

# 基于 Kelvin 模型的粘弹性浅拱的动力稳定性\*

易壮鹏<sup>1</sup> 康厚军<sup>2</sup> 王连华<sup>3</sup>

(1. 长沙理工大学土木与建筑学院, 长沙 410114) (2. 湖南大学力学与航空航天学院, 长沙 410082)

(3. 湖南大学土木工程学院, 长沙 410082)

**摘要** 研究了外激励作用下非线性粘弹性浅拱的动力行为. 通过达朗贝尔原理和欧拉-贝努利假定建立了浅拱的动力学控制方程, 其中采用 Kelvin 模型来表示非线性粘弹性材料的本构关系, 并利用 Galerkin 法将方程简化用于数值分析. 分析了粘弹性材料参数、浅拱矢高、外激励幅值和频率对系统分岔和混沌等非线性动力学行为的影响, 结果表明各种参数条件下系统的非线性动力特性十分复杂, 周期运动、准周期运动和混沌运动窗口在一定条件下交替出现.

**关键词** 浅拱, 粘弹性, Kelvin 模型, 非线性动力学, Galerkin 法

## 引言

粘弹性结构在实际工程中有着广泛的应用, 外荷载作用下这类结构的静、动力学性能十分复杂, 国内外学者<sup>[1-11]</sup>对此展开了大量的研究. 陈立群和程昌钧等<sup>[2-5]</sup>对非线性粘弹性梁、柱的动力学行为进行了系统的研究, 分析了结构的动力稳定性和混沌发生的条件; 冯振宇和王忠民等<sup>[6]</sup>分析了粘弹性支承粘弹性桩的非线性动力稳定性; 张能辉和程昌钧<sup>[7]</sup>研究了粘弹性板基于 Galerkin 截断的非线性动力行为; 程昌钧和张能辉<sup>[8]</sup>探讨了粘弹性柱壳在轴压作用下的动力学行为; 张能辉和王建军<sup>[9]</sup>对粘弹性运动弦线在轴向变速运动时横向振动的非线性特征. 已有关于粘弹性结构研究的文献较少涉及到拱, 外激励作用下粘弹性浅拱非线性动力稳定性分析的研究未见报道, 浅拱在横向荷载作用下有可能发生屈曲, 外激励下结构可能出现内共振及动力响应产生分叉和混沌等非线性动力学行为, 最终导致系统失稳而使得结构破坏.

本文采用基于 Kelvin 模型的粘弹性材料描述, 通过达朗贝尔原理和欧拉-贝努利假定建立浅拱的动力学控制方程. 通过数值分析方法研究粘弹性材料、矢高和外激励对粘弹性浅拱的分岔和混沌等非线性动力稳定特性的影响.

## 1 基本方程

图1所示跨度为  $L$  的等截面浅拱,  $y_0(x)$  为浅拱轴线的初始位置,  $y(x, t)$  为  $t$  时刻的变形,  $F(x, t)$  为横向分布荷载. 引入(1)平截面假定; (2)不考虑剪切变形和转动惯量; (3)初始轴向推力为零假定后, 由达朗贝尔原理和基本假定浅拱的动力学控制方程可以写为<sup>[12]</sup>:

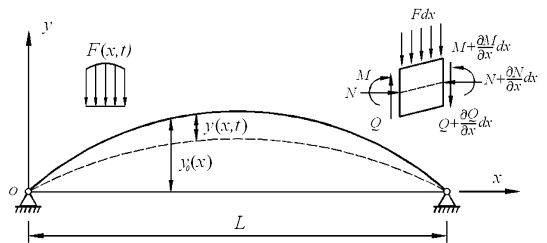


图1 浅拱的结构示意图

Fig. 1 Schematic of shallow arch

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 (y - y_0)}{\partial x^4} - \frac{EA}{2L} \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial y_0}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx - F(x, t) \quad (1)$$

