

# 分数阶超混沌系统的线性广义同步观测器设计\*

刘杰 李新杰 何小亚 董鹏真

(武汉科技学院非线性科学研究中心, 武汉 430073)

**摘要** 首先利用分数阶的常微分动力系统的稳定性理论,通过判断线性化后平衡点的稳定不变特性、辅助以分岔图分析等数值手段,给出了新近提出的改进型超混沌 Lü 系统对应分数阶系统产生混沌现象的阶次参数范围;进一步,设计了一类广义线性同步观测器,该观测器的动力学行为能与原系统实现任意的线性关系的广义同步,而经典的完全同步、反相同步以及投影同步可以视为本文提出方法的特例.最后的数值仿真进一步证实了本文提出的观测器设计方案的有效性.

**关键词** 分数阶微分方程, 广义同步, 观测器, 超混沌系统

## 引言

分数阶微积分是我们熟知的整数阶微积分的扩展,它指微分和积分的阶次是分数的或者说是任意次的.近年来,分数阶微积分因其在物理、电路、工程、信号处理等领域中的应用已经引起研究者的广泛兴趣<sup>[1]</sup>.应用分数阶微积分的数学模型,被认为可以很好的提高对电路等动态系统的设计、表征和控制的能力.例如,最经典的 Chua's 电路就被证明可以用分数阶混沌系统更好的表征<sup>[2],[3]</sup>;正因为此,针对许多经典的混沌电路,如 Lorenz、Lü、Chen 混沌电路、Rössler 混沌和超混沌 Rössler 系统等,研究者提出了相应的分数阶系统<sup>[4],[14]-[15]</sup>,并通过试验或数值仿真发现:当系统的阶数为分数时,系统仍可能在一定的阶次范围内呈现混沌或超混沌动力学性态<sup>[1]-[4],[15]</sup>,且更能反映对应物理系统动态性能的本质特点.

驱动-耦合混沌同步框架,最早是在 1990 年由美国海军实验室的 Pecora 和 Carroll 率先提出的,它是一种令两个混沌系统通过单变量注入、从而实现二者动力学行为发生“步调一致”,即同步行为的方法,他们首次在电路实验中观察到混沌同步现象.这一发现让人们对于混沌系统对初值敏感、难以应用的印象逐步改变.随后的近 20 年里,混沌控制与同步方面的理论和应用方面的研究迅猛发展,取得了诸多成果,详细的进展可参

见<sup>[5],[6],[19]</sup>.目前,研究者提出了多种同步概念,如完全同步,有效完全同步, Q-S 同步,预期、延迟同步,投影同步等,事实上,这些现象都可以看做是 Rulkov 等在 1995 年提出的“推广的混沌同步”类型之一,即为“广义同步”的特例.所谓广义同步<sup>[7],[20]</sup>,是指响应系统的状态变量与驱动系统的状态变量的函数同步,根据函数关系的不同,自然会观察到上述提到的各类有趣现象.正因为如此,经典的完全同步可以看作是广义同步的平凡情形.

本文首先利用分数阶的常微分动力系统的稳定性理论,通过判断线性化后平衡点的稳定不变特性、辅助以分岔图分析等数值手段,给出了新近提出的改进型分数阶超混沌 Lü 系统产生混沌现象的阶次范围;进一步,设计了一类广义线性同步观测器,该观测器的动力学行为能与原系统实现任意的线性关系的广义同步,最后的数值仿真进一步证实了本文提出观测器设计方案的有效性.

## 1 分数阶微分及其数值算法

分数阶微分的定义有几种,最常用的是 Riemann - Liouville (R - L) 定义,其数学表达式如下:

$$\frac{d^q f(x)}{dt^q} = \frac{1}{\Gamma(n-q)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{q-n+1}} d\tau \quad (1)$$

式中  $\Gamma$  为伽马函数,  $n-1 \leq q < n$ ,  $n$  为整数.

