

无标度网络上分片线性传染力与免疫 作用下的流行病动力学*

邵英英¹ 刘孟¹ 傅新楚²

(1. 浙江师范大学数理信息学院, 金华 321004) (2. 上海大学理学院数学系, 上海 200444)

摘要 本文研究了含有免疫作用的易感染者-感染者-移出者传染病模型(即 SIR 模型)在复杂网络上的动力学行为, 讨论了免疫作用对疾病传播的影响. 当接种比例大于零时, 传染率需要跨越更大的传染临界值疾病才能流行, 且随着时间的增大传染临界值也增大. 所以通过接种疫苗确实可以起到预防和控制疾病在复杂网络上传播的作用. 具体讨论了具有分片线性传染力的 SIR 模型在无标度网络上的流行病传播阈值, 并运用分片线性传染力得到了传播阈值为正的条件. 接着分析了各种免疫策略的 SIR 模型, 得出各类免疫后的传播阈值, 并进行了数值模拟和比较. 在相同的免疫概率下, 目标免疫比随机免疫、近邻免疫、主动免疫更为有效.

关键词 SIR 模型, 无标度网络, 传染力, 免疫, 流行病阈值

引言

许多复杂系统可用网络来刻画^[4,8,19,20,21], 其中许多网络的节点度服从幂律分布^[4,8,19], 这类网络称为无标度网络. 幂函数曲线下降比指数衰减相对缓慢, 这使得度很大的节点可以在真实网络中存在, 其数量虽较小但不可忽略. 像蛋白质网络, 因特网, 万维网(WWW), 社会网络等一些大尺度真实网络都呈无标度性质. 现实世界中的各种传播现象可以抽象到复杂网络上建立数学模型加以研究. 例如, 疾病在人群中的流行, 谣言在社会中的散播, 交通流等, 都可以看作复杂网络上服从某种规律的传播行为. 本文主要研究无标度网络上的疾病模型.

疾病传播模型的研究可以追溯到 1760 年 Daniel Bernoulli 对天花的研究, 其中最著名的是由 Kermack 和 McKendrick 创立于 1927 年的 SIS 模型和 SIR 模型^[1,2]. SIR 疾病传播模型是指: 被感染的个体一旦被治愈则具有永久的免疫能力, 或者不能被治愈而导致死亡, 从而不能再去感染其它处于易感态的个体. 在实际传播中, 易感个体只有通过接触染病个体才能被传染, 如果把每个个体用网络中的一个节点代表, 两个个体可能接触就在相应的节点之间连一条边. 当一个易感节点的相邻节点是患病节点时, 疾病就会以一定概率感染易感节点, 这

样, 传统的传播模型就可以自然地推广到一般传播网络中. 经典的传播理论认为^[17], 个体的传染力(感染点在一个时间步内感染易感点的概率)等于它的度, 由此得到传染阈值 $\lambda_c = \langle k \rangle / \langle k^2 \rangle$, 其中 $\langle k \rangle$ 为度的平均值. 由于无标度网络 $\langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$, 因此 $\lambda_c \rightarrow 0$, 即, 在无标度网络中, 无论传播强度多么小, 疾病都能持久存在. 假设传染力为常数 C ^[4], 则可得传染阈值 $\lambda_c = 1/C$. 表明了无标度网络中, 阈值跟传染力有密切关系. 但传染力实际上不可能是一个恒定的值. 比如天花病毒, 感染者不可能在一个日程内感染与它相邻的所有易感者. 传染力应是一个与度 k 成一定关系的函数值, 并存在一个常数上界 A . 基于此, 本文假设在 SIR 模型中传染力是一个分片线性函数 $\varphi(k)$ ^[5], 当一个节点的度 k 相对较小时, 其传染力与 k 成比例, 即 $\varphi(k) = \alpha k, 0 < \alpha < 1$; 而当 $k > A/\alpha$ 时, 其传染力趋近于它的上界 A , 即 $\varphi(k) = A$. 这样的传染力更接近于现实. 在本文中我们利用该分片线性传染力得到了 SIR 模型在无标度网络的传播阈值, 上界满足一定条件时, 就存在正的传染阈值.

