第7卷第4期2009年12月
1672-6553/2009/07(4)/289-4
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 7 No. 4
Dec. 2009

几个非线性偏微分方程的非古典对称及相似解

郭华　郑丽霞　白银
（内蒙古工业大学理学院，呼和浩特　010051）

摘要　研究了一些非线性偏微分方程的非古典势对称和非古典对称，得到了某些方程的新的势对称和新的对称，同时也得到了其伴随系统的新的对称，并求出了一些相似解. 这些解对进一步研究这些非线性偏微分方程所描述的物理现象具有广泛的应用价值.

关键词　非线性偏微分方程，　非古典势对称，　非古典对称，　相似解

引言

近年来，非线性现象在物理领域的作用越来越重要，许多物理问题中都存在大量的重要的非线性问题，而其中许多问题的研究最终能用非线性偏微分方程来描述，所以寻找其精确解具有重要意义. Kdv－Burgers 方程，作为物理学中重要的非线性偏微分方程之一，可看作最简单的耗散模型之一，是人们在研究含气泡的液体流动以及弹性管道中的液体流动问题时提出的. 而非线性扩散方程，则可以描述许多物理过程中的扩散过程，比如等离子体物理和流体动力学中的扩散过程.

本文对 Kdv－Burgers 方程、一个非齐次非线性扩散方程和方程 $k_t = k^2(k_{\theta\theta}+k)$ 进行了研究. 我们主要采用了 Johnpillal 和 Kara 提出的非古典势对称论计算出了第一个方程的非古典势对称，同时采用文献[1]中新的势对称的方法研究了第二个方程的非古典势对称，以及计算出了第三个方程的非古典对称. 得到了原方程及其伴随系统的一些新的对称，并求出了原方程的一些相似解.

现在以有两个自变量的偏微分方程为例，给出求偏微分方程非古典势对称的一般步骤：

假设 $u(x,t)$ 满足的偏微分方程可以写成守恒形式（散度形式）

$$D_x f(x,t,u_{(1)},\cdots,u_{(m-1)}) - D_t g(x,t,u,u_{(1)},\cdots,u_{(m-1)}) = 0 \tag{1}$$

引入势函数 v，得到原方程(1)的伴随系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial t}=f(x,t,u,u_{(1)},\cdots,u_{(m-1)})\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x}=g(x,t,u,u_{(1)},\cdots,u_{(m-1)})\end{cases} \tag{2}$$

假设方程组(2)具有如下形式的 *Lie* 对称群生成元

$$V=\xi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\phi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+\eta(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v} \tag{3}$$

为了寻找方程(1)的非古典势对称群生成元，就要附加下面的不变曲面条件

$$\begin{cases}\tau(x,t,u,v)u_t+\xi(x,t,u,v)u_x-\phi=0\\ \tau(x,t,u,v)v_t+\xi(x,t,u,v)v_x-\eta=0\end{cases} \tag{4}$$

然后利用式(2)和式(4)求出偏导数 u_t,u_x,v_t,v_x，并将它们代入到对称群确定方程组中

$$\begin{cases}V^{(m-1)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial t}-f\right)\Big|_{\frac{\partial v}{\partial t}-f=0,\frac{\partial v}{\partial x}-g=0}=0\\[2mm] V^{(m-1)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-g\right)\Big|_{\frac{\partial v}{\partial t}-f=0,\frac{\partial v}{\partial x}-g=0}=0\end{cases} \tag{5}$$

得到确定方程组，进一步就可以求出 ξ,τ,ϕ,η. 只要对称群生成元系数函数 ξ,τ,ϕ 中的任何一个显含 v（η 不作此要求）或者 $\xi_v^2+\tau_v^2+\phi_v^2\neq 0$，则称 V 就是(1)的一个非古典势对称.

