

# 一个新混沌系统的参数辨识\*

常迎香<sup>1</sup> 王淑英<sup>1</sup> 李险峰<sup>2</sup> 张建刚<sup>1</sup>

(1. 兰州交通大学数理与软件工程学院, 兰州 730070) (2. 香港城市大学电子工程系, 香港)

**摘要** 基于稳定性理论, 对一个新混沌系统设计了合适的参数辨识观测器, 并选择适当的未知参数初值, 达到该系统所有参数能准确和快速的辨识, 同时结合小波降噪法, 提高参数的辨识精度. 数值仿真结果表明了所设计的参数辨识观测器的有效性.

**关键词** 参数辨识, 观测器, 小波变换

## 引言

二十世纪六十年代初, 美国气象学家 E. N. Lorenz 在研究大气层的热对流问题时, 发现第一个混沌吸引子<sup>[1]</sup>, 之后混沌理论的研究与应用得到了极大的关注<sup>[2-4]</sup>. 1999年, 陈关荣等在研究混沌反控制的过程中发现了一种与 Lorenz 类似但不拓扑等价的 Chen 系统<sup>[5]</sup>. 2001年, 吕金虎等又发现了一个临界系统 Lü 系统<sup>[6]</sup>. 2007年, 褚衍东等提出一个新混沌系统<sup>[7]</sup>, 并用电子电路实现了该系统, 由于这个新混沌系统与 Lorenz 系统类似但并不拓扑等价, 并且具有奇特的复杂动力学特性, 所以对其各方面的研究具有重要意义. 尤其是对于该新混沌系统的控制与同步及其应用也得到了广泛的研究和实现<sup>[8]</sup>.

但是在现实问题中, 参数未知情况下的混沌控制与同步更为普遍, 关键是对混沌系统的参数进行准确和快速的辨识<sup>[9-11]</sup>, 对于噪声干扰下的参数辨识曲线, 本文引入小波变换对其进行消噪处理, 且原理简单、实现容易、效果明显. 同时针对这个新混沌系统, 设计出合适的参数辨识观测器, 考虑到实际问题中有些系统的可控参数存在小幅度涨落, 本文对于任选的一个稳定的参数值施加扰动, 并通过数值模拟验证了该观测器的高效性.

## 1 理论分析

### 1.1 参数观测器的设计

该新系统的动力学方程描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = b - x_1 x_2 - c x_3 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in R^3$  为系统的状态变量,  $a, b, c \in R$  为参数且  $a > 0, b > 0, c > 0$ . 并由文献[4]可知, 当固定参数  $a = 5, b = 16, c = 1$  时, 系统(1)表现为混沌状态.

需要辨识的未知参数  $a, b, c$  均为时不变的, 设未知参数的辨识结果分别是  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ . 令

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = -l_1(x_1, x_2)(x_2 - x_1)\hat{a} + l_1(x_1, x_2)\dot{x}_1 \\ \dot{\hat{b}} = -l_2\hat{b} + l_2(x_1 x_2 + c x_3 + \dot{x}_3) \\ \dot{\hat{c}} = -l_3(x_3)x_3\hat{c} + l_3(x_3)(b - x_1 x_2 - \dot{x}_3) \end{cases} \quad (2)$$

设参数误差系统分别为  $e_1 = \hat{a} - a, e_2 = \hat{b} - b, e_3 = \hat{c} - c$ . 则有

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{\hat{a}} - \dot{a} = -l_1(x_1, x_2)(x_2 - x_1)e_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{\hat{b}} - \dot{b} = -l_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{\hat{c}} - \dot{c} = -l_3(x_3)x_3 e_3 \end{cases} \quad (3)$$

式中  $l_1(x_1, x_2), l_2, l_3(x_3)$  分别为关于参数  $a, b, c$  的增益函数.