目前由于现代化与经济全球化浪潮, 城市化导致人口密度快速增大, 各种传染病对人类造成巨大威胁. 对传染病的控制的研究是迫在眉睫的任务. 目前研究最多的是通过对部分人接种疫苗而有效

地控制疾病的传播. 本文在第三节详细分析了各种免疫方案下的 SIR 模型, 计算出相应的传播阈值, 发现在相同免疫率下, 目标免疫比随机免疫、熟人免疫、及主动免疫更为有效. 这在本文第四节的数值模拟中可清晰看出. 本文的第五节对全文作了小结.

1 SIR 疾病传播模型

在 SIR 模型中, 每个节点处于三种状态, 即易感态, 感染态, 或移出态. 在每一个时间步内每个易感点与一个或多个感染点接触, 其被感染的概率为 λ , 同时, 并假设每个感染点成为移出点的概率为 1. $S_k(t), I_k(t), R_k(t)$ 分别表示在 t 时刻易感者, 感染者, 移出者在度为 k 的节点中所占的比例, 则三者满足:

$$S_k(t) + I_k(t) + R_k(t) = 1$$

利用平均场理论可以得到如下模型^[6]:

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -\lambda k S_k(t) \Theta(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = -\lambda k S_k(t) \Theta(t) - I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = I_k(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Theta(t) = \Theta(k, t)$ 表示任意一条给定的边与一个被感染节点相连接的概率. 如果(1)的实际感染概率 λ 大于 λ_c ^[7], 感染个体能将病毒传播扩散; 如果 λ 低于 λ_c , 则病毒将不会大范围传播, 终会消失. 所以说只要我们提高传播阈值就可以抑制疾病传播(概率意义上). 本文主要考虑度无关联的网络^[5,6,7,8], 这样可以得到:

$$\Theta(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') I_{k'}$$

其中 $\varphi(k)$ 表示度为 k 的结点的传染力, 这里的无标度网络^[4,5,8,12,15]的度分布函数 $p(k)$ 满足 $p(k) = C^{-1} k^{-2-\gamma}, 0 < \gamma < 1$. $C = \zeta(2 + \gamma)$ 是黎曼 ζ 函数.

2 具有分片线性传染力的 SIR 模型的流行病阈值

我们定义分片线性传染力 $\varphi(k) = \min(\alpha k, A)$, 其中 $0 < \alpha < 1, A$ 是一个正的常数, 则 $\varphi(k) = A$ 或 $\varphi(k) = \alpha k$.

根据动力学的稳定性理论, 我们考虑平衡 $\frac{dR_k(t)}{dt} = 0$ 即 $R_k(t) = 1 - S_k(t)$. 这里假设方程组

(1) 初始条件为:

$$R_k(0) = 0, I_k(0) \approx 0, S_k(0) \approx 1.$$

由方程组(1)第一个式子可得到: $S_k(t) = e^{-\lambda k \phi(t)}$

其中 $\phi(t) = \int_0^t \Theta(\tau) d\tau$.

设 $S_k(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} S_k(t)$, 这样得到:

$$S_k(\infty) = e^{-\lambda k \phi(\infty)}; R_k(\infty) = 1 - e^{-\lambda k \phi(\infty)} \quad (2)$$

由 $\phi(t) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') R_{k'}$ 那么我们对 $\Theta(t)$ 的分析可以转化为对 $\phi(t)$ 的分析. 接下来对 $\phi(t)$ 中的求导得到:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') I_{k'} = \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') (1 - S_{k'}(t) - R_{k'}(t)) = \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') (1 - S_{k'}(t) - \varphi(t)) \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 根据实际意义得到: $I_k(\infty) = 0$, 那么

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d\phi(t)}{dt} = 0$. 自然得到:

$$\phi_\infty = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') (1 - e^{-\lambda k \phi_\infty}) \equiv f(\phi_\infty)$$

