$

这里 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ \frac{c}{2a} & 0 & -\frac{c}{2} \end{pmatrix}$, 高阶项 $F(X, Y, Z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ XZ \end{pmatrix}$.

容易算得 A 的三个特征根分别为

$$p_{11} = \frac{ic(-2c + a(-4 + 2a^2 + ac + i\sqrt{a}\sqrt{-(2a+c)(-8+a(2a+c))}))}{2\sqrt{a}(-2a + (a^2-1)c)\sqrt{-(2a+c)(-8+a(2a+c))}}$$

$$p_{12} = \frac{c(i\sqrt{a}(-2a+c) + \sqrt{-(2a+c)(-8+a(2a+c))})}{2(-2a + (a^2-1)c)\sqrt{-(2a+c)(-8+a(2a+c))}}$$

$$p_{13} = \frac{1}{2} + \frac{a}{-2a + (a^2-1)c} - \frac{i\sqrt{ac}(-c + a(-6 + a(2a+c)))}{2(-2a + (a^2-1)c)\sqrt{-(2a+c)(-8+a(2a+c))}}$$

令 $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = uq_0 + zq_1 + \bar{z}q_1$, 即有:

$$X = \frac{2acu + i\sqrt{a}\sqrt{(2a+c)(8-a(2a+c))}z - i\sqrt{a}\sqrt{(2a+c)(8-a(2a+c))}\bar{z} + a(2a+c)(z+\bar{z})}{2c}$$

$$Y = -\frac{2cu + ia\sqrt{a(2a+c)(8-a(2a+c))}z - ia\sqrt{a(2a+c)(8-a(2a+c))}\bar{z} + a((2a+c)-4)(z+\bar{z})}{2c}$$

$$Z = u + z + \bar{z}$$

则 $F(X(u, z, \bar{z}), Y(u, z, \bar{z}), Z(u, z, \bar{z})) = F(u, z, \bar{z})$, 系统 (20) 中的高阶项可化成以 u, z, \bar{z} 为变量的函数. 将 $F(u, z, \bar{z})$ 的表达式代入公式 (8) 和 (9), 即可求得 $g(u, z, \bar{z})$ 和 $h(u, z, \bar{z})$ 的表达式. 由于 g 和 h 的表达式形式复杂, 这里我们没有给出, 此处从略. 下面逐个验证 fold-Hopf 分岔的条件, 当 $c = 2a, 0 < a < \sqrt{2}$ 时有:

$$\lambda_1 = 0,$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{2a^2 - ac \pm i\sqrt{16a^2 - 4a^4 + 8ac - 4a^3c - a^2c^2}}{4a} \quad (21)$$

λ_1 对应的特征向量 $q_0 = (a, -1, 1)^T$, $\lambda_2 = \frac{2a^2 - ac + i\sqrt{16a^2 - 4a^4 + 8ac - 4a^3c - a^2c^2}}{4a}$, 对应的

特征向量 $q_1 = (q_{11}, q_{12}, q_{13})^T$, 其中

$$q_{11} = \frac{2a^2 + ac + i\sqrt{16a^2 - 4a^4 + 8ac - 4a^3c - a^2c^2}}{2c},$$

$$q_{12} = \frac{4a - 2a^3 - a^2c - ia\sqrt{16a^2 - 4a^4 + 8ac - 4a^3c - a^2c^2}}{2c},$$

$$q_{13} = 1.$$

借助 Mathematica5.0 推导可得 $p_0 = (\frac{ac}{(a^2-1)c-2a},$

$$\frac{c}{(a^2-1)c-2a}, \frac{2a}{2a-(a^2-1)c})^T, p_1 = (p_{11}, p_{12}, p_{13})^T,$$

并使得 $A^T p_0 = \lambda_1 p_0, A^T p_1 = \lambda_3 p_1$, 且 $\langle p_0, q_0 \rangle = \langle p_1, q_1 \rangle = 1, \langle p_0, q_1 \rangle = \langle p_1, q_0 \rangle = 0$. 其中

$$g_{200} = \frac{2a}{2-a^2} \neq 0;$$

$$g_{011} = \frac{2a}{2-a^2} \neq 0;$$

$$E = \frac{1}{2} \text{Re} \left[H_{210} + H_{110} \left(\frac{\text{Re}H_{021}}{G_{011}} - \frac{G_{300}}{G_{200}} + \frac{G_{111}}{G_{011}} \right) - \frac{H_{021}G_{200}}{2G_{011}} \right] =$$

$$\frac{3a(1+4a^2)}{16(2-a^2)} \neq 0.$$

上式中 G_{ijk}, H_{ijk} 的表达式可参见文献 [14].

