

倒置数学摆在海洋发电中的应用研究*

李向红 崔文良 曹庆杰

(石家庄铁道学院数理系, 石家庄 050043)

摘要 本研究给出一个振动基座上倒置摆模型, 探讨海洋波力发电的可行性, 为海洋波力开发利用提供依据; 同时揭示了该系统的复杂动力学行为, 探索该系统的非线性特征. 研究发现, 当系统参数变化时, 该系统具有一对共存的倍周期分岔序列分别通向不同的混沌运动, 表现为独立的共存奇怪吸引子现象. 当系统参数继续变化时, 这对混沌吸引子混合为一个独立的奇怪吸引子, 此现象提供了一个新的通向混沌的途径. 本研究最重要的是发现该系统存在大阻尼条件下的大周期运动, 这表明该模型具有海浪波力能源吸收好, 消耗少的特点, 同时表明该模型具有高效的动力输出能力. 因此, 振动基座上倒置摆模型在开发利用海洋波力能源发电中具有十分重要的应用前景.

关键词 基座振动的倒置摆, 海浪利用, 奇怪吸引子, 非线性动力学行为

引言

海洋能源主要包括海洋风能、波浪能、潮汐能等, 由于这些资源丰富、清洁干净、可再生性强, 被联合国环境组织视为目前最理想、最有前景的替代能源之一. 我国有 18000 公里的海岸线、300 多万平方公里的管辖海域, 海洋能源十分丰富, 利用价值极高. 其中, 近海域波浪的蕴藏量约为 1.5 亿千瓦, 可开发利用量约 3000 万 ~ 3500 万千瓦, 海洋风能约有 7 亿千瓦左右. 同时, 我国又是世界能源消费大国, 大力发展海洋新能源符合国情, 对于优化能源消费结构, 保护环境, 支撑社会经济的可持续发展, 意义十分重大.

目前海洋发电系统的关键问题是: 相变蓄能稳压的原始创新技术, 解决了波浪能发电的不稳定问题, 进而提出该技术与振荡浮子式波能装置相结合的组合创新技术, 研建海洋波浪能独立发电系统. 与世界波浪能研究主流的振荡水柱波能发电技术相比, 本项目发展的技术具有明显优势: 研制的海洋波浪能独立发电系统可以独立稳定发电, 直接为用户提供高质量的电力; 系统总转换效率将提高 2 倍; 发电成本将降到 1.5 元/度; 波能装置的实用性和性价比都有明显提高; 推动世界波能利用技术的发展.

本文旨在研究数学倒置摆在海洋发电中的应用, 建立一个如图 1 所示的物理模型, 海洋上漂浮的船舶作为一个余弦振动的基座, 其上固定一根刚性摆杆, 末端固定一个不计摩擦的连接点与小船相连构成一个倒置摆(小船与摆杆末端的连接要保证摆杆能够旋转 360°), 那么倒置摆与海洋共同构成了一个具有振荡基地的数学倒置摆系统. 倒置摆可以在平行于纸面 360° 范围内自由摆动. 将该模型简化为一个简单的具有振动基座的数学倒置摆, 如图 2 所示, 对于一个振动基座上的倒置摆的研究已经证明该系统能够得到稳定解^[1], 并且在实验和数字模拟上都做了深入的分析^[2,3,4]. 研究证明该数学倒置摆系统为一个复杂的非线性振子系统. 首先我们要对系统的非线性特征进行深入分析, 当一个光滑参数的连续变化时, 系统表现出不同的动力学特征^[6]. 在扰动因素的扰动下系统的解出现混沌和倍周期分岔现象^[7,8,9]. 通过模型的研究揭示该系统的复杂动力学行为, 展示该系统的奇怪吸引子^[5], 计算吸引子的数学特征及其描述混沌特征的 Lyapunov 指数. 我们希望能从系统中找到一个大振幅的周期运动, 系统的运动能够稳定于这个周期解, 那么便能稳定的实现由波浪能向电能的转化, 也就是可以实现通过波浪的振荡实现发电, 利用自然的能量提供电能. 系统的阻尼越大带动的发电机

的功率就越大,表明海浪发电在大阻尼下的大周期运动具有较高的波力能的利用能力和高效的电力输出能力.为海洋波浪能的发电提供可行性分析,这就是该课题研究的主要目的.通过本研究能够研制出应用海洋波浪能的独立发电系统,有效地利用海洋波力资源促进社会的进步.