目前,实施分数阶微积分运算的求解方法有多种,常用的方法主要有几何近似方法和预估校正方

2008-12-02 收到第 1 稿,2008-12-28 收到修改稿.

\* 武汉科技学院青年基金(20073201)、武汉科技学院预研基金,湖北省自然科学基金 2007ABA348 和国家自然科学基金 60574045 部分资助的课题

法,由于几何近似的波特图近似方法在拟合频率区间的两端存在较大误差,容易导致频率响应失真现象,因此在讨论分数阶非线性系统出现混沌等复杂现象时存在出现伪混沌的可能,越来越多的工程技术人员开始考虑使用更可靠的数值研究方法<sup>[8]-[10]</sup>.常用的方法之一就是广义的 Adams - Bashforth - Moulton 方法.下面,为便于进一步分析讨论,先简单介绍本文将采用的该类预估校正方法<sup>[17],[18]</sup>.

考虑如下微分方程:

$$\begin{cases} \frac{d^q y(t)}{dt^q} = f(t, y(t)), & 0 \leq t \leq T \\ y^{(K)}(0) = y_0^{(K)}, & K=0,1,\dots,m-1, (m=[q]) \end{cases} \quad (2)$$

式(2)与下式:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^t (t-\tau)^{q-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (3)$$

等价.

取  $h = \frac{T}{N}, t_n = nh, n=0,1,\dots,N \in Z^+$ , 则(3)式

可离散化为:

$$y_h(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^q}{\Gamma(q+2)} (f(t_{n+1}, y_h^p(t_{n+1})) + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j))) \quad (4)$$

其中:

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{q+1} - (n-q)(n+1)^q, & j=0 \\ (n-j+2)^{q+1} + (n-j)^{q+1} - 2(n-j+1)^{q+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases}$$

$$y_h^p(t_{n+1}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} +$$

$$\frac{1}{\Gamma(q)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j))$$

$$b_{j,n+1} = \frac{h^q}{q} ((n+1-j)^q - (n-j)^q)$$

式(3)与式(4)的误差为:  $Max_{j=0,1,2,\dots,N} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p)$ , 其中  $p = \text{Min}(2, 1+q)$ . 关于该算法格式的稳定性及误差分析,可参见文献<sup>[1],[17]</sup>,

[18]. 本文将利用该算法分析新近提出的一类超混沌系统所对应分数阶混沌系统的动力学及同步控制问题.

## 2 分数阶超混沌 Lü 系统及其产生混沌现象的阶次范围确定

### 2.1 分数阶超混沌 Lü 系统

最近,通过引入一个状态反馈控制方程的简单方法,文献<sup>[11]</sup>给出了一个新的四阶超混沌系统,与其对应的分数阶系统的动力学方程如下:

$$\begin{cases} \frac{d^q x}{dt^q} = a(y-x-yz) \\ \frac{d^q y}{dt^q} = -xz + by + u \\ \frac{d^q z}{dt^q} = xy - cz \\ \frac{d^q u}{dt^q} = -dx \end{cases} \quad (5)$$

其中  $q(0 < q \leq 1)$  为系统的阶次参数,  $a, b, c, d$  为系统参数. 特别地,当  $q=1$ , 参数  $a=35, b=14, c=3, d=5$  时,系统为整数阶超混沌系统.