综上,我们得到下列命题:

命题 1 若 Rossler 系统(1)的三个参数 a, b, c 同时满足(i) $0 < a < \sqrt{2}$; (ii) $b = a$; (iii) $c = 2a$, 则该系统在平衡点 $S_1(\frac{c}{2}, -\frac{c}{2a}, \frac{c}{2a})$ 处发生余维二的 fold-Hopf 分岔.

2 分岔的数值研究

在上一节中我们已经验证了系统(1)发生 fold-Hopf 分岔的条件, 接下来我们对 Rossler 系统

进行一些数值分析. 首先, 我们对 Rossler 系统 fold-Hopf 分岔规范型的三阶截断形式进行分析^[13], 现在起关键作用的仅是式(12)中的 s 和 θ , 其中

$$s = \text{sign}[g_{200}g_{011}], \theta = \frac{\text{Re}h_{110}}{g_{200}}$$

经过进一步计算我们有

$$s = 1, \theta|_{c=2a, 0 < a < \sqrt{2}} = -\frac{a^2}{4} < 0 \quad (22)$$

图 1 给出对应这种情况的临界参数值附近的分岔图^[14]:

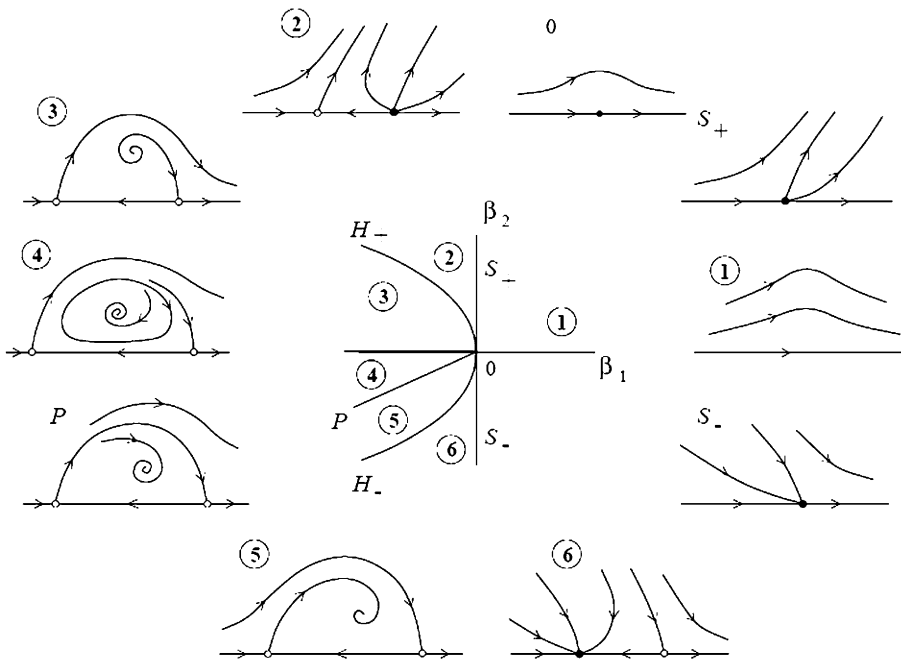


图 1 方程(12)截断系统的分岔图

Fig. 1 Bifurcation diagram of the truncated system of Eq. (12) with $s = 1, \theta < 0$

由分岔图我们可看出, 当参数在区域①中取值时系统无平衡点. 参数取值连续变化, 经 S_+ 时系统发生 fold 分岔, 系统有一个平衡点. 穿过 S_+ 进入②区, 单个平衡点裂成一个鞍点和一个不稳定结点. 参数取值由②进入③, 经 H_+ 发生 Hopf 分岔, 两平衡点变成两个鞍点. 当参数取值由③经 β_1 负半轴到达④, 生成一个不稳定的极限环. 参数取值继续改变, 当在曲线 P 上取值时极限环消失, 取而代之的是一条异宿轨道. 当参数取值落入⑤区时异宿轨破裂, 再经 H_- 发生 Hopf 分岔, 参数值进入⑥区后两鞍点变为一稳定结点和一个鞍点. 最后经 S_- 发生 fold 分岔, 鞍点与稳定的结点重合, 系统仅有一个平衡点.