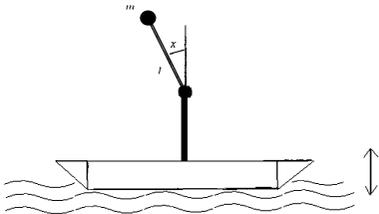


图1 海洋波浪能利用系统示意图

Fig.1 Schematic of the Ocean wave energy use

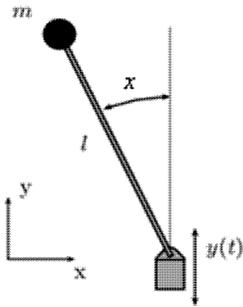


图2 倒置数学摆

Fig.2 inverted pendulum

1 系统方程

通过对海洋发电系统物理模型的分析图1,我们可以将该系统抽象为数学模型图2,在模型图2中:令摆长为 l ,摆杆顶端为一个质量为 m 的实体小球,摆杆固定在上下振动的基座上,令倒摆在水平方向的摆动角度为 x ,其中 \dot{x} 表示 x 的导数,运动方程可以用Lagrangian方程推导.

质点的位置为:

$$(l\sin x, l\cos x + y) \tag{1}$$

质点的速度(位置的导数)为:

$$v^2 = \dot{y}^2 - 2l\dot{x}y\sin x + l^2\dot{x}^2 \tag{2}$$

该质点的动能为:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 - 2l\dot{x}y\sin x + l^2\dot{x}^2) \tag{3}$$

势能为:

$$mg(l\cos x + y) \tag{4}$$

Lagrangian方程为:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 - 2l\dot{x}y\sin x + l^2\dot{x}^2) - mg(l\cos x + y) \tag{5}$$

运动方程为:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \tag{6}$$

结果有:

$$l\ddot{x} - l\dot{y}\sin x = gl\sin x \tag{7}$$

假设 $y = -a\cos\omega t$ 则有:

$$l\ddot{x} - gl\sin x - a\omega\cos\omega t\sin x = 0 \tag{8}$$

假设摆是在一个粘性的介质中摆动,那么,沿着摆的运动方向就存在一个与速度 \dot{x} 成比例的阻力,假设阻力系数是 μ ,则摆的运动方程变为:

$$l\ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} - gl\sin x - a\omega\cos\omega t\sin x = 0 \tag{9}$$

经过进一步的无量纲化处理, $C = \frac{\mu}{ml^2}, \xi = \frac{a\omega^2}{g}, \omega_0 =$

$\frac{g}{l}$,方程(9)表示为:

$$\ddot{x} + C\dot{x} - \omega_0(1 + \xi\cos\omega t)\sin x = 0 \tag{10}$$

由系统的方程看出方程的解的因参数: C, ω, ξ 的改变产生扰动,产生不同的运动现象,摆角 x 在 $(0, 360^\circ)$ 的运动范围内摆动.模型是一个具有强烈非线性特征的动力学系统.

2 未扰振子

2.1 光滑参数改变的模型分析

对数学倒置摆系统的模型方程无量纲化如下:

$$\ddot{x} + C\dot{x} - \omega(1 + \xi\cos\omega t)\sin x = 0 \tag{11}$$

其中各参数为: $C = \frac{\mu}{ml^2}, \xi = \frac{a\omega^2}{g}, \omega = \frac{g}{l}$.当 $\xi > 0$

时,系统为一个具有振动基座上的倒置摆,当 $\xi = 0$ 时,基座的振动频率为0,则系统变为一个类似于悬挂在固定支架上的单摆,参见[11].如图(3)

