

基于精细计算的动载荷反演问题正则化求解

毛玉明 郭杏林 赵岩 吕洪彬

(大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室,大连 116023)

摘要 提出了一种新的动态载荷识别的时域法,通过精细计算法建立精确的动态载荷识别问题反演模型,对该反演问题对应的结构矩阵进行奇异值分解,剖析了动态载荷识别病态问题的本质,并引入正则化技术寻求一稳定近似解;最后将提出的方法成功应用于平面框架结构的动态载荷识别,为动态载荷识别的理论发展和实际应用打下一定的基础.

关键词 载荷识别, 精细积分法, 奇异值分解, 正则化技术, 不适定问题

引言

在动力学控制和结构优化设计过程中,准确知道结构所受的动态载荷是极其重要的;同时在结构的疲劳寿命估计和结构健康监测过程中,准确预知结构所受动态载荷也是不可缺少的一部分.然而,在实际工程中,直接测量结构动态载荷是往往难以实现;如力传感器的引入会阻碍载荷的传递路径,或者改变结构的动态特性.而此时结构的动态响应往往便于测量,结构动态载荷反演问题得以提出,即通过测量结构的动态响应来间接确定结构动态载荷.

许多学者对动态载荷识别反演问题进行深入研究和探索^[1-2]. Steven^[1], Hirotsugu Innoue et. l^[3], Dobson and Rider^[4] and Nordström and Nordberg^[5]等对动态载荷识别问题研究做了系统总结. Stelzner and Kammer 等提出了状态空间下载荷识别时域法,用数值仿真技术来识别空间飞行器和空间站之间的力和力矩^[6]. 张方、秦远田等用广义正交多项式特征技术建立载荷识别模型,解决了复杂结构的分布动态载荷识别问题^[7]. 通常情况下,结构动态载荷识别问题是不适定的,即仅通过带有测量误差的响应信息不能唯一确定结构动态载荷的空间分布和时间历程或者频域信息,许多学者对此进行深入研究^[8-9]. 随着动态测试技术和计算机仿真技术的发展,动态载荷识别反演问题研究方兴未艾,但作为一个较年轻的知识领域,其研究还不

够完善,这包括动态载荷识别算法的研究、测点的最优布置以及精细识别模型的建立等等,其中精细建模作为载荷识别问题的重要内容之一,直接影响载荷识别的精度,但这一方面的研究并不多见. 本文将从精细建模入手,研究动态载荷识别反演问题的病态特性,进而采用正则化技术求解该反演问题,最后将提出的方法应用于平面桁架结构的动态载荷识别中,并进一步讨论了采样时间、测量误差等因素对载荷识别结果的影响.

1 动态载荷识别精细建模

1.1 动态载荷识别建模

结构系统的状态空间控制方程为:

$$\dot{v}(t) = H v(t) + f(t) \quad (1)$$

其中

$$v = [x^T \quad p^T]^T, H = \begin{bmatrix} A & D \\ B & E \end{bmatrix}, f = [0^T \quad r^T]^T \quad (2)$$

$$p = M\dot{x} + \frac{1}{2}Cx, A = -\frac{1}{2}M^{-1}C,$$

$$B = \frac{1}{4}CM^{-1}C - K, E = -\frac{1}{2}CM^{-1}, D = M^{-1} \quad (3)$$

M, C, K 分别是对称正定的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵, r 是结构系统的输入载荷; $\dot{x}(t)$ 和 $x(t)$ 分别是系统的速度向量和位移向量. 假定在时间步长 $f(t)$ 内为阶跃载荷,应用指数迭加法,对方程(1)进行积分并时域离散化可以得到,

$$v(t) = v(t_0) \exp(H(t - t_0)) + \int_{t_0}^t \exp(H(t - \tau)) f(\tau) d\tau \quad (4a)$$

$$v(k+1) = Tv(k) + (T-1)H^{-1}f(k), (k=0, 1, 2, \dots, N_i) \quad (4b)$$

$T = \exp(H\tau)$ 是指数矩阵, τ 是积分步长, N_i 是整个时域内的采样点数. 实际工程中只能测量部分响应数据, 假定 y 为测量响应, D_m 为测量提取矩阵, 则方程(4b)可以写为,

