

分数微积分理论在非线性和车辆悬架滑模控制中的应用

陈宁^{1,2} 台永鹏² 陈南¹

(1. 东南大学机械工程学院, 南京 210097) (2. 南京林业大学机械电子工程学院, 南京 210037)

摘要 基于分数微积分理论, 提出分数阶“天棚”阻尼控制概念, 并以它控制的悬架为参考模型, 提出一个控制效果理想、鲁棒性好的悬架滑模控制的新策略, 并应用于非线性悬架的动力学控制中. 文中给出了一种精度较高, 收敛稳定的分数阶系统的数值算法, 最后对非线性悬架的滑模主动控制进行数值仿真, 验证了新控制策略优良的控制效果.

关键词 分数微积分, 天棚阻尼, 滑模控制, 非线性悬架, 精细积分

引言

车辆的悬架系统有两大任务, 即隔离由于路面的不平度所产生的垂向振动和保持车辆轮胎与地面良好的接触, 使得车辆具有较好的操纵性和舒适性. 但这两项要求在悬架设计中常常产生冲突, 要保持轮胎与地面具有良好的接触性, 要求悬架具有较高的刚度, 而降低悬架对地面不平度的响应则要求悬架比较柔软. 为了有效解决这类问题并提高悬架的性能, 多种主动控制悬架被提出来改进悬架的乘坐的舒适性和操纵性. 近三十年, 基于线性系统的最优控制理论在在线性悬架的主动控制中有效地解决这一矛盾并提高了悬架的性能, 因而这一基于悬架全部状态或部分状态反馈的最优控制得到广泛的应用, 其中最著名的“天棚阻尼”控制是其中重要方法之一, 并已经应用于实际车辆中.

实际中的车辆悬架本质上具有非线性和不确定性^[3,10], 线性悬架只是非线性悬架的近似简化, 许多研究者对非线性悬架的主动控制提出许多控制策略, 有非线性控制、自适应控制、滑模变结构控制和鲁棒控制等. 但不同的方法有不同的优缺点, 鲁棒控制的控制器参数确定后不再改变, 控制器设计相对简单但控制性能不是最理想, 如果悬架系统具有较强的非线性或参数变化较大时, 控制器设计变得困难; 自适应控制控制效果理想, 但对于强非线性由于参数辨识困难也难以实现. 变结构滑模控制控制方法比较简单, 鲁棒性好, 但性能取决于参

考模型, 而且存在高频“抖动”问题.

本文首先提出一种新的“天棚阻尼”控制悬架模型—分数阶“天棚阻尼”控制, 它是基于分数微积分理论的状态反馈控制, 对普通的“天棚阻尼”的控制策略进行改进提高. 然后将这一改良的模型作为非线性悬架变结构滑模控制的参考模型, 得到一种性能比较理想、鲁棒性好的悬架主动控制策略. 为了对提出的含分数阶导数项的非线性系统进行数值分析, 基于精细积分方法本文给出一种精度高的收敛算法. 数值计算结果与被动非线性悬架、普通“天棚阻尼”控制悬架为参考模型的滑模控制的效果进行了比较, 验证了本文方法在非线性和悬架的控制中的优点和有效性.

1 非线性主动悬架系统模型

本文采用车辆的车身与车轮两个自由度振动系统的1/4车辆悬架模型(图1). 该模型既能反映车体的垂直振动, 结构又较简单. 图中各参数的物理意义说明如下: m_s —簧载质量 m_u —非簧载质量 f_s —悬架弹簧力 k_t —轮胎刚度 x_r —地面垂直位移. x_s (车身垂直位移)和 x_u (车轮垂直位移)为系统的独立坐标, 坐标原点选在各自的平衡位置. 这里忽略了轮胎的阻尼作用, 将其视为单质量无阻尼系统. 再者考虑到悬架弹性元件(主要由压缩行程时弹簧动弯曲限制器和支撑衬套两部分引起)的非线性特性, 由此建立二自由度悬架模型的非线性运动微分方程:

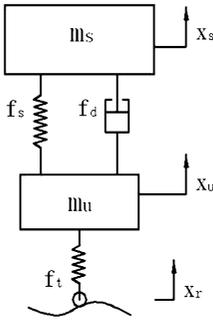


图1 车辆悬架模型

Fig.1 Model of vehicle suspension

$$m_s \ddot{x}_s = -f_s - f_d - m_s g + u \quad (1)$$

$$m_u \ddot{x}_u = f_s + f_d - f_t - m_u g - u \quad (2)$$

弹簧力 f_s 是一个三次多项式函数

$$f_s = k_0 + k_1 \Delta x + k_2 \Delta x^2 + k_3 \Delta x^3 \quad (3)$$

其中 $\Delta x = x_s - x_u$, k_i ($i = 1, 2, 3$) 为相应的系数, k_0 是自重力引起的预压力. 并设非线性阻尼 f_d 为

$$f_d = c_1 \Delta \dot{x} + c_2 \Delta \dot{x}^2 \quad (4)$$

c_1, c_2 为实验曲线拟合所得参数.

考虑轮胎与路面的接触情况, 轮胎力 f_t 取

$$f_t = \begin{cases} k_t(x_r - x_u) & \text{当 } (x_r - x_u) > 0 \\ 0 & \text{当 } (x_r - x_u) \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

写成状态方程表达式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m_s}(-f_s - f_d + u) - g \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_u}(f_s + f_d + f_t - u) - g \end{cases} \quad (6)$$

这里 $x_1 = x_s, x_2 = \dot{x}_s, x_3 = x_u, x_4 = \dot{x}_u$.

2 悬架滑模控制

2.1 分数阶“天棚阻尼”控制参考模型

“天棚”阻尼控制是 D. Karnopp 1974^[2] 年提出的基于最优控制理论的悬架控制策略, 虽然它不能被应用于悬架的振动控制中, 但针对它具有的良好控制特性和鲁棒性, 它被广泛间接地应用于许多其它悬架控制策略中, 例如基于能量耗散的半主动悬架控制律、被作为控制参考模型的自适应控制和滑模变结构主动控制等等. 其性能的优劣直接影响悬架控制效果. 由于“天棚阻尼”的性能只能通过其阻尼系数一个参数调节, 其性能不可能进一步提高. 分数阶“天棚阻尼”是基于分数微积分理

论提出的新的“天棚阻尼”控制策略^[7], 其控制结构与“天棚阻尼”相同(见图2), 但其阻尼控制力为

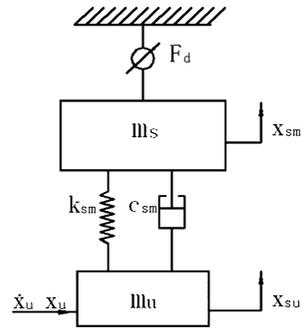


图2 “天棚阻尼”参考模型

Fig.2 Model of Skyhook Damping control

$$F_d = K_d \cdot D^\alpha x_{sm} \quad (0 \leq \alpha < 2) \quad (7)$$

其中 K_d 为分数阶“天棚阻尼”系数, $D^\alpha x_s$ 在这儿表示为位移 x_{sm} 的 α 阶导数, 而 α 不再限于正整数, 可以是实数或复数, 其定义有多种, 这儿采用的是 Riemann - Liouville (RL) 定义

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha - n + 1}} d\tau \quad (8)$$

其中 $(n - 1 < \alpha < n)$, $\Gamma(\cdot)$ 是 Euler's 伽玛函数, 这里取 $a = 0$, 算子简写为 $D^\alpha(\cdot)$. 根据分数阶导数的特性, 当 $\alpha \rightarrow 1$ 时, 则(7)式退化为一般的“天棚”阻尼控制. 分数阶“天棚阻尼”与普通的相比, 有两个参数 K_d 和 α 调节性能, 可得到更理想的控制效果. 本文以分数阶“天棚阻尼”控制的线性悬架作为变结构控制的参考模型, 其动力学方程为

$$m_s \ddot{x}_{sm} = -f_{sm} - f_{dm} - F_d \quad (9)$$

其中

$$f_{sm} = k_{sm}(x_{sm} - x_u), f_{dm} = c_{sm}(\dot{x}_{sm} - \dot{x}_u) \quad (10)$$

写成状态方程

$$\dot{X}_m = f_m \quad (11)$$

其中, $X_m = [x_{sm}, \dot{x}_{sm}]^T$

$$f_m = \left[\dot{x}_{sm} \quad \left(\frac{1}{m_s} \right) (-f_{sm} - f_{dm} - F_d) \right]^T \quad (12)$$

2.2 滑模控制器设计

本文采用的非线性悬架变结构滑模控制结构如图3所示. 悬挂部分的动力学方程改写成如下表达式:

$$\dot{x}_p = f(x_p, t) + B_p u = f_p(x_p, t) + \Delta f_p(x_p, t) + B_p u + F_w \quad (13)$$

其中, $x_p = [x_s \quad \dot{x}_p]^T$, f_p 表示线性部分, Δf_p 表示 f_p

与实际系统的差值,其包含有非线性部分,未建模部分, F_w 是干扰部分.