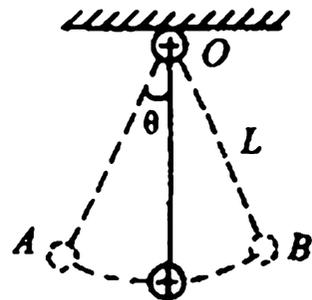


图3 数学摆

Fig.3 Mathematical pendulum

此时系统的方程为:

$$\ddot{x} + C\dot{x} - \omega_0\sin x = 0 \tag{12}$$

这是一个在粘性的介质中摆动的单摆运动方程,如果在理想的无阻尼情况下的单摆运动系统, $C=0$ 时方程为:

$$\ddot{x} - \omega_0 \sin x = 0 \tag{13}$$

2.2 单摆系统的相图分析

通过对光滑参数的分析,倒置摆和单摆被紧密的联系了起来. 当单摆位于无阻尼的介质中摆动(方程 13),根据不同的初始值对相轨迹进行分析,其中 $y = \dot{x}$ 也就是摆的角度为时的速度,在没有外界阻力情况下的单摆系统始终能够达到动势能完全转化的平衡,从而一直作关于初始位置和速度的周期运动,运动周期的中心为点(由于该倒置摆系统的 0 点位置设置为垂直向上,所以说单摆运动周期的中心垂直向下为点). 图 4 给出单摆系统的周期运动.

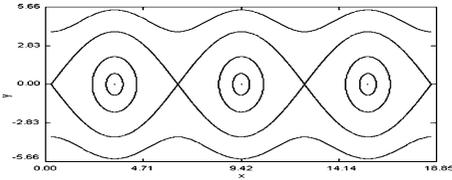


图 4 无阻尼系统的相图

Fig.4 Phase diagram of no damping system

当单摆是在粘性介质中运动时,小球受一个与速度 y 成正比的阻力,其中的阻尼系数为 C ,那么在外界的阻力的影响下,系统的动势能总和一直减少最后直到减少为 0,系统能量总和达到平衡稳定于点,此时阻尼消失摆杆最终在点停止运动保持静止,相图分析如图 5. 关于单摆系统的运动性质可以参见杨联华 2007^[6].

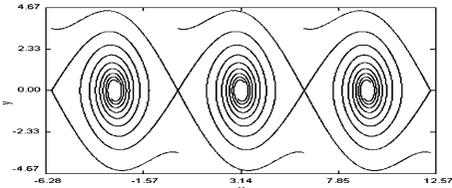


图 5 有阻尼系统的相图

Fig.5 Phase diagram of damping system

3 受扰振子的非线性特征

利用数字仿真方法对该系统在弱扰动下进行振子的动力学分析,运用 Rung - Kutta 方法给出 Poincaré 映射的分叉图. 根据时间 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 所取的相点关于各扰动参数的分叉图.

3.1 阻尼 C 的相应分析

本节研究在参数阻尼 C 的扰动下的分岔. 以下分析中,始终假设 $\omega_0^2 = 4, \xi = 2, \omega = 1$. 图 6(a) 给出 x 对应于参数 C 的由 2 减少到 0 时的分岔图. 相应的 Lyapunov 指数由图 6(b) 给出. 由分岔图可以看出:随着参数 C 的变小,振子出现两个共存的周期一解,它们分别由不同的两个初始条件决定. 视此周期解为三维空间柱面上的周期运动,如图 6(c) 所示. 图 6(d) 给出两个共存的周期一解的平面轨线图. 其中 0 和 2 都表示倒置摆的初始竖直向上的位置,用不同颜色表示系统的两个周期一解,用星号表示 Poincaré 截面的点. 两个共存的周期一解分岔出相应的两个周期二解如图 7(a),周期四解如图 7(b). 这个倍周期分岔过程,导致系统出现两个共存的混沌吸引子,如图 7(c) 所示. 图 7(d) 给出这两个共存的混沌吸引子的全局吸引域. 随着参数的连续变化,这两个共存的混沌吸引子最后结合成一个大的新混沌吸引子,如图 8(a) 所示.