1　Kdv－Burgers 方程

$$u_t+uu_x-\alpha u_{xx}+\beta u_{xxx}=0 \quad (\alpha、\beta\neq 0) \tag{6}$$

其伴随系统为

$$\begin{cases}v_x=u,\\ v_t=-\dfrac{1}{2}u^2-\beta u_{xx}+\alpha u_x\end{cases} \tag{7}$$

2009-04-18 收到第1稿，2009-05-09 收到修改稿.

由(7)进一步得到(6)的伴随积分方程

$$v_t+\frac{1}{2}v_x^2-\alpha v_{xx}+\beta v_{xxx}=0 \tag{8}$$

首先,设(7)的 *Lie* 对称向量为(3),对 V 进行二阶延拓

$$V^{(2)}=V+\phi_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_x}+\phi_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial u_t}+\eta_x^{(1)}\frac{\partial}{\partial v_x}+\eta_t^{(1)}\frac{\partial}{\partial v_t}+\phi_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xx}}+\phi_{xt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{xt}}+\phi_{tt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial u_{tt}}+\eta_{xx}^{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{xx}}+\eta_{xt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{xt}}+\eta_{tt}^{(2)}\frac{\partial}{\partial v_{tt}}$$

把 $V^{(2)}$ 作用到系统(7)中,得到

$$\begin{cases}\eta_x^{(1)}-\phi=0\\ \eta_t^{(1)}+u\phi-\alpha\phi_x^{(1)}+\beta\phi_{xx}^{(2)}=0\end{cases} \tag{9}$$

将系统(7)和不变曲面条件(4)联立,可得 v_x,v_t,u_{xx}的表达式. 再将它们代入到(9)里,由(9)的第一式可得 $\phi=\eta_x^{(1)}=C+Bu+Au^2$,其中 $C=\eta_x-\frac{\eta}{\tau}\tau_x$,$B=\eta_v-\xi_x+\frac{\xi}{\tau}\tau_x-\frac{\eta}{\tau}\tau_v$,$A=\frac{\xi}{\tau}\tau_v-\xi_v$. 为了减少运算量,可设 $\xi=\xi(x,t,v)$,$\tau=\tau(x,t,v)$,$\eta=\eta(x,t,v)$. 把 ϕ 的表达式代入到(9)的第二式里,得到了一个关于 $u,u^2,u^3,u^4,u_x,u_x^2,uu_x,u^2u_x$ 的多项式. 令其各项系统为零,则得到了系统(7)的确定方程组. 求解此确定方程组很困难,我们这里只能对如下两种情况进行求解.

1. $\xi_x=\tau_x=0$,系统(7)的确定方程组变为

$$\begin{cases}\alpha\tau^2\eta_{xx}-\beta\tau^2\eta_{xxx}-\tau^2\eta_t+\tau\tau_t\eta=0\\ \xi_t\tau^2-\tau\tau_t\xi-\tau^2\eta_x=0\\ -6\beta\tau^2\tau_v\eta_{vv}+6\beta\tau^2\tau_{vv}\eta_v-2\beta\tau^3\eta_{vvv}+2\beta\tau^2\tau_{vvv}\eta=0\\ \tau\eta_v=\tau_v\eta\\ \xi\tau_v=\xi_v\tau\end{cases}$$

所以得到了 Kdv – Burgers 方程的非古典势对称

$$V_1=tv\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial t}+(xu+v)\frac{\partial}{\partial u}+xv\frac{\partial}{\partial v},$$

$$V_2=a(1+v+\frac{v^2}{2})\frac{\partial}{\partial x}+(v+1+\frac{v^2}{2})\frac{\partial}{\partial t}+b(1+v)u\frac{\partial}{\partial u}+b(1+v+\frac{v^2}{2})\frac{\partial}{\partial v}$$

a,b 是任意不为零的常数. 下面对 V_1、V_2 进行讨论.