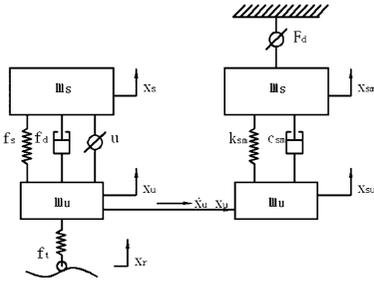


图3 悬架滑模控制结构模型

Fig.3 The sliding mode control model of vehicle suspension

设 $e = x_p - x_m$ 为 x_p 和 x_m 之间的偏差,得到偏差动力学方程:

$$\dot{e} = \dot{x}_p - \dot{x}_m = f_p + \Delta f_p + B_p u + F_w - f_m \quad (14)$$

定义滑模面方程

$$S(t) = G^T e = 0 \quad (15)$$

其中, $G = [g_1 \ g_2]^T$. 假设实际系统的非线性项和干扰项不存在,即 $\Delta f_p + F_w = 0$,则(3.8)系统为线性系统,可利用线性系统理论计算 G ,使得偏差变量 e 在滑模面 $S = 0$ 上渐近稳定,因此只要保证下面条件成立

$$S = 0$$

$$\dot{S} = G^T \dot{e} = G^T (\dot{x}_p - \dot{x}_m) = G^T (f_p + B_p u - f_m) = 0 \quad (16)$$

由(16)式可得平衡控制力

$$u_{eq} = (G^T B_p)^{-1} (G^T f_m - G^T f_p) \quad (17)$$

由于实际系统存在非线性部分及干扰项,即 $\Delta f_p + F_w \neq 0$,为了满足滑模条件 $S = 0$,控制力中要添加一项能穿越滑模面的非连续项

$$u = u_{eq} - (G^T B_p)^{-1} K \text{sgn}(S) \quad (18)$$

其中 K 为保证实现穿越滑模的调节增益. 如果非线性项和干扰项之和的上下界已知,则 K 最好满足下面条件

$$K > |G^{-1} (\Delta f_p + F_w)| \quad (19)$$

为避免过多反复穿越滑模而引起的抖动问题,可采用以下‘边界层’控制策略

$$u = \begin{cases} u_{eq} - KS & |S| < \delta \\ u_{eq} - K \text{sgn}(S) & |S| > \delta \end{cases} \quad (20)$$

其中 δ 为‘边界层’厚度,

3 数值仿真

3.1 非线性悬架动力响应计算

非线性悬架动力学方程(6)简写为

$$\dot{x} = Ax + Bu + f(X, t) \quad (21)$$

等式右侧分为线性部分和非线性部分, $f(X, t)$ 为非线性部分. 将(21)微分方程转化为下列同解积分方程

$$x = e^{At} x(0) + A^{-1} (e^{At} - I) Bu + \int_0^t e^{-A(\xi-t)} f(x, \xi) d\xi \quad (22)$$

式中 x 为所求的解向量在时刻 t 的值. 将计算时间分成许多步,步长为 T ,则(22)连续方程化成离散方程

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + A^{-1} (e^{AT} - I) Bu(k) + \int_{kt}^{(k+1)T} e^{-A(\xi-kT-T)} f(x, \xi) d\xi \quad (23)$$

由于被积函数 $f(x, t)$ 本身包含未知向量 x ,在 $t = kT, x = x(k)$ 处,将非线性部分 $f(x, t)$ 展开成 Taylor 级数:

$$f(x, t) = f(k) + (t - kT) \dot{f}(k) + \frac{(t - kT)^2}{2} \ddot{f}(k) + \dots + \frac{(t - kT)^j}{j!} f^{(j)}(k) + \dots \quad kT \leq t \leq (k+1)T, k = 0, 1, 2, \dots \quad (24)$$

$f(x, t)$ 及其各阶导数在时刻 $t = kT$ 的值 $f(k), \dot{f}(k), \ddot{f}(k), \dots, f^{(j)}(k), \dots$ 可由下式计算

$$f(k) = f(x(k), kT), \dot{f}(k) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{t=kT} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i \right)_{t=kT}, \ddot{f}(k) = \left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)_{t=kT} + \dots \quad (25)$$

其中状态变量 x_i 对时间的导数 \dot{x}_i 须用微分方程(21)进行替换,消除导数项,依次类推.