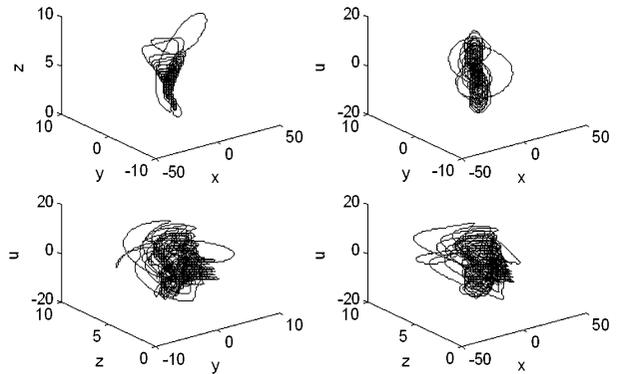


图1  $q=1$  时整数阶超混沌系统三维相图

Fig.1 Phase portrait of the hyper-chaotic system where  $q=1$

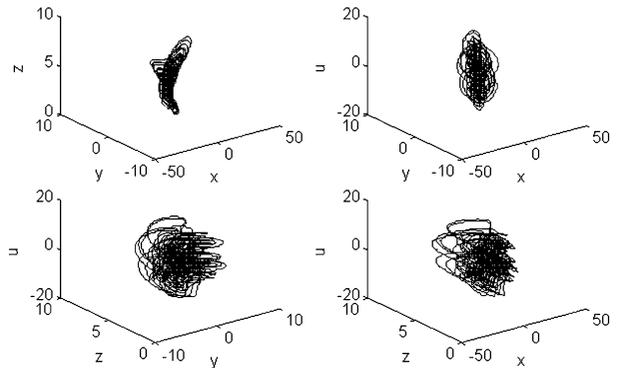


图2  $q=0.95$  时对应分数阶系统三维相图

Fig.2 Phase portrait of the hyper-chaotic system where  $q=0.95$

在图1中,我们给出了整数阶混沌系统的空间三维相图.图2则给出了 $q=0.95$ 时的系统三维相图.

### 2.2 分数阶非线性系统产生混沌现象的阶次范围讨论:理论与数值分析

首先,本节将给出决定由整数阶混沌系统所构造的对应齐次分数阶系统(指阶次参数为常向量的情形)出现混沌特性的一个必要条件,这里需要用到如下的几个引理<sup>[8],[9]</sup>.

引理1:对于分数阶系统 $\frac{d^q X}{dt^q} = AX, (0 < q \leq 1, X \in R^n)$ ,当 $|\arg(\text{eig}(A))| > \frac{q\pi}{2}$ 时,其平衡点是渐进稳定的.

引理2:对于分数阶系统 $\frac{d^q X}{dt^q} = f(X), (0 < q \leq 1, X \in R^n, f \in C^1)$ ,记 $X^*$ 为满足方程 $f(X) = 0$ 的所有平衡点,则当 $|\arg(\text{eig}(\frac{\partial f}{\partial X}|_{X^*}))| > \frac{q\pi}{2}$ 时,其平衡点 $X^*$ 是局部渐进稳定的.

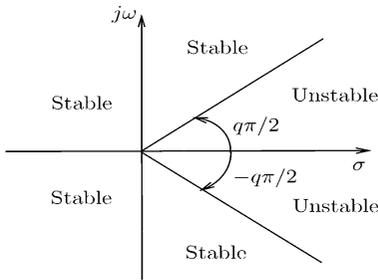


图3 分数阶混沌系统的稳定区域示意图

Fig. 3 Stable and unstable region of the fractional order system

引理3:假定为 $\lambda$ 非线性系统 $\frac{d^q X}{dt^q} = f(X), (X \in R^n, f \in C^1)$ ,不稳定平衡点处所对应的线性化雅可比矩阵的特征值,则对应的分数阶系统: $\frac{d^q X}{dt^q} = f(X), (0 < q \leq 1, X \in R^n, f \in C^1)$ ,仍旧保持混沌的必要条件为:该特征值 $\lambda$ 位于引理1所确定的不稳定区域之内,即满足: $\tan(\frac{q\pi}{2}) > \frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)} \Rightarrow q > \frac{2}{\pi}$

$$\tan^{-1} \frac{|\text{Im}(\lambda)|}{\text{Re}(\lambda)}$$

结论1:齐次分数阶系统(5)出现混沌现象的阶次应该满足条件 $q > 0$ .