当 $\phi_\infty = 0$ 时, $f(\phi_\infty) = 0$; 而式(2)要有非零解, 只要 $\left. \frac{df(\phi_\infty)}{d\phi_\infty} \right|_{\phi_\infty=0} > 1$, 从而有 $\frac{\lambda}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \varphi(k') k' > 1$,

$$\text{由此可得: } \lambda > \frac{\langle k \rangle}{\langle k \varphi(k) \rangle} = \frac{\sum_k k p(k)}{\sum_k k \varphi(k) p(k)}.$$

为了得出上式的近似值, 假设含有 k 函数为连续可积的, 网络的尺度为足够大, 用积分代替求和, 就可得到:

$$\lambda_c = \begin{cases} \frac{1-\gamma}{\alpha m}, & 0 < \gamma < 1 \\ \left(\frac{A}{\alpha m}\right)^{1-\gamma} - \gamma \\ \frac{1}{\alpha m(1 + \ln \frac{A}{\alpha m})}, & \gamma = 1 \end{cases} \quad (3)$$

其 m 为网络中最小的连接度.

当 $\alpha k < A$ 时, 从(3)式可得当 $A \rightarrow +\infty$ 时, $\lambda_c \rightarrow 0$, 这与 $\varphi(k) = \alpha k$ 相符; 而当 $\alpha k > A$ 时, 可得 $\lambda_c \rightarrow \frac{1}{A}$, 这与 $\varphi(k) = A$ 相符. 因此前面所设的分片线性传染力 $\varphi(k)$ 是合适的. 当 $A \geq m\gamma^{\frac{1}{1-\gamma}}$ 或 $A \geq me^{-1}$ 时,

λ_c 都是正数.

3 SIR 模型的各种免疫

3.1 随机免疫

随机免疫策略就是完全随机地选取网络中的一部分节点进行免疫. 先定义一个 δ 为接种免疫概率, $0 < \delta < 1$, 那么系统方程(1)变成:

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -\lambda k(1-\delta)S_k(t)\Theta(t) - \delta S_k(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = -\lambda k(1-\delta)S_k(t)\Theta(t) - I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = I_k(t) + \delta S_k(t) \end{cases}$$

类似上一节计算出: $S_k(t) = e^{-\lambda k(1-\delta)\phi(\infty) - \delta t}$; $R_k(\infty) = 1 - (1-\delta)e^{-\lambda k(1-\delta)\phi(\infty) - \delta t}$.

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') \int_0^t I_{k'}(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') (R_{k'}(t) - \int_0^t S_{k'}(\tau) d\tau), \\ \frac{d\phi(t)}{dt} &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') (1 - S_{k'}(t) - \\ &\delta \int_0^t S_{k'}(\tau) d\tau) - \phi(t). \end{aligned}$$

$\vec{f}(\phi_\infty) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') (1 - e^{-\lambda k'(1-\delta)\phi(\infty) - \delta t}) - \int_0^t e^{-\lambda k'(1-\delta)\phi(\infty) - \delta \tau} d\tau$, 因为 $\phi_\infty = 0$ 是方程的一个解, 为了得到一个不平凡解只要下面的不等式成立:

$$\frac{d}{d\phi_\infty} \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') (1 - e^{-\lambda k'(1-\delta)\phi(\infty) - \delta t}) - \delta \int_0^t e^{-\lambda k'(1-\delta)\phi(\infty) - \delta \tau} d\tau |_{\phi(\infty)=0} > 1$$

由此得到: $\frac{\lambda(1-\delta)}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') k' > 1$.

$$\vec{\lambda}_c > \frac{\langle k \rangle}{(1-\delta) \langle k\varphi(k) \rangle} = \frac{1}{(1-\delta)} \lambda_c \quad (4)$$

从(4)可以看到, 当接种免疫的概率 $\delta = 0$ 时, 有 $\vec{\lambda}_c = \lambda_c$, 也就是说没有接种免疫时, 它们的临界值是相等的. 当 $0 < \delta < 1$ 时, $\vec{\lambda}_c > \lambda_c$, 即疾病要传播需要跨越比原来更大的阈值才能流行. 而且随着 δ 的增大, 阈值也随着增大, 符合了数值模拟得到的图(3). 当 $\delta \rightarrow 1$ 时, 则 $\vec{\lambda}_c \rightarrow \infty$, 就是说全面免疫后疾病是不可能流行的.