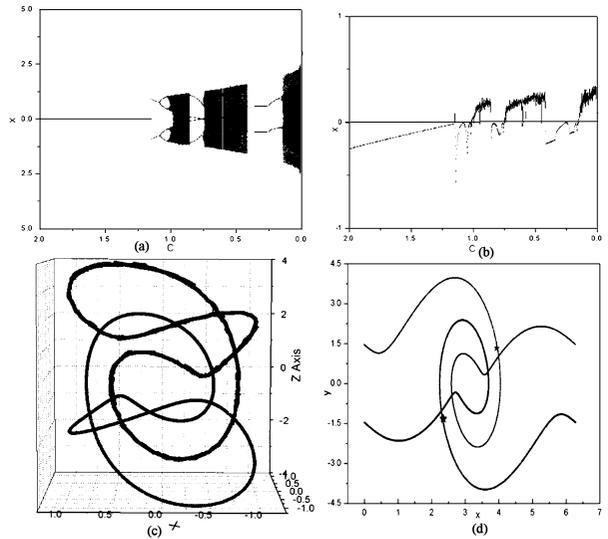


图 6 在参数 $\omega_0^2 = 4, \xi = 2, \omega = 1$ 下对参数 C 的分岔图和 Lyapunov 指数图:(a)在参数从 2 变化到 0 的分岔图;(b)相应的 Lyapunov 指数图;(c)共存的三维柱面上两个周期 1 解;(d)两个共存周期 1 解的平面图

Fig.6 Bifurcation diagram and Lyapunov exponents for $\omega_0^2 = 4, \xi = 2, \omega = 1$:(a) Bifurcation diagram for C;(b) Lyapunov exponents for C ; (c) coexisted period one solutions in Three - dimensional cylindrical; (d) coexisted period one solution in Plane

对系统的混沌解做 Poincaré 截面得到系统的混沌吸引子如图 8(b) 所示. 图 8(c) 给出小阻尼时的吸引子,并且计算出相应的 Lyapunov 指数. 图 8

(b)表示的混沌吸引子的最大 Lyapunov 指数为 0.181. 图 8(c)表示的混沌吸引子的最大 Lyapunov 指数被计算为 0.198.

由分叉图同时可以看出,当参数 C 不断增大时,振子有一个周期四解,并可以过度到混沌解.由此可见,当 $C > 0$ 时系统表现为丰富的周期吸引子和混沌吸引子.以及由周期吸引子向混沌吸引子的转迁,混沌吸引子的合并现象,说明该系统具有非常复杂的非线性特征.

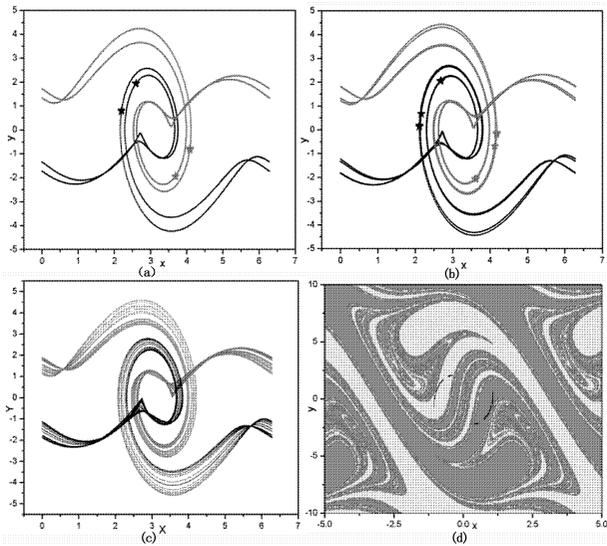


图7 当参数 $\omega_0^2=4, \xi=2, \omega=1$ 时的轨线图: (a) 两个共存的周期 2 解; (b) 两个共存的周期 4 解; (c) 两个共存的混沌解; (d) 这两个共存的混沌吸引子的全局吸引域图

Fig. 7 Trajectory diagram for $\omega_0^2=4, \xi=2, \omega=1$:

- (a) coexisted period two solutions;
- (b) coexisted period four solutions;
- (c) coexisted period two chaotic solutions;
- (d) The whole attraction domain of the two coexist chaotic attractors

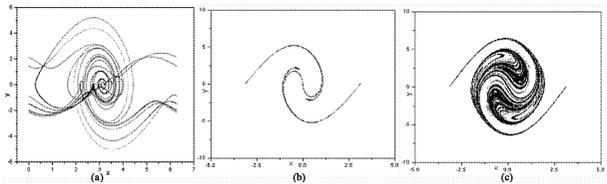


图8 当 $\omega_0^2=4, \xi=2, \omega=1$ 时的轨线图 and 吸引子图:

- (a) 两个共存的混沌解;
- (b) 相应的混沌吸引子,其最大 Lyapunov 指数为 0.181,分维数为 1.199;
- (c) 小阻尼时混沌吸引子,其最大 Lyapunov 指数为 0.198,分维数为 1.218

Fig. 8 The diagrams of Trajectory and attractor for $\omega_0^2=4, \xi=2, \omega=1$
 (a) coexisted period two chaotic solutions; (b) the Corresponding chaotic attractors with the largest Lyapunov exponent 0.181 and Fractal dimension 1.199; (c) chaotic attractor in little damping with the largest Lyapunov exponent 0.198 and Fractal dimension 1.218

3.2 参数 ξ 的相应分析

本节研究参数 ξ 的扰动下的分岔. 系统的数字仿真过程中,始终假设 $\omega_0^2=4, C=0.02, \omega=1$, 图 9 (a) 给出的 Poincaré 映射是 x 对应于参数 ξ 由 1.85 变化到 2.15 的分岔图, 相应的 Lyapunov 指数由图 9 (b) 给出. 系统由一个周期 2 解经过倍周期分岔出混沌吸引子. 当 $\xi=1.85$ 时系统有周期 2 解见图 9 (c). 随着 ξ 的增大出现新的周期 2 解及其混沌吸引子, (其相应的相图略了去). 由分岔图可以看出, 当 ξ 从 1.85 变化到 2.15 时系统表现出丰富的动力学行为, 即存在周期吸引子和混沌吸引子.

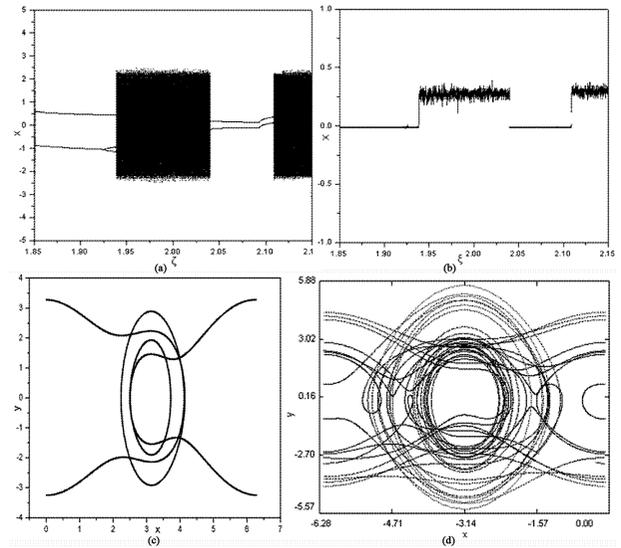


图9 当 $\omega_0^2=4, C=0.02, \omega=1$ 时的分岔图与轨线图:

- (a) 从 1.85 变化到 2.15 时的分岔图;
- (b) 相应的 Lyapunov 指数图;
- (c) 系统的一个周期 2 解;
- (d) 由这个周期 2 解经倍周期分岔导出的混沌运动的平面相位图

Fig. 9 Bifurcation and trajectory diagram for $\omega_0^2=4, C=0.02, \omega=1$

- (a) Bifurcation diagram for ξ ;
- (b) Liapunov exponents for ξ ;
- (c) period two solutions ;
- (d) Plane phase diagram from period doubling bifurcation to chaos