事实上,齐次分数阶超混沌LU系统(5)有唯一的平衡点: $O(0,0,0,0)$ ,容易求出该系统在不稳定

平衡点 $O$ 处的特征值 $\lambda$ 分别为: $\lambda_1 = -35.1015, \lambda_2 = 0.3629, \lambda_3 = 13.7387, \lambda_4 = -3.0000$ ,利用上面的引理计算可得: $q > 0$ 就可能产生混沌现象,显然这仅仅是(5)产生混沌现象的一个必要条件.

进一步,在下面的图4中,我们给出了分岔参数为阶次参数的分岔图,从数值结果可以看出:仅当 $q$ 取值为 $0.865 \sim 1.000$ 时,系统会呈现较为复杂的动力学行为.

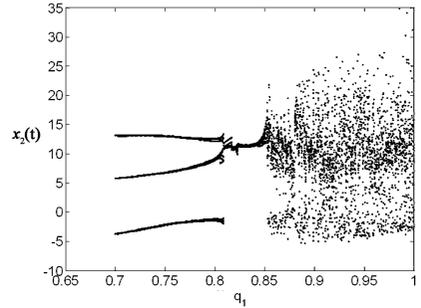


图4  $x_2(t) - q$ 分岔图

Fig. 4 Bifurcation graph of the hyper-chaotic system: state  $x_2(t)$  v. s. order parameter  $q$

在以下的讨论中,我们将仅讨论(5)取混沌阶次参数时(对应分数阶混沌系统)的同步控制问题,当然,对于对应周期的各类情形,所有理论分析依然成立.

### 3 分数阶超混沌 Lü 系统的广义同步

#### 3.1 广义同步概念

首先回顾混沌系统的广义同步概念.考虑以下两个不同的分数阶系统:

$$\begin{cases} \frac{d^q X}{dt^q} = f(X), & (a) \\ \frac{d^q Y}{dt^q} = g(Y, X), & (a) \end{cases} \quad (6)$$

称式(6a)代表的系统为驱动系统,式(6b)代表的系统为受控响应系统.式中变量满足: $X \in R^n, Y \in R^m, f: R^n \rightarrow R^n, g: R^n \times R^m \rightarrow R^m, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$

$$Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T, \frac{d^q X}{dt^q} = \left( \frac{d^q x_1}{dt^q}, \frac{d^q x_2}{dt^q}, \dots, \frac{d^q x_n}{dt^q} \right),$$

$$\frac{d^q Y}{dt^q} = \left( \frac{d^q y_1}{dt^q}, \frac{d^q y_2}{dt^q}, \dots, \frac{d^q y_m}{dt^q} \right),$$

如果 $Y(t)$ 的轨道由驱动信号 $X(t)$ 唯一地确定,即响应系统的状态输出 $Y(t)$ 与驱动系统状态 $X(t)$ 满足某种函数关系,在响应系统的吸引域内,任意改变响应系统的初值 $Y(0)$ ,系统都会趋于与初

始条件  $Y(0)$  无关的解,这时,我们就说  $Y(t)$  与  $X(t)$  同步.当这两个混沌信号同步时, $Y(t)$  与  $X(t)$  可能并不相等,甚至它们的维数都可以不同.这种现象被称为两个分数阶系统实现了广义同步(Generalized-Synchronization).显然,通常意义下的 P-C 完全同步是广义同步(G-S 同步)的特例<sup>[7],[20]</sup>.

### 3.2 线性广义同步观测器设计

根据常见非线性系统的特点,一般地,不妨设驱动系统具体形式为下面的方程:

$$\frac{d^q X}{dt^q} = AX + BF(X) + C \quad (7)$$

现基于传统的观测器理论,构造一类响应系统如下:

$$\frac{d^q Y}{dt^q} = PAP^{-1}Y + PBF(X) + PC + K(W_m(X) - W_s(Y)) \quad (8)$$

式中:  $A \in R^{n \times n}$ ,  $B \in R^{n \times n}$ ,  $C \in R^{n \times 1}$ ,  $0 < q \leq 1$ ,  $P \in R^{n \times n}$  可为任意的满秩矩阵,  $W_m(X)$ ,  $W_s(Y)$  分别为驱动系统(7)和响应系统(8)的状态输出.