3.2 目标免疫

目标免疫^[16]是针对无标度网络所设计的一种特别的有效的免疫策略. 因为对无标度网络有选择地免疫少量度值非常大的节点, 而这些节点的免疫意味着它们所连接的边从网络中去除, 流行病传播的可能途径大大减少. 首先我们定义一个接种的免疫概率 δ_k ,

$$\delta_k = \begin{cases} 1, & k > \kappa, \\ c, & k = \kappa \\ 0, & k < \kappa \end{cases}$$

其中 κ 为免疫的临界值(节点的度大于 κ 进行免疫), $0 < c < 1$, $\sum_{k'} \delta_k p(k') = \bar{\delta}$, 其中 $\bar{\delta}$ 表示免疫的平均概率. 那么得到的相应的系统为:

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -\lambda k(1-\delta_k)S_k(t)\Theta(t) - \delta_k S_k(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = \lambda k(1-\delta_k)S_k(t)\Theta(t) - I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = I_k(t) + \delta_k S_k(t) \end{cases}$$

计算出 $S_k(t) = e^{-\lambda k(1-\delta_k)\phi(t) - \delta_k t}$.

很显然可以得到:

$$\begin{aligned} R_k(\infty) &= 1 - (1-\delta_k)e^{-\lambda k(1-\delta_k)\phi(\infty) - \delta_k t}, \\ \vec{f}(\phi_\infty) &= \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_{k'} p(k') \varphi(k') (1 - \\ &e^{-\lambda k'(1-\delta_{k'})\phi(\infty) - \delta_{k'} t}) - \delta_{k'} \int_0^t e^{-\lambda k'(1-\delta_{k'})\phi(\infty) - \delta_{k'} \tau} d\tau. \end{aligned}$$

类似上述分析可得:

$$\vec{\lambda}_c > \frac{\langle k \rangle}{\langle k\varphi(k) \rangle - \langle \delta_k k\varphi(k) \rangle} \quad (5)$$

文献[5]中已经分析: $\vec{\lambda}_c > \frac{(1-\delta)\vec{\lambda}_c}{(1-\bar{\delta})}$.

从上述等式可以看到, 当 $\bar{\delta} = \delta$ 时, $\vec{\lambda}_c > \vec{\lambda}_c$, 说明目标免疫比随机免疫更为有效, 符合了图(2)中的结果.

3.3 近邻免疫

目标免疫虽然有效, 但是这种策略需要知道网络全局信息. 所以本节介绍近邻免疫^[5,10,12], 其基本思想是: 从 N 个节点中随机选取 pN 个节点, 其中 $0 < p < 1$, 假设这些节点的度为 k , 则从每个被选出的节点随机选择一个最近邻结点进行免疫, 选中概率为 $\frac{kp(k)}{N(k)}$ ^[5,17], 从而其接种免疫的概率为 $\delta_k =$

$\frac{kp(k)}{N(k)} \cdot pN = \frac{p}{\langle k \rangle} kp(k)$ 代入(5)可得:

$$\lambda_c = \frac{(1 - \delta) \langle \varphi(k)k \rangle - \sigma}{\langle k\varphi(k) \rangle - \frac{p}{\zeta(2 + \gamma)} \langle k \rangle \langle k^{-\gamma} \varphi(k) \rangle} \hat{\lambda}_c$$

其中 $\sigma = \langle (\delta_k - \bar{\delta}) (\varphi(k)k - \langle \varphi(k)k \rangle) \rangle$.

根据[5]中的分析可以得到: $\lambda_c = \Lambda \hat{\lambda}_c$. 其中 $\Lambda > 0$. 这表明近邻免疫与目标免疫有可比性. 从数值模拟图(1)中可以看出近邻模拟比目标免疫的效果确实差点,但是可行性强. 且当 p 值越大时,也就是所进行免疫的人数越多时,免疫效果越好,这正与图(4)中结果相符.