而在实际情况下, 变量  $x_1$  和  $x_3$  的导数不能观测到, 那么通过引入辅助变量来消除系统(2)中的  $\dot{x}_1$  和  $\dot{x}_3$ , 令

$$\begin{cases} p_1 = \hat{a} + \phi_1(x_1, x_2) \\ p_2 = \hat{b} + \phi_2(x_1, x_2, x_3) \\ p_3 = \hat{c} + \phi_3(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (4)$$

式中  $\phi_1(x_1, x_2), \phi_2(x_1, x_2, x_3), \phi_3(x_1, x_2, x_3)$  均为

2008-12-11 收到第1稿, 2008-12-29 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金资助项目(50475109), 甘肃省自然科学基金资助项目(3ZS042-B25-049), 兰州交通大学科研基金(DXS-07-0028, DXS-07-0029)

要设计的辅助函数,它满足

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -l_1(x_1, x_2) \\ \frac{\partial \phi_2(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = -l_2 \\ \frac{\partial \phi_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3} = -l_3(x_3) \end{cases} \quad (5)$$

由(1)、(2)、(4)和(5)可以得到

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -l_1(x_1, x_2)(x_2 - x_1)p_1 + l_1(x_1, x_2) \times \\ \quad (x_2 - x_1)\phi + (x_1x_3 - x_2) \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} \\ \dot{p}_2 = -l_2p_2 + l_2(x_1x_2 + cx_3 + \phi_2) + a(x_2 - \\ \quad x_1) \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + (x_1x_3 - x_2) \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} \\ \dot{p}_3 = -l_3(x_3)x_3p_3 + l_3(x_3)(b - x_1x_2 + \\ \quad x_3\phi_3) + a(x_2 - x_1) \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} + (x_1x_3 - x_2) \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \end{cases} \quad (6)$$

显然,只要选取合适的增益函数就可使误差系统(3)渐近稳定,结合(4)和(5)构造辅助函数,那么(6)和(4)所构成的观测器能够使系统(1)中的未知参数  $a, b, c$  分别快速准确的辨识出来.

增益函数通常分别选为

$$\begin{cases} l_1(x_1, x_2) = k_1(x_2 - x_1)^{2n_1 - 1} \\ l_2 = k_2 \\ l_3(x_3) = k_3x_3^{2n_3 - 1} \end{cases}$$

其中常数  $k_1, k_2, k_3 > 0 (n_1, n_3 = 0, 1, 2, \dots)$ .

此时,相应的参数误差系统为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1(x_2 - x_1)^{2n_1} e_1 \\ \dot{e}_2 = -k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -k_3x_3^{2n_3} e_3 \end{cases}$$

随着  $t \rightarrow \infty$ , 参数误差  $e_1, e_2, e_3$  都以指数倍率收敛于零.

那么增益函数的最简单选择分别为

$$\begin{cases} l_1(x_1, x_2) = k_1(x_2 - x_1) \\ l_2 = k_2 \\ l_3(x_3) = k_3x_3 \end{cases} \quad (7)$$

此时辅助函数分别为

$$\begin{cases} \phi_1 = -k_1(x_1x_2 - 0.5x_1^2) \\ \phi_2 = -k_2x_3 \\ \phi_3 = 0.5k_3x_3^2 \end{cases} \quad (8)$$

将式(7)和式(8)代入式(6),可得辨识未知参

数  $a, b, c$  的观测器分别为

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = -k_1(x_2 - x_1)^2 p_1 + k_1^2(x_2 - x_1)^2(0.5x_1^2 - \\ \quad x_1x_2) + k_1x_1(x_2 - x_1x_3) \\ \hat{a} = p_1 + k_1(x_1x_2 - 0.5x_1^2) \\ \dot{p}_2 = -k_2p_2 - k_2^2x_3 + ck_2x_3 + k_2x_1x_2 \\ \hat{b} = p_2 + k_2x_3 \\ \dot{p}_3 = -k_3x_3^2 p_3 + 0.5k_3^2x_3^4 + bk_3x_3 - k_2x_1x_2x_3 \\ \hat{c} = p_3 - 0.5k_3x_3^2 \end{cases}$$

## 1.2 小波变换理论

小波变换是把原始信号分解成为一个低频概貌信号和一个高频概貌信号,它是利用小波母函数的平移和伸缩实现的.小波函数的定义如下:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

式中  $a$  为尺度参数,  $b$  为时间参数.当参数  $a$  变化时,小波函数具有伸缩性,当参数  $b$  变化时,小波函数随时间轴活动,如果  $a, b$  同时变化则形成一簇小波函数,信号  $f(t)$  可以按这簇小波函数进行分解.