3.3 参数 ω 的相应分析

本节研究基座频率扰动下系统在大阻尼条件下的动力学行为^[2,3,4]. 数字仿真过程中,假定参数 $\omega_0^2=4, C=1, \omega=2.5$. 利用 Poincaré 映射给出关于 x 对应于参数 ω 的分岔图, 如图 10 (a) 所示. 图 10 (b) 给出相应的 Lyapunov 指数图. 由分岔图可以看出, 当参数 $\omega=4$ 时系统存在两个共存的周期 1 解, 分别在三维柱面上用红色和黑色表示这对周期 1 解, 如图 10 (c) 所示. 随着 ω 的减小有这两个共存的周期一解分岔出相应周期 2 解, 周期 4 解, 周期 8

解等. 这个倍周期分岔分岔出相应的混沌吸引子. 最后两个小的混沌吸引子合并成一个大的新混沌吸引子, 其相应的 Poincaré 截面由图 10(d) 给出.

研究发现, 系统在参数 ω 扰动下表现为丰富的动力学行为: 周期吸引子和混沌吸引子, 以及由周期吸引子向混沌吸引子的转迁, 混沌吸引子的合并现象, 并且得到了在大阻尼条件下的大振幅周期运动.

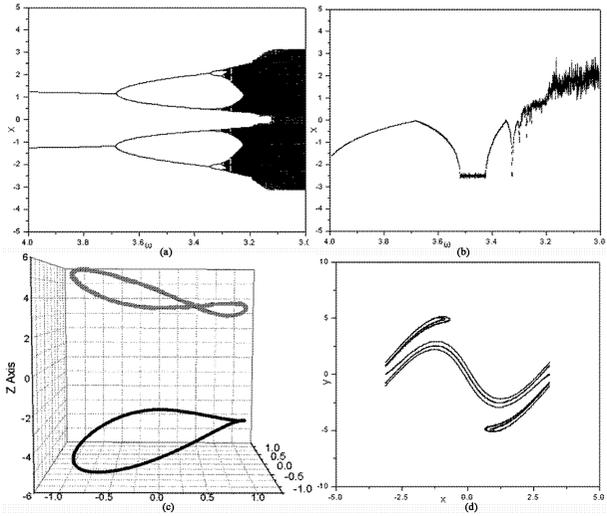


图 10 当参数 $\omega_0^2 = 4, \xi = 2.5, C = 1$ 时分岔图及其吸引子:

(a) 关于 ω 从 4 变化到 3 的分岔图; (b) 相应的 Lyapunov 指数图; (c) 系统的两个共存的周期 1 解; (d) 两个共存的周期 1 解经倍周期分岔导出的混沌吸引子, 其最大 Lyapunov 指数为 0.369, 分维数为 1.269

Fig. 10 Bifurcation diagram and attractor for $\omega_0^2 = 4, \xi = 2.5, C = 1$:

(a) Bifurcation diagram for ω ; (b) Liapunov exponents for ω ;

(c) coexisted period one solution (d) chaotic attractors with the largest Lyapunov exponent 0.369 and Fractal dimension 1.269

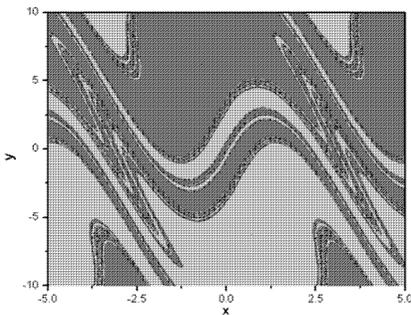


图 11 当 $\omega_0^2 = 4, \xi = 2.5, C = 1, \omega = 4$ 时系统的两个共存的周期 1 解的全局吸引域图

Fig. 11 The whole attraction domain of the coexisted period one solutions for $\omega_0^2 = 4, \xi = 2.5, C = 1, \omega = 4$

该系统的周期 1 解能量吸收好, 运行消耗少, 由于该大振幅周期运动可以在大阻尼条件下实现,

因此具有动力输出效率高等特点. 因此选定参数 $\omega_0^2 = 4, \xi = 2.5, C = 1, \omega = 4$ 是发电实现的最佳选择. 图 11 给出该对共存周期解的吸引域, 其中红色和绿色分别表示两个共存周期解的吸引域.