1)将 V_1 向方程(8)进行投影,可以得到特征方程

$$\frac{dx}{tv}=\frac{dt}{v}=\frac{dv}{xv} \tag{10}$$

积分(10)式可以求得

$$\begin{cases}\zeta_1=x-\frac{t^2}{2}\\ v=-\frac{t^3}{3}+xt+f(\zeta_1)\end{cases} \tag{11}$$

其中 $f(\zeta_1)$ 满足常微分方程:$\beta f'''(\zeta_1)-\alpha f''(\zeta_1)+\frac{f'^2(\zeta_1)}{2}+\zeta_1=0$.

则得到原方程(6)的一个解

$$u_1(x,t)=t+f'(x-\frac{t^2}{2})$$

2)同理可得 V_2 对应的不变解

$$u_2(x,t)=\frac{12\alpha^2e^{\frac{\alpha}{5\beta}(x-\frac{6\alpha^2}{25\beta}t)}}{25\beta[1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(x-\frac{6\alpha^2}{25\beta}t)}]^2}+\frac{12\alpha^2}{25\beta[1+e^{\frac{\alpha}{5\beta}(x-\frac{6\alpha^2}{25\beta}t)}]^2}$$

2. $\tau=1$,得到了伴随系统(7)的一个非古典对称

$$V_3=t\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial u}+x\frac{\partial}{\partial v}.$$

同时可验证 V_3 是原方程(6)的对称.

2 一个非齐次非线性扩散方程

对于一般的非齐次非线性扩散方程

$$f(x)u_t=[g(x)u^nu_x]_x \tag{12}$$

当且仅当 $n=-2$ 或者 $n=-\frac{2}{3}$,(12)才存在势对称. 那么下面研究扩散方程

$$u_t=[g(x)u^{-2}u_x]_x \tag{13}$$

的非古典势对称.

采用文献[1]提出的方法,可设方程(13)的伴随系统是

$$\begin{cases}v_x=k(x)u\\ v_t=k(x)g(x)\frac{u_x}{u^2}-\frac{a}{u}\end{cases} \tag{14}$$

其中 $k'(x)g(x)+a=0$.

对(14)的 *Lie* 对称向量 V 进行一阶延拓,把 $V^{(1)}$ 作用到系统(14)中,从而得到

$$\begin{cases}\eta_x^{(1)}-\xi k'u-k\phi=0\\ \eta_t^{(1)}-k'g\xi\frac{u_x}{u^2}-kg'\xi\frac{u_x}{u^2}+\frac{2kg}{u^3}u_x\phi-\frac{kg}{u^2}\phi_x^{(1)}-\frac{a}{u^2}\phi=0\end{cases} \tag{15}$$

将(14)与不变曲面条件(4)联立,可得

$$v_t=\frac{\eta}{\tau}-\frac{\xi}{\tau}ku,u_x=\frac{\eta}{kg\tau}u^2-\frac{\xi}{g\tau}u^3+\frac{a}{kg}u,$$

$$u_t=\frac{\phi}{\tau}-\frac{\xi\eta}{kg\tau^2}u^2+\frac{\xi^2}{g\tau^2}u^3-\frac{a\xi}{kg\tau}u$$

为了减少运算量,可设 $\xi=\xi(x,t,v)$,$\tau=\tau(t)$,$\eta=\eta(t,v)$. 将 v_x,v_t,u_x,u_t 代入到(15)里. 由(15)的第一式可得 $\phi=\eta_v u-\xi_x u-\xi\frac{k'}{k}u-k\xi_v u^2$. 把 ϕ 的表达式代入到(15)的第二式里,得到了一个关于 u,u^2,u^{-1} 的多项式,令其各项系统为零,则得到了系统(14)的确定方程组. 根据文献[1],我们只讨论下面两种情况:

1. $k(x)=\frac{1}{x},g(x)=x^2,a=1$ 系统(14)的确定方程组变为

$$\begin{cases}\eta_t+\frac{\eta\eta_v}{\tau}-\frac{\tau_t\eta}{\tau}-\frac{\xi\eta}{x\tau}+\frac{\xi_x\eta}{\tau}=0\\ \xi_x-\frac{\xi}{x}+x\xi_{xx}-\eta_v=0\\ -\frac{\xi\eta_v}{x\tau}-\frac{\xi_t}{x}+\frac{\tau_t\xi}{x\tau}+\frac{\xi^2}{x^2\tau}-\frac{\xi\xi}{x\tau}=0\\ \eta_{vv}=0\end{cases}\tag{16}$$

求解(16),得到了系统(14)的非古典对称

$$V_4=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t},\quad V_5=x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial v}.$$

这些都是(14)的新的对称,并且都是原方程(13)的对称. 下面对 V_4、V_5 进行讨论.

1)将 V_4 向方程(13)投影,得到特征方程

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{1}=\frac{du}{0}\tag{17}$$

积分(17)式可得

$$\begin{cases}\zeta_2=\ln x-t\\ u=f(\zeta_2)\end{cases}$$

其中 $f(\zeta_2)$ 满足方程:

$$f''(\zeta_2)f(\zeta_2)+f(\zeta_2)f'(\zeta_2)-2f'^2(\zeta_2)+f'(\zeta_2)f^3(\zeta_2)=0$$

解得 $\frac{c\arctan\left(\frac{-c+2f(\zeta_2)}{\sqrt{-4-c^2}}\right)}{\sqrt{-4-c^2}}+\ln f(\zeta_2)-\frac{1}{2}\ln(-1-cf(\zeta_2)+f^2(\zeta_2))-\zeta_2=0$

则可得原方程(13)的一个解 $u_x(x,t)$,它满足

$$\frac{c\arctan\left(\frac{-c+2u_3}{\sqrt{-4-c^2}}\right)}{\sqrt{-4-c^2}}+\ln u_3-\frac{1}{2}\ln(-1-cu_3+u_3^2)-\ln x+t=0$$

其中 c 为任意常数.

2)同理得到了 V_5 对应的三个特解

$$u_4(x,t)=c_1ix,u_5(x,t)=-c_1ix,$$

$$u_6(x,t)=\frac{-x}{-1+xc_2}$$

其中 c_1 为任意非零常数,c_2 为任意常数.

2. $k(x)=\frac{1}{3},g(x)=-\frac{1}{x^2},a=1$,系统(14)的确定方程组变为

$$\begin{cases}\eta_t+\frac{\eta\eta_v}{\tau}-\frac{\tau_t\eta}{\tau}-\frac{\xi\eta}{x\tau}+\frac{\xi_x\eta}{\tau}=0\\ \xi_x+\frac{3\xi}{x}-\frac{x}{3}\xi_{xx}-\eta_v=0\\ -\frac{\xi\eta_v x}{\tau}-\xi_t x+\frac{\xi\tau_t x}{\tau}+\frac{\xi^2}{\tau}-\frac{\xi\xi_x x}{\tau}=0\\ \eta_{vv}=0\end{cases}\tag{18}$$

求解(18),得到了系统(14)的又一个非古典对称 $V_6=x\frac{\partial}{\partial x}+4t\frac{\partial}{\partial t}+4v\frac{\partial}{\partial v}$. 这也是(14)的新的对称,但不是原方程(13)的对称.

3　方程 $k_t=k^2(k_{\theta\theta}+k)$

为方便起见,我们考虑方程

$$u_t=u^2u_{xx}+u^3\tag{19}$$

设(19)的 *Lie* 对称向量为

$$V=\xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

为了得到(19)的非古典对称,首先需要附加不变曲面条件

$$\xi u_x+\tau u_t-\phi=0\tag{20}$$

对 V 进行二阶延拓,并作用到(19)上,得到

$$\phi_t^{(1)}-2u\phi u_{xx}-u^2\phi_{xx}^{(2)}-3u^2\phi=0\tag{21}$$

将(19)和(20)联立,可得 u_t,u_{xx} 的表达式. 再将它们代入到(21)里,得到了(19)的确定方程组,进一步得到(19)的一个新的对称

$$V_7=atu\frac{\partial}{\partial x}+tu\frac{\partial}{\partial t}$$

a 是任意不为零的常数. 则可得原方程(19)的一个解 $u_7(x,t)=f(x-at)$,

其中 $\zeta_3 = x - at$, $f(\zeta_3)$ 满足：$f^2(\zeta_3)f''(\zeta_3) + af'(\zeta_3) + f^3(\zeta_3) = 0$.