对于任意信号  $f(t) \in L^2(R)$ , 其小波函数定义如下:

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{a,b}^*(t) dt$$

基于小波变换的阈值降噪方法的步骤简述如下:

(1) 选择合适的小波,对信号进行小波分解,得到小波系数  $W$ .

(2) 计算小波阈值  $\delta$ , 选择合适的阈值方法,对小波系数进行取舍,得到新的小波系数  $W_\delta$ .

(3) 对得到的小波系数  $W_\delta$  进行逆小波变换,得到降噪后的信号.

Donoho 将阈值函数分为软阈值和硬阈值,设  $W$  是小波系数的大小,  $W_\delta$  是施加阈值  $\delta$  后的小波系数大小.

(1) 硬阈值

当小波系数的绝对值小于给定阈值时,令其为 0, 而大于阈值时,保持其不变,即

$$W_\delta = \begin{cases} W, & |W| \geq \delta \\ 0, & |W| < \delta \end{cases}$$

(2) 软阈值

当小波系数的绝对值小于给定阈值时,令其为 0, 大于阈值时,令其都减去阈值,即

$$W_\delta = \begin{cases} \text{sign}(W)(|W| - \delta), & |W| \geq \delta \\ 0, & |W| < \delta \end{cases}$$

### 2 数值仿真

用四阶 Runge - Kutta 法进行数值仿真,为使系统处于混沌状态,系统参数如前所述,初始条件取为  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (-6, -4, 1)$ , 积分步长为  $h = 0.001$ , 为达到精确和快速的参数辨识,各未知参数的初始值分别取为

$$\hat{a}_0 = \frac{x_1(h) - x_1(0)}{h(x_2(0) - x_1(0))},$$

$$\hat{b}_0 = x_1(0)x_2(0) + cx_3(0) + \frac{x_3(h) - x_3(0)}{h},$$

$$\hat{c}_0 = \frac{1}{x_3(0)} [b - x_1(0)x_2(0) + x_3(h) - \frac{x_3(0)}{h}].$$

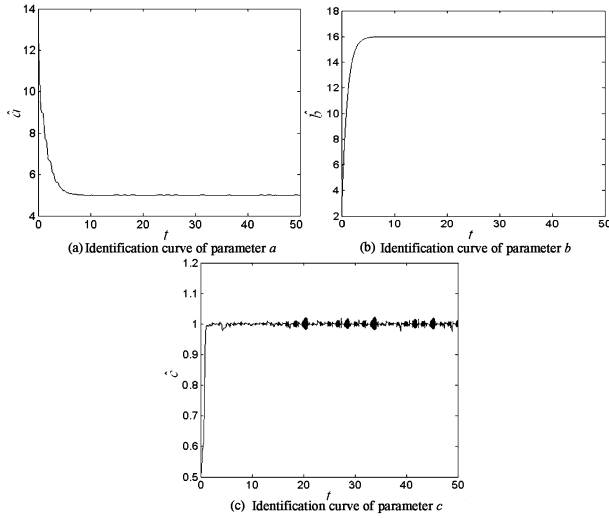


图1 系统(1)的三个未知参数  $a, b, c$  随时间变化的辨识曲线  
 Fig.1 Identification curves of three uncertain parameters  $a, b, c$  of system (1) with varying time