3.4 主动免疫

主动免疫指的是:选择感染的点,若其近邻的度值 κ ,则对该近邻进行免疫. 我们定义它的接种免疫为 $\bar{\delta}_k$. 那么免疫后系统为:

$$\begin{cases} \frac{dS_k(t)}{dt} = -\lambda k S_k(t) \Theta(t), \\ \frac{dI_k(t)}{dt} = \lambda k S_k(t) \Theta(t) - (1 + \bar{\delta}_k) I_k(t), \\ \frac{dR_k(t)}{dt} = (1 + \bar{\delta}_k) I_k(t) \end{cases}$$

其中 $\bar{\delta}_k = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k p(k') \delta_{k'} = \frac{\langle k \delta_k \rangle}{\langle k \rangle}$.

$$\hat{f}(\phi_\infty) = \frac{1}{\langle k \rangle} \sum_k \frac{p(k') \varphi(k')}{1 + \bar{\delta}_k} (1 - e^{-\lambda k' \phi(\infty)}).$$

类似于前几节的分析得到:

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle + \langle k \delta_k \rangle}{\langle k \varphi(k) \rangle} = \lambda_c + \frac{\langle k \delta_k \rangle}{\langle k \varphi(k) \rangle} > \lambda_c$$

且 κ 越低,传播阈值越高,免疫的效果越明显.

4 数值模拟

本节用数值模拟来比较无标度网络上 SIR 模型的各种免疫策略的效果. 我们把无标度网络理想化取 $\gamma = 1$,度的分布函数为 κ^{-3} . 其中参数假设: $\alpha = 1$, $A = 20$ 表示感染者的活动的能力为在一个时间步内最多与 20 人接触. 根据以往研究,网络的平均度 $\langle k \rangle = 6$. 在考虑阈值模拟的时候, SIR 模型区别 SIS 模型, SIS 模型考虑 $I(t) = \sum_k p(k') I_{k'}(t)$ 与传染阈值 λ_c 的关系,在 SIR 模型中,用流行病的全局的量 $R(t)$ 的平均值,即 $R(t) = \sum_k p(k') R_{k'}(t)$,来考虑与传染阈值 λ_c 的关系^[7],因为 SIR 模型的疾病最终是为移出态,感染者在时间趋向于无穷大时,全部转化为移出者.

但所得到的传染阈值是一样的,这就符合了两种不同的传播模型并没有改变无标度网络传播阈值的特性. 在图(1)中,比较了没有进行免疫和进行了各种免疫的传播阈值,发现四种免疫策略比无免疫时有效,这与我们上面的计算结果相符. 在图(2)中,我们令 $\delta = \bar{\delta} = 0.2$,表明当有相同的免疫概率时,目标免疫比随机免疫更有效. 符合了 4.2 节中计算的结果. 在图(3)随机免疫中,我们令 δ 为不同的值,随着 δ 的增大,阈值也随着增大,疾病也越不易爆发. 这与现实生活相符,当我们对大量的人进行免疫,那疾病自然就不易爆发了. 图(4)近邻免疫中, p 表示在单位时间内,已免疫的人占总人数的比例,当然当 p 值越大时,免疫总人数越大,阈值越大,疾病越不易爆发. 在图(5)中,对于目标免疫我们选择 $c = 1, \kappa = 7$,因为要对高于平均的度的点进行免疫. 当取 κ 值越大时,阈值反而越小. 表明对越接近平均度节点进行免疫,效果越好.

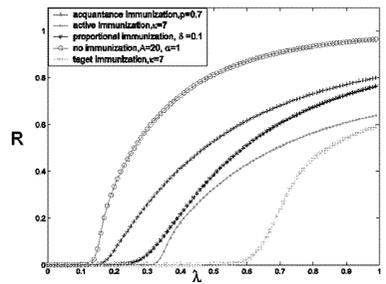


图 1 无免疫和各免疫策略所产生的传播阈值的比较.

这里的参数为 $\alpha = 1, c = 1, \kappa = 7$,

得到疾病在没有进行免疫比进行各种免疫更易爆发

Fig. 1 The comparison of thresholds with and without immunization.