$$y(k+1) = D_m v(k+1) = G_k^0 v(0) + \sum_{i=1}^k G_i f(k-i) \quad (5a)$$

$$b(k+1) = y(k+1) - G_k^0 v(0) = \sum_{i=1}^k G_i f(k-i) \quad (5b)$$

$$G_i^0 = D_m T^i, G_i = D_m T^i (T-1) H^{-1} \quad (5c)$$

方程(5b)即为离散形式的动态载荷识别模型, 其中 G_i^0 是与初始条件有关的参数矩阵, G_i 为滑动平均模型的 Markov 参数矩阵, 将方程(5b)写为矩阵形式,

$$b = Gf \quad (6)$$

1.2 载荷识别模型的精细计算

方程(5b)中的参数 G_i^0 和 G_i 的计算精度, 直接关系到动态载荷识别模型的精度; 而指数矩阵 T 的计算又成为其中的关键. 这里采用加法定理进行 2^N 精细计算^[10], 具体做法为: 将积分步长 τ 进一步划分为 2^N 个子区间, 即 $\Delta t = \tau/2^N$, N 根据需要达到的精度选取的整数, 这里取 $N = 20$. 在时间步长 τ 内, 指数矩阵 T 可用如下截断的泰勒展开形式计算,

$$\begin{cases} T = \exp(H\Delta t)^m = (I + I_{a,0})^m \\ T_{a,0} \approx A\Delta t + (A\Delta t)^2/2! + (A\Delta t)^3/3! + (A\Delta t)^4/4! \\ T_{a,i} = 2 \times T_{a,i-1} + T_{a,i-1} \times T_{a,i-1} \end{cases} \quad (7a)$$

$$(I + T_{a,0})^m = (I + T_{a,1})^{m/2} = (I + T_{a,2})^{m/4} = \dots = (I + T_{a,N}) = T \quad (7b)$$

上面的计算中, 只有(7a)第二式是近似的, $T_{a,0}$ 的舍入误差为 $10^{-30} O(\Delta t^5)$ 已经远低于一般计算机的舍入误差, 对矩阵 T 的计算已经达到一般计算机范围内的精确解, 也就是说载荷识别模型方程中的参数矩阵 G_i^0 和 G_i 是高度精确的, 因此该动态载荷识别模型是高度精确的.

2 动态载荷识别模型的病态特性和正则化求解

虽然动态载荷识别模型是高度精确的, 但由于反问题的不适定性, 使得该动态载荷识别问题仍为一病态问题, 下面采用奇异值分解技术来剖析这一问题的本质, 并提出相应的正则化解. 为便于描述, 记 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m = N_i \times 2n_0$, $n = N_i \times 2n_i$, n_0 和 n_i 分别为测量响应数目和识别动态载荷数目, 矩阵 G 的奇异值分解形式为:

$$G = U \Sigma V^T = \sum_{i=1}^n u_i \sigma_i v_i^T \quad (8)$$

U 和 V 是由左右奇异值向量 u_i 和 v_i 组成的正交矩阵, 满足 $U^T U = V^T V = I$; $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 \dots \sigma_n)$ 是由结构矩阵的奇异值 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ 组成的对角矩阵. 元素 σ_i 是矩阵 G 的奇异值, u_i 和 v_i 分别是左右奇异向量. 通过矩阵分析理论, 可以得到载荷识别病态问题的两个特征, 一是矩阵 G 的奇异值逐渐趋向于零, 并且随着矩阵 G 维数的增加, 趋向于零的极小奇异值数目会增多; 另一方面是随着 σ_i 的减小, 左右奇异值向量 u_i 和 v_i 中的元素将有更多的符号变化. 为方便, 假定矩阵 G 没有零奇异值, 采用奇异值分解技术, 方程(6)的最小二乘解为

$$f_{LS} = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \quad (9)$$

当系数 $|u_i^T b|$ 没有奇异值 σ_i 衰减的快时, 最小二乘解 f_{LS} 由相对小的奇异值 σ_i 对应向量所主导, f_{LS} 有很多符号变化产生高频振荡, 呈现随机噪声的形式. 一般来说, 由于测量噪声的影响, 方程(6)的直接求解往往得到无意义的结果, 因此为求得该问题有效稳定解, 有必要对识别载荷添加一些限制条件, 这就是正则化的目的.