图1给出了当选取控制增益  $k_1, k_2, k_3$  均为常数1时,未知参数  $a, b, c$  的辨识结果随时间变化的曲线. 对于不同的控制增益  $k$ , 它的取值直接影响到辨识曲线的收敛速度,以参数  $b$  为例,如图2所示,从参数  $b$  的辨识曲线的收敛速度可知,  $k$  值越大,系统参数  $b$  所需的辨识时间也就越短. 图3是选择 Daubechies 小波作为小波母函数,采用 db6 进行尺度为8的分解,分别用软、硬阈值降噪法对染噪的参数  $c$  的辨识结果进行处理,然后进行降噪信号的重构,消噪后的信号保持了原信号的光滑性和相似性,更凸显了辨识曲线的趋势,显然未知参数最终稳定在  $\hat{c}$ . 图5给出参数  $b$  在  $t = 50s$  后,在外界扰动下的辨识曲线,其中图5(a)给出参数  $b$  由16跃变到,其它参数不变的情形,图5(b)给出参数  $b$

在  $t = 50s$  后按  $b = 16 + 2\sin t$  变化,其它参数不变的情形. 显然,在参数  $b$  分别处于稳定值、发生跃变变化和缓慢变化时其辨识曲线仍然保持光滑性且稳定性.

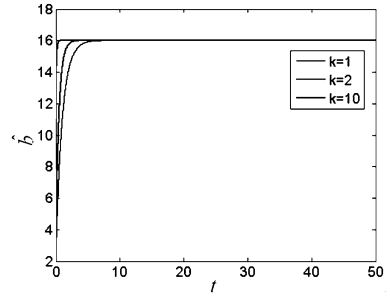


图2 不同  $k$  值下未知参数  $b$  的辨识曲线  
 Fig.2 Identification curves of uncertain parameter  $b$  with different values of  $k$

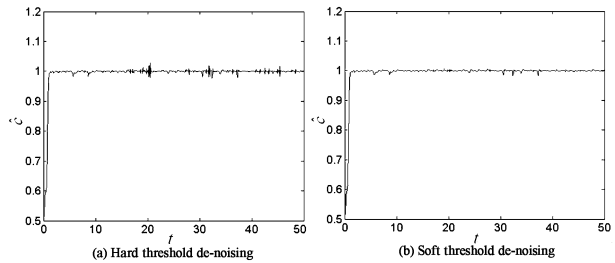


图3 硬、软阈值降噪下未知参数  $c$  的辨识曲线  
 Fig.3 Identification curves of uncertain parameter  $c$  under hard and soft threshold de - noising

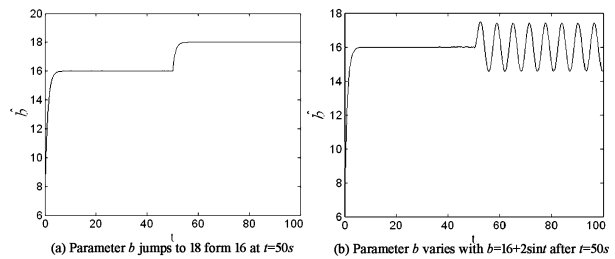


图4 其它参数不变,参数  $b$  在不同外界扰动下的随时间变化的辨识曲线  
 Fig.4 Identification curves of parameter  $b$  under different interferences while other parameters are stable

### 3 结论

构造出合适的参数观测器,对一个具有研究价值的新混沌系统的所有参数进行辨识,并且对于公共参数  $a$  实现了准确和快速的辨识,理论方法简单明了,同时利用小波变换可以进行多分辨率分析的特点,对信号小波变换在不同尺度下的小波系数进行阈值降噪,然后进行信号重构,提高了参数辨识的精确度. 实验证明数值仿真与理论分析一致.