容易证明,当  $W_m(X)$ ,  $W_s(Y)$  满足一定条件时,成立如下定理:

**定理 1** (分数阶混沌系统线性广义同步定理)

当  $(A, B)$  能控、可测,  $W_m(X) = PX$ ,  $W_s(Y) = Y$  且  $|\arg(\lambda_{PAP^{-1}-K}^i)| > \frac{\alpha\pi}{2}$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 时,响应系统(8)与驱动系统(7)的状态输出满足如下演化关系:  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y - PX\| = 0$ , 亦即,驱动与相应系统实现了广义同步,且随时间演化,最终响应系统状态  $Y(t)$  与驱动状态  $X(t)$  满足关系:  $Y = PX$ , 特别地,称满秩矩阵  $P$  为确定广义同步状态变量具体关系的线性关系矩阵.

证明: 设  $e = Y - PX$ , 根据分数阶微分性质,由式(7), 式(8)得

$$\frac{d^q e}{dt^q} = \frac{d^q Y}{dt^q} - P \frac{d^q X}{dt^q} = PAP^{-1}Y + PBF(X) + PC +$$

$$K(W_m(X) - W_s(Y)) - P(AX + BF(X) +$$

$$C) = PAP^{-1}(Y - PX) + K(PX - Y) =$$

$$(PAP^{-1} - K)(Y - PX) = (PAP^{-1} - K)e$$

亦即:

$$\frac{d^q e}{dt^q} = (PAP^{-1} - K)e = \Lambda e \quad (9)$$

式中右端:  $\Lambda = PAP^{-1} - K$  为实常数矩阵. 根据前述

引理 3, 可知  $|\arg(\lambda_A^i)| > \frac{q\pi}{2}$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 时, 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e\| = 0, \text{ 即: } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y - PX\| = 0.$$

定理证毕.

注 1: 由式(9)可知, 根据矩阵理论, 对于任意的可逆矩阵  $P$ , 总可以通过适当选取常数矩阵  $K$ , 使得  $|\arg(\lambda_A^i)| > \frac{q\pi}{2}$ , 则必有  $e \rightarrow 0$  成立, 也就意味着两个分数阶混沌系统的动力学达到了前述的广义同步(GS).

注 2: 从上面定理证明的推导过程可见, 当可逆矩阵  $P$  给定时, 要设计给定混沌系统的线性广义同步响应系统, 只需要取  $\Lambda = PAP^{-1} - K$  的所有特征值  $\lambda_A^i$ , ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 位于分数阶混沌系统的稳定区域即可, 亦即位于图 1 的 stable 区域. 因此, 可以先任意选定  $\Lambda$ , 然后根据关系  $K = PAP^{-1} - \Lambda$  确定响应系统(8)的具体表达式.

### 3.3 线性 G-S 同步仿真实例

仍以新近提出的改进超混沌 Lü 系统动力学方程(5)为例. 当取  $a=35, b=14, c=3, d=5, \alpha=0.95$  时, 系统呈现混沌态. 现将式(5)写成紧缩形式, 得到:

$$\begin{cases} \frac{d^q e}{dt^q} = AX + BF(X) + C \\ W_m(X) = PX \end{cases} \quad (10)$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X \in R^{n \times 1},$$

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F(X) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \\ 0 \end{pmatrix}, C \in R^{n \times 1},$$

容易验证: 在上述参数取值条件下,  $(A, B)$  可控.