一个广泛应用的正则化方法就是 Tikhonov 正则化方法, 由 Tikhonov^[11] 和 Phillips^[12] 分别独立提出. 本文采用零阶 Tikhonov 正则化方法, 将方程(6)的求解转化为,

$$\min \{ \|Gf - b\|_2 + \lambda \|f\|_2 \} \quad (10)$$

λ 是一大于零的正则参数, 用来控制载荷项 $\|f\|_2$ 和残差项 $\|Gf - b\|_2$ 之间的平衡; 正则化方法的难点在于正则参数 λ 的选取, 一个最优的正则参数应使正则解较好地平衡扰动误差和正则化误差. 广义交叉检验函数(GCV)作为一种有效的正则参数选取准则, 已被广泛应用于反演问题的求解^[13]; 在此亦

采用 GCV 方法来选取有效的正则参数,进而识别结构动态载荷.

3 数值仿真

数值模型为如图 1 所示的 21 杆结构,每根杆的水平方向和垂直方向的长度为 5m,集中于节点的质量是 $1 \times 10^3 \text{ Kg}$,本算例中刚度取 $3 \times 10^4 \text{ KN} \cdot \text{m}^{-2}$,阻尼比取 0.02;沿 x 方向作用于节点 7 和 11 的输入载荷如式(11)所示,作用时间为 2s,节点 6、8、10 为响应测量位置.

$$\begin{cases} F_7 = 10(1 - \cos(\pi t))\sin(3\pi t) \\ F_{11} = 100te^{-5t} \end{cases} \quad (11)$$

数值仿真主要是验证,精细建模和正则化技术在动态载荷反演问题求解中的有效性.

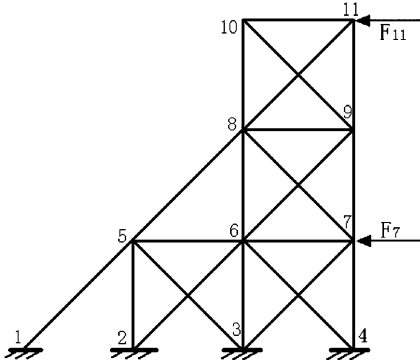


图 1 平面桁架结构
Fig. 1 The plane truss framework

仿真结果及讨论:为讨论精细建模对识别结果的影响,采样时间 τ 分别取为 0.01s、0.02s、0.05s,并在测量响应中加入 1%、5% 的随机误差.表 1 是不同的采样时间和测量误差下载荷识别结果的均方根误差,可以看出识别误差随着采样时间的增加而增大,但从图 3、4、5、6、7、8 可以看出,识别结果仍能很好地逼近真实输入载荷.下面以采样时间 0.02s、测量误差 1% 为例,分析正则化技术在载荷识别中的有效性.

表 1 不同测量噪声和采样时间下的载荷识别均方根误差

Table 1 Root mean square error of identification results with different measurement noise and sampling time		Sampling time (s)	0.01	0.02	0.05
Identification error (%)	F7	1%	1.52	1.87	7.21
		5%	12.51	23.95	53.74
	F11	1%	6.88	6.98	11.34
		5%	20.12	24.42	55.35

图 2 为采样时间 0.02s、测量噪声 1% 时的 Picard 图,即奇异值 σ_i 、系数 $|u_i^T y|$ 和 $|u_i^T y|/\sigma_i$ 随着指标 i 的变化关系,可以看出系数 $|u_i^T y|$ 下降速度较奇异值 σ_i 要快,最大奇异值与最小奇异值的比值为 1.5279×10^5 ,因此该问题为病态问题,直接求解会使响应的测量误差被放大,造成识别结果失真.为此,将正则化技术引入识别过程,由广义交叉检验准则计算的正则参数为 $\lambda = 5.21 \times 10^{-8}$,并由

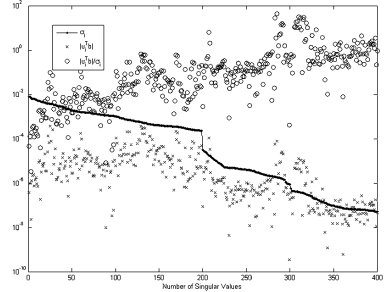


图 2 采样时间 0.02s、噪声 1% 时的 Picard 图

Fig. 2 The Picard plot with 1% measurement noise and sampling time 0.02s

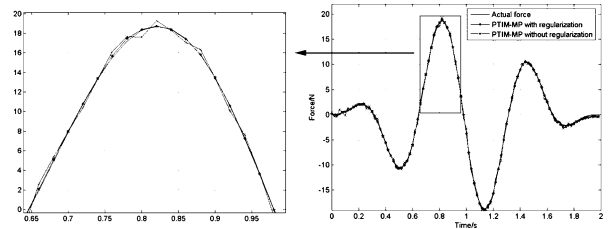


图 3 采样时间 0.02s、1% 测量误差时节点 7 的载荷识别结果

Fig. 3 Identification result on node 7 with sampling time 0.02s and 1% measurement noise