下面我们直接对原系统进行数值仿真. 取 a 作为控制参数, 固定 $b = 0.2, c = 5$, 此时 Rossler 系统随 a 变化的分岔图见图 2. 当 $a = 31.25$ 时, 系统(1)的临界 fold 分岔点为点 LP. 即当 $a > 31.25$ 时, Rossler 系统没有平衡点; $a = 31.25$ 时, Rossler 系统只有一个平衡点 $(2.5, -0.08, 0.08)$; $a < 31.25$ 时系统有两个平衡点. 点 $H_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示 Hopf 分岔临界点, 其中除了 H_2 为中立型鞍点外, 其余三个点处均发生超临界或亚临界的 Hopf 分岔, 此时系统的第一 Lyapunov 系数值小于零. 图 3 和图 4 分别给出了图 2 中 H_3 及 H_4 点附近局部放大图. 经超临界或亚临界 Hopf 分岔后产生稳定的极限环, 且随着参数的改变, 极限环变化平缓.

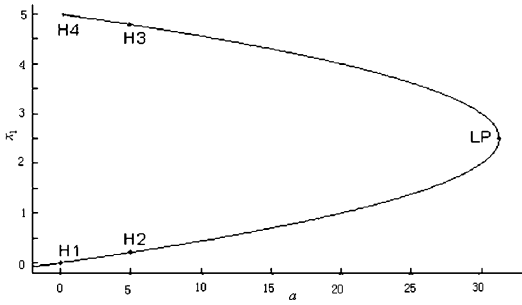
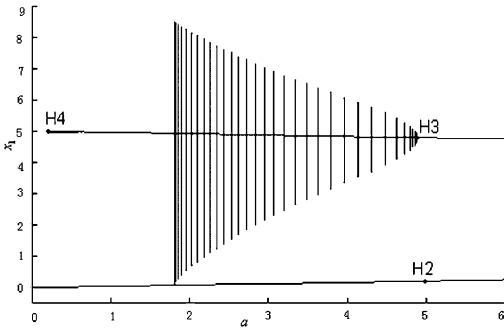
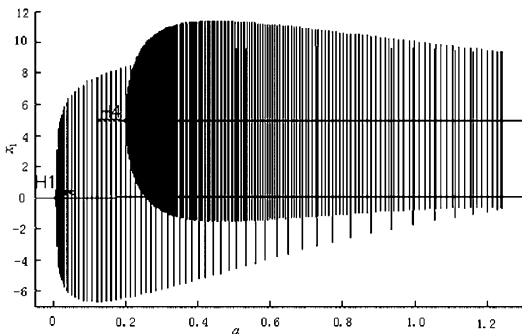
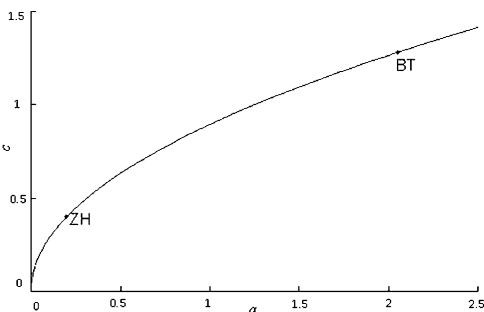
图2 Rossler系统分岔图, $b=0.2, c=5$ Fig. 2 The bifurcation diagram of Rossler system with $b=0.2$ and $c=5$ 图3 Rossler系统分岔局部放大图, $b=0.2, c=5$ Fig. 3 The local enlarging bifurcation diagram of Rossler system with $b=0.2, c=5$ 图4 Rossler系统分岔局部放大图, $b=0.2, c=5$ Fig. 4 The local enlarging bifurcation diagram of Rossler system with $b=0.2, c=5$ 图5 平面上 Rossler 系统分岔投影图, $b=0.2$ Fig. 5 The two-parameter bifurcation diagram of Rossler system in the (a, c) -plane with $b=0.2$

图5给出了当 $b=0.2$ 时 Rossler 系统 fold 分岔曲线 $c^2 - 4ab = 0$ 在 (a, c) 平面的投影图. ZH 点及 BT 点分别表示在该点坐标所对应的参数值处将会发生 fold-Hopf 分岔和 Bogdanov-Takens 分岔. ZH 点对应的参数值为 $a=0.2, c=0.4$, BT 点对应的参数值为 $a=2.049717, c=1.280537$. 这些参数的取值与命题 1 的结论相符合.