用 Taylor 级数(23)代替(22)式中的 $f(x, t)$, 令 S_j 表示第 j 项积分

$$S_j = \frac{1}{j!} \int_{kt}^{(k+1)T} e^{-A(\xi-kT-T)} f^{(j)}(k) (\xi - kT)^j d\xi = \frac{1}{j!} \int_0^T e^{A(\eta-T)} \eta^j d\eta \cdot f^{(j)}(k) = (-1)^{j+1} \frac{1}{j!} e^{AT} \int_0^{-T} e^{A\eta} \eta^j d\eta \cdot f^{(j)}(k) \quad (j = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

这样,(22)式写成如下级数形式

$$x(k+1) = e^{AT} x(k) + A^{-1} (e^{AT} - I) Bu(k) + \sum_{j=0}^{\infty} S_j \quad (27)$$

式中的 e^{AT} 可由精细积分算法得出.

3.2 分数阶参考模型的动力响应计算

将分数阶“天棚”阻尼参考模型的动力方程(11)表达为

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u_m \tag{28}$$

其中, $x_m = [x_{sm}, \dot{x}_{sm}]^T$, $u_m = [x_u, \dot{x}_u, F_d]^T$

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{sm}}{m_s} & -\frac{c_{sm}}{m_s} \end{bmatrix}, B_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{sm}}{m_s} & \frac{c_{sm}}{m_s} & -\frac{1}{m_s} \end{bmatrix} \tag{29}$$

对于分数阶导数的数值算法,这儿引入 Grünwald-Letnikov (GL) 定义

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{(t-a)/h} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh) \tag{30}$$

式中 $[\cdot]$ 代表取整数. 按精度要求取前 $N+1$ 项,有

$$D^\alpha x \approx \frac{1}{T^\alpha} x(t) + \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} x(t-kT) \tag{31}$$

设

$$C(x, t) = \frac{1}{T^\alpha} \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)} x(t-kT) \tag{32}$$

$C(x, t)$ 其数值只与过去时刻的 x 值有关,为已知量. 则分数阶“天棚”阻尼力为

$$F_d(t) = K_d \cdot \frac{1}{T^\alpha} x_{sm}(t) + K_d \cdot C(x_{sm}, t) \tag{33}$$

因此,系统状态方程可以写成

$$\dot{x}_m(t) = \bar{A}_m x_m(t) + \bar{B}_m \bar{u}_m(t) \tag{34}$$

其中,

$$\bar{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{sm}}{m_s} & -\frac{c_{sm} + K_d}{m_s \cdot T^\alpha} \end{bmatrix}, \bar{B}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{k_{sm}}{m_s} & \frac{c_{sm}}{m_s} & -\frac{K_d}{m_s} \end{bmatrix} \tag{35}$$

$$\bar{u}_m = [x_u \quad \dot{x}_u \quad C(x_{sm2}, t)]^T \tag{35}$$

对(34)式离散化,得其离散化方程,

$$x_m(k+1) = e^{\bar{A}_m T} x_m(k) + \int_0^T e^{\bar{A}_m \tau} \bar{B}_m \bar{u}_m(k) d\tau = e^{\bar{A}_m T} x_m(k) + \bar{A}_m^{-1} (e^{\bar{A}_m T} - I) \bar{B}_m \bar{u}_m(k) \tag{36}$$

$e^{\bar{A}_m T}$ 采用精细积分算法计算. $C(x, t)$ 的值用如下公式求解将更简单迅速,

$$C(x, t) = \frac{1}{T^\alpha} \sum_{j=1}^N b_j x(t-jT) \tag{37}$$

这里, $b_1 = -\alpha, b_j = \left(1 - \frac{1+\alpha}{j}\right) b_{j-1}$.