构造响应系统:

$$\begin{cases} \frac{d^q Y}{dt^q} = PAP^{-1}Y + PBF(X) + PC + K(W_m(X) - W_s(Y)) \\ W_s(Y) = Y \end{cases} \quad (11)$$

令  $\Lambda = PAP^{-1} - K$  的所有特征值  $\lambda_A^i$ , ( $i=1, 2,$

...,  $n$ ) 分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ , ( $\lambda_{i=1,2,3,4} < 0$ ), 同时, 令确定广义同步状态变量具体关系的线性关系矩阵  $P$  为:

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix}$$

则可以求得常量矩阵  $K = PAP^{-1} - \Lambda$  具体形式为:

$$K = PAP^{-1} - \Lambda = P \begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} - \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \quad (12)$$

这时, 系统 (11) 成为分数阶混沌系统 (10) 的一个广义同步观测器, 利用它可以实时了解原始混沌系统 (10) 的动力学演化特征. 最终两系统状态满足关系:  $Y = PX$ , 即:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 P_{1i} x_i \\ \sum_{i=1}^4 P_{2i} x_i \\ \sum_{i=1}^4 P_{3i} x_i \\ \sum_{i=1}^4 P_{4i} x_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

亦即:  $y_j = \sum_{i=1}^4 P_{ji} x_i$ , ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) 成立.

### 3.4 数值仿真结果

下面分两类情形进行数值仿真验证理论分析的正确性, 本节所有数值仿真均是在 Matlab7.0 环境下进行, 采用的数值仿真算法为广义 Adams - Bashforth - Moulton 预估校正算法, 初始条件  $[X(0), Y(0)]$  取为  $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ , 仿真时间区间为  $[0s, 50s]$ , 仿真积分步长为 0.001.

情形一: 设  $P = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ , 此时对应  $P - C$  完全同步观测器设计问题, 即观测器状态与原始系统状态呈现完全同步的情形, 具体的数值仿真如图 5 所示.

情形二: 设  $P = \text{diag}(-1, -1, -1, -1)$ , 此时对应反向同步观测器设计问题, 即观测器状态与原始系统状态呈现反向同步的情形, 具体的数值仿真

如图 6 所示.

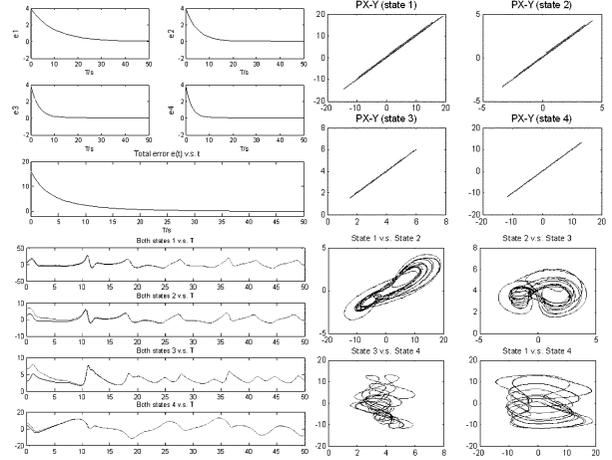


图 5 当阶次参数全部取为 0.98 时, 构造的观测器响应系统与原超混沌分数阶系统发生完全同步的对应状态及误差演化示意图

Fig. 5 P - C Synchronization error between the hyper - chaotic system and its observer system, where  $q = 0.98$

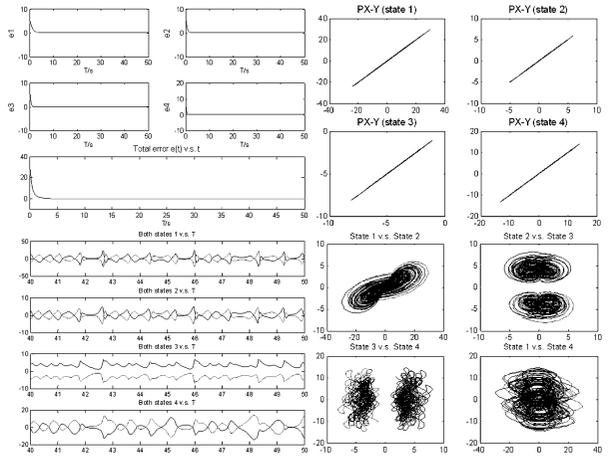
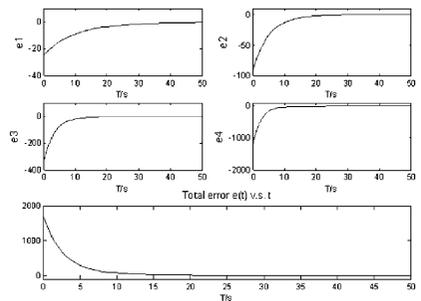