3 结论

从文献中来看,目前对系统(1)的研究还不多.我们从理论和数值两方面研究了 Rossler 系统余维二的 fold-Hopf 分岔,给出了 Rossler 系统发生余维二 fold-Hopf 分岔的参数条件.可以看到,数值结果与理论研究的结论相符,从而验证了理论推导的正确性.通过本文的研究,不仅反映了 Rossler 系统的复杂性,而且也加深了对该系统的认识.

参 考 文 献

- 1 张琪昌,王洪礼,竺致文等.分岔与混沌理论及应用.天津:天津大学出版社,2005 (Zhang Qichang, Wang Hongli, Zhu Zhiwen, et al. Theory of Bifurcations and Chaos and Their Applications. Tianjin University Press, 2005 (in Chinese))
- 2 黄润生,黄浩.混沌及其应用.武汉:武汉大学出版社,2005 (Huang Yunsheng, Huang Hao. Chaos and its application. Wuhan University Press, 2005 (in Chinese))
- 3 Thompson J M T, Stewart H B. Nonlinear dynamics and chaos. John Wiley, Chicester, 1986
- 4 Holden A V. Chaos. Manchester: Manchester University Press, 1986
- 5 Strogatz S H. Nonlinear dynamics and chaos. Perseus, Cambridge, 1994
- 6 Sprott J C. Chaos and time-series analysis. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003
- 7 Magnitskii N A, Sidorov S V. New methods for chaotic dynamics. Singapore: World Scientific, 2006
- 8 Park J H. Adaptive synchronization of Rossler system with uncertain parameters. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 25 (2): 333 ~ 338
- 9 Liao Xiaoxin, Yu Pei. Chaos control for the family of Rossler systems using feedback controllers. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2006, 29: 91 ~ 107
- 10 Lū Zhuosheng, Duan Lixia. Codimension-2 Bautin bifur-

- cation in the Lü system. *Physica Letters A*, 2007, 366: 442 ~ 446
- 11 Wen G L. Codimension-2 Hopf bifurcation of a two-degree-of freedom vibro-impact system. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 242 (3): 475 ~ 485
- 12 乐源, 谢建华, 丁旺才. 一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌. *动力学与控制学报*, 2004, 2(3): 36 ~ 41 (Le Yuan, Xie Jianhua, Ding Wangcai. Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system. *Journal of dynamics and control*, 2004, 2(3): 36 ~ 41 (in Chinese))
- 13 Genesio R, Innocenti G, Galdani F. A global qualitative view of bifurcations and dynamics in the Rossler system. *Physica Letters A*, 2008, 372: 1799 ~ 1809
- 14 Kuznetsov YA. Elements of applied bifurcation theory, second ed. New York: Springer-Verlag, 1998
- 15 Guckenheimer J, Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York: Springer-Verlag, 1997

FOLD-HOPF BIFURCATION IN A ROSSLER SYSTEM *

Li Qunhong Xi Jiezhen Ding Xueli Tan Jieyan

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning 530004, China)

Abstract Rigorous mathematical analysis and numerical simulations were used to study the codimension-2 fold-Hopf bifurcation in the chaotic Rossler system. Through simple calculation, the coordinates of three equilibria were obtained firstly. Then the origin of coordinates was translated to the equilibrium studied later using the change of variables. Parameter conditions for the fold-Hopf bifurcation were specified by analyzing the Jacobian matrix of the new system after transformation. Moreover, some extra nondegeneracy and transversality conditions were verified for the chaotic Rossler system possessing the codimension-2 fold-Hopf bifurcation under specified parameter conditions. With the help of a complex variable, the Rossler system can be brought into the normal form and the corresponding bifurcation diagram can also be obtained. For the bifurcation parameter conditions derived theoretically, numerical simulations show that the fold-Hopf bifurcation indeed occurs in the Rossler system, which confirms the results of the theoretical analysis.

Key words Rossler system, codimension-2, fold-Hopf bifurcation, numerical simulation