## 参 考 文 献

- 1 Lorenz E N. Deterministic non - periodic flow. *J Atmos Sci*, 1963, 20: 130 ~ 141
- 2 李险峰, 张建刚, 褚衍东, 常迎香. 一个类 Lorenz 混沌系统的动力学分析及电路仿真. *动力学与控制学报*, 2007, 5(4): 324 ~ 329 (Li Xianfeng, Zhang Jiangang, Chu Yandong, Chang Yingxiang. Dynamics analysis and circuit experiment simulation for a new Lorenz - like chaotic system. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(4): 324 ~ 329 (in Chinese))
- 3 单梁, 李军, 王执铨. 参数不确定 Liu 混沌系统的自适应同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 338 ~ 343 (Shan Liang, Li Jun, Wang Zhiqian. Adaptive synchronization of Liu chaotic system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 338 ~ 343 (in Chinese))
- 4 王琳, 倪樵, 刘攀, 黄玉盈. 一种新的类 Lorenz 系统的混沌行为与形成机制. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (Wang Lin, Ni Qiao, Liu Pan, Huang Yuying. Chaos and its forming mechanism of an new Lorenz likes system. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 1 ~ 6 (in Chinese))
- 5 Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor. *Int J Bifurcation Chaos*, 1999, 9: 1465 ~ 1466
- 6 Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined. *Int J Bifurcation Chaos*, 2002, 3: 659 ~ 661
- 7 褚衍东, 李险峰, 张建刚, 常迎香. 一类新自治混沌系统的计算机仿真与电路模拟. *四川大学学报(自然科学版)*, 2007, 44(3): 596 ~ 601 (Chu Yandong, Li Xianfeng, Zhang Jiangang, Chang Yingxiang. Computer simulation and circuit implementation for a new autonomous chaotic system. *Journal of Sichuan University: Natural Science Edition*, 2007, 44(3): 596 ~ 601 (in Chinese))
- 8 刘晓君, 李险峰, 张建刚. 一个新自治混沌系统的混沌同步控制. *复杂系统与复杂性科学*, 2007, 4(4): 51 (Liu Xiaojun, Li Xianfeng, Zhang Jiangang. Chaos synchronization for a new autonomous chaotic system. *Complex System and Complexity Science*, 2007, 4(4): 51 (in Chinese))
- 9 关新平, 彭海明, 李丽香. Lorenz 混沌系统的参数辨识与控制. *物理学报*, 2001, 50(1): 26 ~ 29 (Guan Xinping, Peng Haiming, Li Lixiang. Parameters identification and control of Lorenz chaotic system. *Acta Physica Sinica*, 2001, 50(1): 26 ~ 29 (in Chinese))
- 10 马军, 唐国宁, 蒲忠胜等. 一类复杂动力系统的参数辨识. *郑州大学学报(自然科学版)*, 2004, 36(4): 28 ~ 31 (Ma Jun, Tang Guoning, Pu Zhongsheng, et al. Parameter identification for one class of complex system. *Journal of Zhengzhou University: Natural Science Edition*, 2004, 36(4): 28 ~ 31 (in Chinese))
- 11 马军, 唐国宁. 四维 L C 振子的超混沌系统的参数辨识与同步. *河南大学学报(自然科学版)*, 2003, 33(1): 30 ~ 34 (Ma Jun, Tang Guoning. Synchronization of L. C oscillator hyperchaos system base on parameter identification. *Journal of Henan University (Natural Science Edition)*, 2003, 33(1): 30 ~ 34 (in Chinese))

## PARAMETER IDENTIFICATION OF A NEW CHAOTIC SYSTEM\*

Chang Yingxiang<sup>1</sup> Wang Shuying<sup>1</sup> Li Xianfeng<sup>2</sup> Zhang Jiangang<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics, Physics and Software Engineering, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China)

(2. Department of Electronic Engineering, City University of Hong Kong, Hong Kong, China)

**Abstract** Based on the stability theory, the suitable observers were given to identify all the unknown parameters of a new chaotic system. The accurate and fast identification was implemented by selecting right initial value. At the same time, the accuracy of parameter identification was improved by combining the wavelet de - noising. Theory analysis and numerical simulation results show that the observers to identify the parameters are effective and feasible.

**Key words** parameter identification, observer, wavelet transform

Received 11 December 2008, revised 29 December 2008.

\* The Project supported by National Natural Science Foundation of China (50475109), Gansu Province Government of China (3ZS - 042 - B25 - 049) and Scientific Research Foundations of Lanzhou Jiaotong University of China (DXS - 07 - 0028, DXS - 07 - 0029)