3.3 滑模主动控制悬架响应的数值结果分析

为了研究以分数阶“天棚阻尼”悬架为参考模型的滑模控制主动悬架的性能,利用数值算法将它和另二种悬架进行数值仿真比较,另二个悬架分别是无控制的非线性被动悬架和以普通“天棚阻尼”悬架为参考模型的滑模主动悬架^[3],并以相同的标准的B级随机激励路面谱为路面输入,悬架结构基本参数见表1,参考模型的参数与实际结构悬架的线性部分相同,“天棚”阻尼的参数 K_d 和 α 可通过目标优化得到,这儿取 $K_d = 1917, \alpha = 1.22$,数值计算得到悬挂质量的位移响应、加速度响应、悬架间相对变形和轮胎变形曲线见图4-图7.

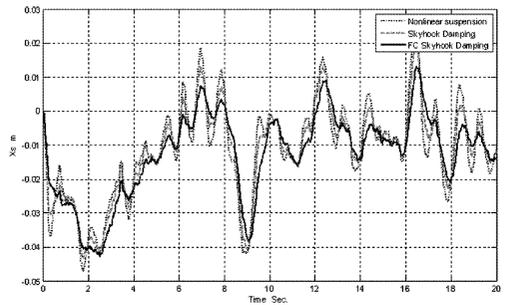


图4 悬架的位移响应曲线

Fig. 4 Displacement curves of sprung masses

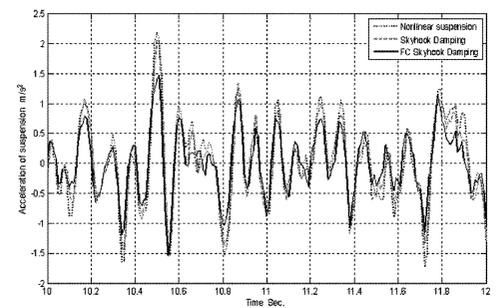


图5 悬架的加速度响应曲线

Fig. 5 Acceleration curves of sprung masses

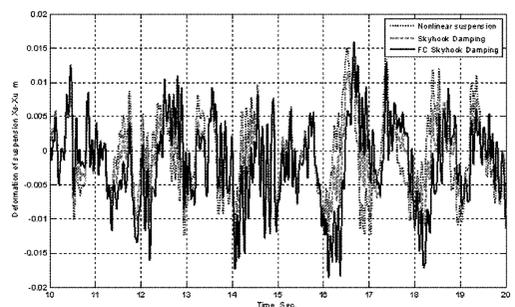


图6 悬架间相对变形量曲线

Fig. 6 Deflection curves of suspensions

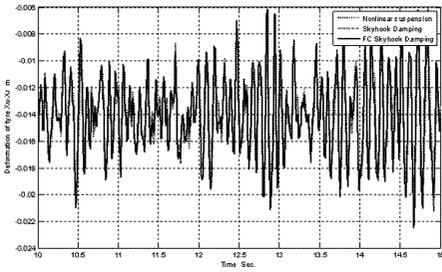


图7 悬架的轮胎变形曲线

Fig.7 Deflection curves of tires

表1 非线性悬架基本参数

Table 1 Parameters of nonlinear suspension

Name of Parameters	Value
Sprung mass	$m_s = 237.37 \text{ kg}$
upper arm cross section area/mm ²	7850
Coefficients of nonlinear damping force	$c_1 = 1385.4, c_2 = 524.28$
Tire vertical stiffness	$k_t = 200000 \text{ N/m}$
Coefficients of nonlinear spring force	$k_0 = -2316.4, k_1 = 12394, k_2 = -73696, k_3 = 3170400$

从图4-图5悬架的位移和加速度响应明显看到,以分数阶“天棚阻尼”控制为参考模型的滑模控制悬架的性能是最好的,优于以普通“天棚阻尼”控制为参考模型的滑模控制悬架和非线性被动悬架.系统也具有较好的鲁棒性,且给出的数值算法在精度和稳定收敛性方面很理想.

图7显示三种悬架在相同路面行驶,它们的轮胎变形量几乎相等,说明“天棚阻尼”控制策略主要针对悬挂质量的控制,对轮胎几乎无控制效果;

图6显示在三种悬架的变形控制中,“天棚阻尼”控制效果略好,而分数阶“天棚阻尼”与被动悬架相差无几,这一点综合轮胎变形量分析,说明分数阶“天棚阻尼”控制是从相位移动来提高控制效果的,这一点体现出分数微积分理论具有可相位连续变化的特性,不像普通微积分对函数的相位变化只能是 $\pi/2$ 的整数倍.