图 6 当阶次参数全部取为 0.98 时, 构造的观测器响应系统与原超混沌分数阶系统发生反向同步的对应状态及误差演化示意图

Fig. 6 Anti - synchronization error between the hyper - chaotic system and its observer system, where  $q = 0.98$

情形三: 设  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{pmatrix}$ , 此时对应



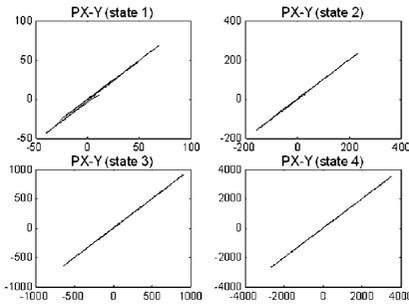


图7 当阶次参数全部取为0.98时,构造的观测器响应系统与超混沌分数阶系统发生G-S同步的对应状态及误差演化示意图

Fig. 7 Linear generalized synchronization (G-S) error between the hyper-chaotic system and its observer system, where  $q=0.98$

线性G-S完全同步观测器设计问题,即观测器状态与原始系统状态呈现广义同步的情形,具体的数值仿真如图7所示。

#### 4 结论与展望

利用分数阶的常微分动力系统的稳定性理论,本文首先通过判断线性化后平衡点的稳定不变特性、辅助以分岔图分析等数值手段,给出了新近提出的改进型超混沌Lü系统对应分数阶系统产生混沌现象的阶次参数范围;进一步,设计了一类广义线性同步观测器,该观测器的动力学行为能与原系统实现任意的线性关系的广义同步,而经典的完全同步、反相同步以及投影同步可以视为本文提出方法的特例。本文研究结果对于保密通信领域的研究者具有部分参考价值,在将来的研究中,我们还将进一步研究实现任意可微关系的广义同步观测器设计方案,能否采用单一标量信号实现同步观测器的设计无疑也是下一阶段需要深入研究的重要课题。