Parameters $\alpha = 1, c = 1, \kappa = 7$,

a disease with no immunity outbreaks much easier

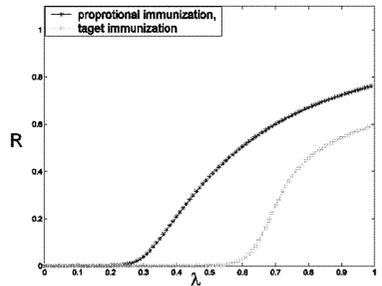


图 2 相同免疫概率下随机免疫和目标免疫所产生传播阈值的比较.

其中 $\delta = \bar{\delta} = 0.2, \kappa = 7$,

目标免疫 ($\lambda_c = 0.147$) 比随机免疫 ($\lambda_c = 0.52$) 更有效

Fig. 2 The comparison of thresholds with proportional immunization and targeted immunization. Parameters

$\delta = \bar{\delta} = 0.2, \kappa = 7$, then $\lambda_c = 0.147, \hat{\lambda}_c = 0.52$

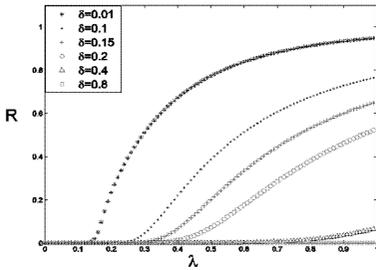


图3 不同免疫概率的随机免疫所产生传播阈值的比较.

传播阈值随着 δ 的增大而增大

Fig. 3 The comparison of thresholds with different probabilities.

The thresholds increase with δ

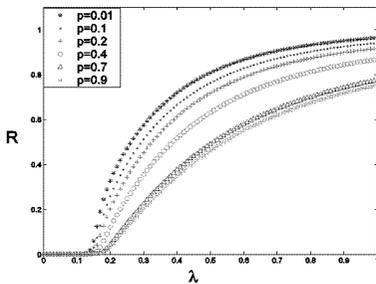


图4 当 p 值增大, 传染阈值也随着缓慢增大.

当 $p > 0.5$ 以后, 传染阈值几乎没有变化

Fig. 4 The threshold slowly increases with p

and almost no change when $p > 0.5$

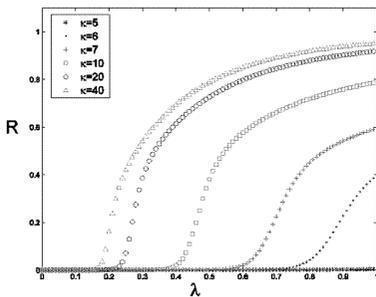


图5 当 κ 增大, 传染阈值明显减小,

当 κ 接近 5 时, 疾病几乎不爆发

Fig. 5 The threshold decreases quickly with κ and

almost no change near $\kappa = 5$

5 结论

本文讨论了有分片线性传染力的 SIR 模型在无标度网络上的传播动力学行为, 在分片线性传染力下计算出相应的传播阈值. 接着对各种免疫策略的 SIR 模型的相应流行病阈值进行比较并用数值模拟加以验证, 证明免疫能够有效地控制疾病的传播. 复杂网络上疾病传播的研究还存在很多的问题, 比如本文所采用的平均场论近似, 其精确程度有多高, 仍然有待研究. 经典的模型当中只限定了

易感者与感染者有某种接触才感染, 如果有传播媒介(比如蚊子), 媒介的数量也会影响流行病阈值等等, 都需要进一步的研究.