4 结论

本文给出一种控制效果理想、鲁棒性好的基于变结构滑模控制的悬架控制新策略.首先利用分数微积分对传统的“天棚”阻尼控制进行改进,得到更理想的滑模控制的参考模型.然后建立非线性悬架模型,并给出一精度较高,收敛稳定的分数阶系统的数值算法.最后对非线性悬架的滑模主动控制进行数值仿真,验证了本文控制策略具有优良的控

制效果.

参 考 文 献

- Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, San Diego, 1999
- D Karnopp, M J Crosby, R A Harwood. Vibration control using semi-active force generators. Transactions of ASME, 1974; 619 ~ 626
- C Kim, P I Ro. A sliding mode controller for vehicle active suspension systems with Nonlinearities. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 1998, 212, D: 79 ~ 92
- Ramiro S Barbosa, J A Tenreiro Machado, Isabel M Ferreira. A fractional calculus perspective of PID tuning. Proceedings of DETC. 03 ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Chicago, Illinois, USA, September, 2003; 2 ~ 6
- Podlubny I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers. IEEE Trans. on Auto. Control, 1999, 44: 208 ~ 213
- 王昊, 胡海岩. 基于磁流变阻尼器整车半主动悬架的开关控制. 动力学与控制学报, 2004, 2(4): 71 ~ 76 (Wang Hao, Hu Haiyan. The on-off control of a semi-active suspension of the full-vehicle model based on MR dampers. Journal of Dynamics and Control, 2004, 2(4): 71 ~ 76 (in Chinese))
- Ning Chen, Yongpeng Tai. Application of fractional order skyhook damping control on semi-active suspension. International Pre-Olympic Workshop on Modeling and Simulation, Nanjin, China, 2008
- 裘春航, 吕和祥. 非线性动力学方程的一种级数解, 计算力学学报, 2001, 18(1): 1 ~ 7 (Qiu Chunhang, Lu Hexiang. A series solution for nonlinear dynamics equations. Journal of Computational Mechanics, 2001, 18(1): 1 ~ 7 (in Chinese))
- 钟万勰. 结构动力学的精细时程积分, 大连理工大学学报, 1994, 34(4): 131 ~ 136 (Zhong wanxie. On precise time-integration method for structural dynamics. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131 ~ 136 (in Chinese))
- 宋刚, 林家浩, 吴志刚. 考虑参数不确定性的主动悬架鲁棒 H_2/H_{∞} 混合控制. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 651 ~ 461 (Song Gang, Lin Jianhao, Wu Zhigang. Robust H_2/H_{∞} control of active vehicle suspension sub-

jected to parameter uncertainties. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 651 ~ 461 (in Chinese)

- 11 翁建生, 张文丰, 胡海岩, 张庙康. 时滞‘天棚’阻尼控制的车辆悬架系统特性研究. *南京建筑工程学院学报*, 1999, 16(3): 1 ~ 6 (Weng Jiansheng, Zhang Wenfeng,

Hu Haiyan, Zhang Miaokang. Development of the suspension systems based on the sky hook damper theory with time delay. *Journal of Nanjing Architectural and Civil Engineering Institute*, 1999, 16(3): 1 ~ 6 (in Chinese)

APPLICATION OF FRACTIONAL CALCULUS THEORY SLIDING MODE CONTROL FOR VEHICLE SUSPENSION SYSTEMS WITH NONLINEARITIES *

Chen Ning^{1,2} Tai Yongpeng² Chen Nan¹

(1. College of Mechanical Engineering, Southeast University, Nanjing 210096, China)

(2. College of Mechanical and Electronic Engineering, Nanjing Forestry University, Nanjing 210037, China)

Abstract The concept of fractional order skyhook damping control was presented based on fractional calculus theory. Taking a suspension model controlled by the new skyhook damping as the reference model, a new excellent sliding mode control strategy for suspension systems was proposed and applied in the control of a nonlinear suspension. A kind of numerical scheme for fractional order system with high accuracy and stability was also given. The new sliding mode control for an active suspension with nonlinearities was investigated through numerical simulation. The computational results verify the good control efficacy of the new strategy.

Key words fractional calculus, skyhook damping, sliding mode control, nonlinear suspension, precise integration