#### 参 考 文 献

- 1 I Podlubny. Fractional differential equations. Academic Press, New York, 1999
- 2 T T Hartley, C F Lorenzo, H K Qammer. Chaos in a fractional order Chua's system. *IEEE Trans. CAS - I*, 1995 (42): 485 ~ 490
- 3 Ivo Petrúš. Method for simulation of the fractional order chaotic systems. *Acta Montanistica Slovaca*, 2006, 11(4): 273 ~ 277
- 4 W M Ahmad, J C Sprott. Chaos in fractional-order autonomous nonlinear systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 16: 339 ~ 351
- 5 胡岗, 萧井华, 郑志刚. 混沌控制. 上海: 上海科技教育出版社, 2002 (Hu G, Xiao J H, Zheng Z G. Chaos control. Shanghai: Shanghai Press of Scientific Education, 2002 (in Chinese))
- 6 陈关荣, 吕金虎. Lorenz系统族的动力学分析、控制与同步. 北京: 科学出版社, 2003 (Chen G, Lu J H. Dynamics analysis, control and synchronization of the Lorenz system family. Beijing: Scientific Press, 2003 (in Chinese))
- 7 G Chen, X Yu. Chaos control: theory and applications, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2003
- 8 M S Tavazoei, M Haeri. Unreliability of frequency-domain approximation in recognising chaos in fractional-order systems. *IET Signal Processing*, 2007, 1(4): 171 ~ 181
- 9 M S Tavazoei, M Haeri. A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems. *Physics Letters A*, 2007, 367, 1-2(16): 102 ~ 113
- 10 M S Tavazoei, M Haeri. Chaos control via a simple fractional-order controller. *Physics Letters A*, 2008, 372, 6(4): 798 ~ 807
- 11 Guangyi Wang, Xun Zhang, Yan Zheng, Yuxia Li. A new modified hyperchaotic Lü system. *Physica A*, 2006, 371: 260 ~ 272
- 12 Liu Jie, Li Xinjie. Synchronization of fractional hyperchaotic Lü system via unidirectional coupling method. Proceedings of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation, 2008: 4653 ~ 4658
- 13 刘杰, 董鹏真, 何小亚. 分数阶Lü系统的动力学分析. 武汉科技学院学报, 2008, 21(8): 102 ~ 105 (Liu J, Dong P Zh, He X Y. Dynamical analysis of fractional chaotic Lü system. *Journal of Wuhan Univ. of Sci. and Engr.*, 2008, 21(8): 102 ~ 105 (in Chinese))
- 14 廖少锴, 张卫. 分数阶Duffing振子的动力学研究. 动力学与控制学报, 2008, 6(2): 122 ~ 125 (Liao Shaokai, Zhang wei. Dynamics of fractional duffing oscillator. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 122 ~ 125 (in Chinese))
- 15 严艳, 张隆阁. Lorenz系统的分数阶控制算法. 动力学与控制学报, 2006, 4(2): 132 ~ 135 (Yan Y, Zhang L G. Fractional control algorithm of Lorenz system. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(2): 132 ~ 135 (in Chinese))
- 16 凌俊杰, 刘崇新, 张作鹏, 陈向荣. 基于状态观测器的分数阶统一混沌系统的同步控制. 西安交通大学学报,

- 2007,41(4):497~500(Lu J J, Liu C X, Zhang Z P, Chen X R. State observer based synchronization control between fractional order unified chaotic systems. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2007, 41(4):497~500(in Chinese))
- 17 Deng Weihua, Li Changpin, Lu Jinhua. Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 48(4):409~416
- 18 Zhou Tianshou, Li Changpin. Synchronization in fractional-order differential systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2005, 212(1-2):111~125
- 19 张丽萍, 姜海波, 毕勤胜. 一类非自治混沌系统的自适应脉冲同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(4):312~315 (Zhang Liping, Jiang Haibo, Bi Qinsheng. Adaptive impulsive synchronization for a class of non-autonomous chaotic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(4):312~315(in Chinese))
- 20 刘福才, 宋佳秋. 一类参数不确定混沌系统的广义同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(2):130~133 (Liu Fucan, Song Jiaqiu. Generalized synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2):130~133(in Chinese))

## LINEAR GENERALIZED SYNCHRONIZATION OBSERVER DESIGN OF THE FRACTIONAL HYPERCHAOTIC SYSTEM\*

Liu Jie Li Xinjie He Xiaoya Dong Pengzhen

(Nonlinear Science Research Centre, Wuhan University of Science and Engineering, Wuhan 430073, China)

**Abstract** Based on the stability theory of fractional ordinary differential equations, the fractional dynamics of the newly proposed Lü chaotic system was analyzed. The range of order parameter was given by judging the stability of the equilibrium of the locally linearized system and by using bifurcation graph analysis. Furthermore, a synchronization observer was designed for linear generalized synchronization of such a newly proposed nonlinear chaotic system, which has the dynamic behavior of realizing arbitrary linear generalized synchronization including classical complete synchronization, anti-synchronization, projective synchronization as special cases with the original system. Finally, the numerical simulation verifies our results.

**Key words** fractional ordinary differential equations, generalized synchronization, observer, hyperchaotic system