参 考 文 献

- 1 N T J Bailey. The mathematical Theory of infectious diseases and its application. New York: Hafner Press, 1975
- 2 R M Anderson, R M May. Infection disease of humans. Oxford: Oxford University Press, 1991
- 3 H F Zhang, M Small, X C Fu. Different epidemic models on complex networks. *Commun, in Theor. Phys.*, 2009, 52: 180 ~ 184
- 4 T Zhou, J G Liu, W J Bai, G R Chen, B H Wang. Behaviors of susceptible - infected epidemics on scale - free networks with identical infectivity. *Phys. Rev. E*, 2006, 74: 056109
- 5 X C Fu, M Small, D M Walker, H F Zhang. Epidemic dynamics on scale - free networks with piecewise linear infectivity and immunization. *Phys. Rev. E*, 2008, 77: 036113
- 6 M Barthelemy, A Barrat, R Pastor - Satorras, A Vespignani. Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale - free networked epidemics. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 178701
- 7 Y Moreno, R Pastor - Satorras, A Vespignani. Epidemic outbreaks in complex heterogeneous networks. *Eur. Phys. J.* 2002, 26: 521 ~ 529
- 8 Satoras P, Vespignania R. Epidemic spreading in scale - free networks. *Phys. Rev. E*, 2002, 65: 3200 ~ 3203
- 9 P Satoras, R Vespignania. Epidemic dynamics and endemics states in complex networks. *Phys. Rev. E*, 2001, 63: 066117
- 10 C Reuuen, S Havlin, Abrahamdb, et al. Efficient immunization strategies for computer networks and populations. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, 91: 247901
- 11 A Liljeros, F Edling, et al. The web of human sexual contacts. *Nature*, 2001, 411: 907 ~ 908
- 12 M L Goldstein, S A Morris, G G Yen. Problems with fitting to power law distribution. *Eur. Phys. J. B*, 2004, 41: 255 ~ 258
- 13 M Boguna, R Pastor - Satorras, A Vespignani. Problems with fitting to power law distribution. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, 90: 028701
- 14 M N Madar, T Kalisky, R Cohen, D ben - Avraham, S Havlin. Infection dynamics on scale - free networks. *Phys.*

- J. B.*, 2004, 38: 269 ~ 276
- 15 R Pastor – Satorras, A Vespignani. Immunization of complex networks. *Phys. Rev. E*, 2002, (65): 036104
- 16 R Cohen, K Erez, D ben – Avraham, S Havlin. Resilience of the Internet to random breakdowns. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 85: 4626 ~ 4628
- 17 M Bartheemy, A Barrat, R Pastor – Satorras. Velocity and hierarchical spread of epidemic outbreaks in scale – free networks. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, 92: 178701
- 18 J Joo, J L Lebowitz. Pair approximation of the stochastic susceptible – infected – recovered – susceptible epidemic model on the hypercubic lattice. *Phys. Rev. E*, 2004, 69: 066105
- 19 R Albert, A L Barabasi. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Modern Phys.*, 2002, 74: 47 ~ 97
- 20 孙炜, 王耀南. 一种 CMAC 网络模型及其在机器人控制中的应用. *动力学与控制学报*, 2005, 3(3): 56 ~ 62 (Sun W, Wang Y N. An CMAC network model and its application to robotic control. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(3): 56 ~ 62 (in Chinese))
- 21 张恩彪, 江成顺. 具时滞脉冲细胞神经网络的全局指数稳定性. *动力学与控制学报*, 2006, 4(1): 88 ~ 92 (Zhang E B, Jiang C S. Global exponential stability of cellular neural networks with variable delays and impulses. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(1): 88 ~ 92 (in Chinese))

EPIDEMIC DYNAMICS OF SIR MODEL WITH PIECEWISE LINEAR INFECTIVITY AND IMMUNIZATIONS ON SCALE-FREE NETWORKS*

Shao Yingying¹ Liu Meng¹ Fu Xinchu²

(1. College of Mathematics, Physics and Information Engineering, Zhejiang Normal University, Jinhua 321004, China)

(2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, China)

Abstract The Susceptible-Infected-Removed (SIR) model's epidemic dynamics on complex networks with immunizations were studied, and the effects of immunizations on the spread of epidemic were discussed. When vaccinal ratio is greater than zero, the critical infection value becomes greater with the time increasing. Therefore vaccination can indeed prevent and control the spreading of diseases on complex networks. In further details, this paper discussed the epidemic threshold for disease spreading using SIR model with piecewise linear infectivity on scale-free networks. And with this nonlinear infectivity, the conditions for positive epidemic threshold were derived. Then various immunization strategies for the SIR model and the corresponding thresholds were discussed. Numerical simulations and comparisons show that the targeted immunization is more effective than random immunization, acquaintance immunization and active immunization strategies.

Key words SIR model, scale-free network, infectivity, immunization, epidemic threshold