4 结论

本文研究了一个振动基座上倒置摆的数学模型, 探讨了海洋波力发电的可行性, 为海洋波力开发利用提供了重要依据; 同时揭示了该系统的复杂动力学行为, 探索该系统的非线性特征. 研究发现, 当系统参数变化时, 该系统具有一对共存的倍周期分岔序列分别通向不同的混沌运动, 表现为独立的共存奇怪吸引子现象. 当系统参数继续变化时, 这对混沌吸引子混合为一个独立的奇怪吸引子, 此现象提供了一个新的通向混沌的途径. 本研究最重要的是发现该系统存在大阻尼条件下的大周期运动, 这表明该模型具有海浪波力能源吸收好, 消耗少的特点, 同时表明该模型具有高效的动力输出能力. 因此, 振动基座上倒置摆模型在开发利用海洋波力能源发电中具有十分重要的应用前景.

参 考 文 献

- Stephenson A. On a new of dynamic stability. *Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc.*, 1908, 52: 1 ~ 10
- Smith H J T, Blackburn J A. Experimental study of an inverted pendulum. *Am. J. Phys.* 1992, 60: 909 ~ 911
- Pippard A B. The inverted pendulum. *Eur. J. Phys.* 1987, 8: 203 ~ 206
- Kalmus H P. The inverted pendulum. *Am. J. Phys.*, 1970. 38: 874 ~ 878
- 曹庆杰. SD 振子, SD 吸引子及其应用. *振动工程学报*, 2007, 20(5): 454 ~ 458 (Cao Qingjie. SD oscillator, the attractor and their applications. *Journal of Vibration Engineering*, 2007, 20(5): 454 ~ 458 (in Chinese))
- Cao Qingjie. Piecewise linear approach to an archetypal oscillator for smooth and discontinuous dynamics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2008, 366(1865): 635 ~ 652
- Cao Qingjie. Global bifurcations of the forced MKdV-Burgers equation. *Proceedings of the International Conference on Nonlinear Mechanics, ICNM*, 1998: 593 ~ 596

- 8 Cao Qingjie . Periodic and chaotic behaviour in a reduced form of the perturbed generalized Korteweg-de Vries and Kadomtsev-Petviashvili equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1999, 125(3-4) : 201 ~ 221
- 9 Cao Qingjie. Analysis of period-doubling and chaos of a non-symmetric oscillator with piecewise-linearity. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(10) : 1917 ~ 1927
- 10 李志从,王琪. 受两个频率激励的皮带驱动的具有干摩擦的振子的动力学分析. *动力学与控制学报*, 2008, 6(1) : 45 ~ 49 (Li Zhicong , Wang qi . Dynamical analysis of a dry friction oscillator with two-frequency and belt driving. *Journal of Dynamics and Control* , 2008, 6(1) : 45 ~ 49 (in Chinese))

THE STUDY ON THE APPLICATIONS OF AN INVERTED PENDULUM ON OCEAN WAVE GENERATING *

Li Xianghong Cui Wenliang Cao Qingjie

(Department of Mathematics-Physics Shijiazhuang railway college, Shijiazhuang 050043, China)

Abstract This study is to modify the collection of sea wave energy by using an inverted pendulum with vibrating base. As a result, the model itself is rich of nonlinear behaviours worth being investigated theoretically. The study shows that the co-existence of a pair of periodic doubling series leads to chaos respectively as the parameter varies. Furthermore, this coexisted chaotic motion can be merged into a large strange attractor. This provides a new route to chaos! The study also presents the significant founding that the system behaves a large periodic motion under the condition of large damping. This concludes that this model is of the best capacity of gathering energy with minor consuming and higher efficiency of kinetic energy output.

Key words inverted pendulum with vibrating base, application of wave energy, strange attractor, nonlinear dynamic behaviour