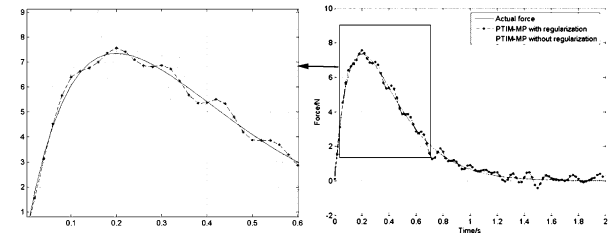


图 4 采样时间 0.02s、1% 测量误差时 11 节点的载荷识别结果

Fig. 4 Identification results on node 11 with sampling time 0.02s and 1% measurement noise

方程(11)得到的识别结果如图 3、4 所示,可以看出由正则化技术识别出的载荷 F_7 、 F_{11} 能很好的逼近真实载荷,其均方根误差分别为 1.87%、6.98%,而未用正则化技术的识别结果均方根误差分别为 5.11% 和 30.94%.另外需要指出的是正则化技术识别的结果仍有较小跳动,这是由于测量误

差混杂于结构的动态信息中,单纯的数学技巧无法彻底解决该问题。

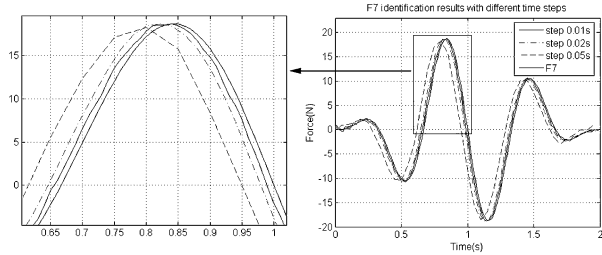


图5 1%测量噪声、不同积分步长时7点的识别结果

Fig.5 Identification results of node 7 with 1% measurement noise and different measurement noise

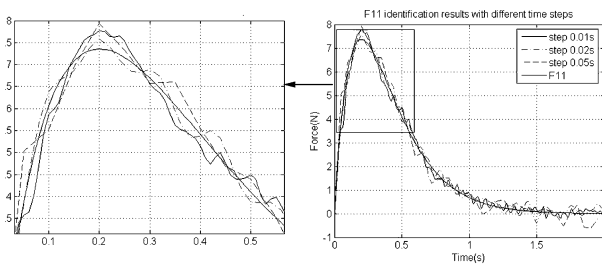


图6 1%测量噪声、不同积分步长时11点的识别结果

Fig.6 Identification results of node 11 with 1% measurement noise and different measurement noise

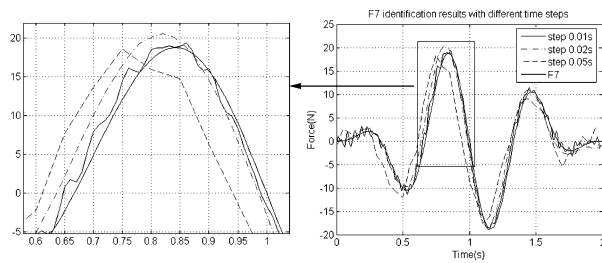


图7 5%测量噪声、不同积分步长时7点的识别结果

Fig.7 Identification results of node 7 with 5% measurement noise and different measurement noise

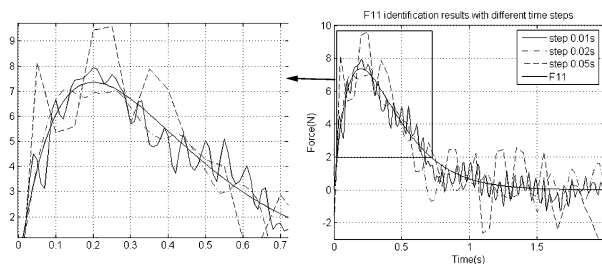


图8 5%测量噪声、不同积分步长时11点的识别结果

Fig.8 Identification results of node 11 with 5% measurement noise and different measurement noise