4 结论及展望

综上所述，我们得到了 Kdv－Burgers 方程(6)的非古典势对称 V_1 和 V_2，并求出了其对应的相似解 $u_1(x,t)$ 和 $u_2(x,t)$. 我们也得到了其伴随系统(7)的一个非古典对称 V_3. 同时，得到了非齐次非线性扩散方程的伴随系统(14)的非古典对称 V_4、V_5、V_6，以及方程 $k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k)$ 的非古典对称 V_7. 求出了 V_4 对应的相似解 $u_3(x,t)$. 也找到了 V_5 对应的三个特解 $u_4(x,t)$、$u_5(x,t)$ 和 $u_6(x,t)$，得到了 V_7 对应的一个解 $u_7(x,t)$. 结果表明：只有第一种方程存在非古典势对称，同时只有 V_3、V_4、V_5 是原方程的对称. 偏微分方程存在非古典势对称的充分条件是什么，以及什么条件下伴随系统的对称才是原方程的对称，这些都是有待于研究的问题.

参 考 文 献

1 M L Gandarias. New potential symmetries for some evolution equations. *J. Phy. A*, 2008, 387: 2234 ~ 2242

2 张红霞，郑丽霞，杜永胜. Benney 方程的势对称和不变解. 动力学与控制学报, 2008, 6(3): 219 ~ 222 (Zhang Hongxia, Zheng Lixia, Du Yongsheng. Potential symmetries and invariant solutions of Benny equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(3): 219 ~ 222 (in Chinese))

3 李丹，潘子松. Benny 方程的非古典对称和相容性. 科学技术与工程, 2008, 8(16): 4439 ~ 4442 (Li Dan, Pan Zisong. Nonclassical symmetries of Benny equation and compatibility. *Journal of Science Technology and Engineering*, 2008, 8(16): 4439 ~ 4442 (in Chinese))

4 秦茂昌，梅凤翔. Burgers 方程的非古典势对称群及显式解. 江西师范大学学报(自然科学版), 2004, 28(6): 503 ~ 506 (Qin Maochang, Mei Fengxiang. Nonclassical potential symmetries and new special solutions of Burgers equation. *Journal of Jiangxi Normal University (Natural Science)*, 2004, 28(6): 503 ~ 506 (in Chinese))

5 何梅. 方程 $k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k)$ 在容许群下的不变解. 佳木斯大学学报(自然科学版), 2008, 26(3): 381 ~ 382 (He Mei. Invariant solutions of equation $k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k)$ under some invariant groups. *Journal of Jiamusi University (Natural Science Edition)*, 2008, 26(3): 381 ~ 382 (in Chinese))

NONCLASSICAL SYMMETRIES AND SIMILARITY SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Guo Hua Zheng Lixia Bai Yin

(*College of science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *China*)

Abstract The nonclassical potential symmetries of some nonlinear partial differential equations and nonclassical symmetries of them were researched. New potential symmetries of one equation and new symmetries of these original equations were obtained. Nonclassical symmetries of auxilary potential systems were also determined. Furthermore, the corresponding similarity solutions can be obtained by using some of the above symmetries. The solutions have extensive application value for further researching the physical phenomena described by the nonlinear partial differential equations.

Key words nonlinear partial differential equations, nonclassical potential symmetries, nonclassical symmetries, similarity solutions

Received 18 April 2009, revised 9 May 2009.