7)要好于 F_{11} 的识别结果(图4、6、8所示),这是由于测点位置为6、8、10,该测点位置更好的反应了 F_7 附近的信息,有关传感器配置对载荷识别结果的影响超出本文的范畴,相关问题将在以后的工作中讨论。

4 结论

在状态空间推导了一种动态载荷识别的时域法,将载荷识别模型的精细计算和正则化技术结合应用,利用结构的动态响应准确确定结构的动态载荷. 载荷识别模型的精细计算确保允许较大步长时能很好的识别输入载荷,正则化技术能很好的解决载荷识别过程中的病态特性. 文中提出的方法可以推广到解决复杂结构的动态载荷识别问题,相应的研究结果将进一步应用于实验研究。

参 考 文 献

- 1 侯秀慧,邓子辰,黄立新. 桥梁结构移动载荷识别的辛精细积分算法. 动力学与控制学报,2008,6(1):66~72 (Hou Xiuhui, Deng Zichen, Huang Lixin. An improved symplectic precise integration method for moving load identification of bridge structure. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,6(1):66~72 (in Chinese))
- 2 蔡元奇,朱以文. 基于逆向滤波器的动态载荷时域识别方法. 振动工程学报,2006,19(2):200~205 (Cai Yuanqi, Zhu yiwen. Time domain identification method for dynamic loads on inverse direction filter. *Journal of Vibration Engineering*, 2006,19(2):200~205(in Chinese))
- 3 K K Stevens. Force identification problems; an overview. Proceeding of the SEM Spring Conference on Experimental Mechanics, Houston, 1987: 838~844
- 4 B J Dobson, E Rider. A review of the indirect calculations of excitation forces from measured structural response data. Proceeding of the Institution of Mechanical Engineering Science C2,1990,(204):69~75
- 5 Hirotugu Innoue, John J Harrigan, Stephen R Reid. Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force. *Appl Mech Rev*,2001,54(6):503~524
- 6 Adam D Stelzner, Daniel C Kammer, Paul Milenkovic. A time domain method for estimating forces applied to an unrestrained structure. *Journal of Vibration and Acoustic*, 2001,123:524~532
- 7 张方,秦远田,邓吉宏. 复杂动态载荷识别技术研究. 振动

最后需要指出的是:从表2的识别结果误差和图3、4、5、6、7、8可以看出, F_7 的识别结果(图3、5、

- 工程学报, 2006, 19 (1): 81 ~ 85 (Zhang Fang, Qin Yuan-tian, Deng Jihong. Research of identification technology of dynamic load distributed on the structure. *Journal of Vibration Engineering*, 2006, 19 (1): 81 ~ 85 (in Chinese))
- 8 E Jacquelin, A Bennani, P Hamelin. Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 265: 81 ~ 107
- 9 P C Hansen, Tole Koldborg Jensen, Giuseppe Rodriguez. An adaptive pruning algorithm for the discrete L - curve criterion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2007, 198: 483 ~ 492
- 10 钟万勰. 应用力学的辛数学方法. 北京: 高等教育出版社, 2006 (Zhong Wanxie. *Application Mechanics of Symplectic Mathematical Method*. Beijing: High Education Press, 2006 (in Chinese))
- 11 A N Tikhonov. Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Sov. Math. Dokl.* 4, 1963: 1035 ~ 1038
- 12 D L Phillips. A technique for the numerical solution of certain equations of the first kind. *J. ACM* 9 1962: 84 ~ 97
- 13 Golub G H, Heath M, Wahba G. Generalized cross - validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 1979, 21: 215 ~ 223

A SOLUTION TO INVERSE PROBLEM OF DYNAMIC FORCE IDENTIFICATION USING PRECISE COMPUTATION AND REGULARIZATION TECHNIQUE

Mao Yuming Guo Xinglin Zhao Yan Lv Hongbin

(A State Key Laboratory of Structural Analysis for Industry Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract A state space force identification method was presented to accurately solve the inverse problem of dynamic force identification by measuring the structural responses. This method is based on precise computation for force identification model and regularization technique. A singular valued decomposition (SVD) method was introduced to analyze the essential ill-posedness of inverse problem of force identification, and the Tikhonov regularization technique was used to solve this ill-posed problem in order to obtain a stable solution. Finally, the proposed method was successfully applied to reconstruct the time history of forces acting on a plane frame structure, and the results show that this method is a promising way to reconstruct the time history of exerting force on structure.

Key words force identification, precise time-step integration method, singular valued decomposition (SVD), regularization technique, ill-posed problem