其中  $\rho$  为结构密度,  $A$  为截面积,  $EI$  为抗弯刚度. 对两端铰支浅拱有  $y_0(0) = y(0, t) = 0, y_0(L) = y(L, t) = 0$  和  $y_0''(0) = y''(0, t), y_0''(L) = y''(L, t) = 0, y_0(x)$  及  $y(x, t)$  可展开为

$$y_0(x) = 2\left(\frac{I}{A}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L};$$

$$y(x,t) = 2\left(\frac{I}{A}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2)$$

式中常数  $b_n$  与函数  $q_n(t)$  为无量纲量,同时将分布荷载写为

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (3)$$

将式(2)和(3)代入(1),在内对  $x$  进行 Galerkin 积分有

$$\frac{\rho L^4}{\pi^4 I} \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -n^4 (q_n - b_n) - n^2 q_n \sum_{i=1}^{\infty} [i^2 (q_i^2 - b_i^2)] - \frac{L^4}{2\pi^4 EI} \left(\frac{I}{A}\right)^{1/2} f_n,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

采用 Kelvin 模型来表示材料的粘弹性特征,上式中  $E$  用  $E_0 + \eta \partial/\partial t$  代替,其中  $E_0$  为刚度常量,  $\eta$  是材料的动力粘性系数,可将上式变换为

$$\frac{\rho L^4}{\pi^4 I} \frac{d^2 q_n}{dt^2} = -n^4 (E_0 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) (q_n - b_n) - n^2 q_n (E_0 + \eta \frac{\partial}{\partial t}) \sum_{i=1}^{\infty} [i^2 (q_i^2 - b_i^2)] - \frac{L^4}{2\pi^4 I} \left(\frac{I}{A}\right)^{1/2} f_n,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

引入无量纲参量

$$w = \frac{y}{2} \left(\frac{A}{I}\right)^{1/2}; w_0 = \frac{y_0}{2} \left(\frac{A}{I}\right)^{1/2}; \xi = \frac{\pi x}{L};$$

$$\tau = t \left(\frac{\pi^4 EI}{A \rho L^2}\right); k = \eta \left(\frac{\pi^4 I}{E_0 \rho L^4}\right); r_n = \frac{f_n}{2} \left(\frac{AL^8}{\pi^8 E_0^2 I^3}\right)$$

与(2)式对应的无量纲位移为

$$w_0(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\xi; w(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \sin n\xi \quad (6)$$

同时方程(5)可进一步化为:

$$\frac{d^2 q_n}{d\tau^2} + n^4 (1 + k \frac{\partial}{\partial \tau}) (q_n - b_n) + n^2 q_n (1 + k \frac{\partial}{\partial \tau}) \sum_{i=1}^{\infty} [i^2 (q_i^2 - b_i^2)] + r_n = 0,$$

$$n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

上式即为粘弹性浅拱基于 Kelvin 模型的非线性动力方程,其一阶、二阶截断所得到的单自由度和两自由度模型分别为

$$\ddot{q}_1 + k(1 + 2q_1^2)\dot{q}_1 + q_1 - b_1 + q_1(q_1^2 - b_1^2) + r_1 = 0 \quad (8)$$

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + k[(1 + 2q_1^2)\dot{q}_1 + 8q_1 q_2 \dot{q}_2] + q_1 - b_1 + q_1(q_1^2 - b_1^2 + 4q_2^2) + r_1 \\ \ddot{q}_2 + 8k[q_1 q_2 \dot{q}_1 + 2(1 + 2q_2^2)\dot{q}_2] + 16q_2 - 16b_2 + 4q_2(q_1^2 - b_1^2 + 4q_2^2 - 4b_2^2) + r_2 \end{cases} \quad (9)$$

其中  $(\cdot)$  表示对  $\tau$  求导. 上面两式即可用于数值分析粘弹性浅拱的非线性动力稳定性.

## 2 数值计算与分析

本节通过数值计算来分析粘弹性浅拱的非线性动力学行为,计算过程中取  $E_0 = 3.0 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$ ,  $\rho = 2.5 \times 10^9 \text{ kg/m}^2$ ,  $A = 0.64 \text{ m}^2$ ,  $L = 10 \text{ m}$ ,  $\beta = 4.5$ ,  $I = 0.03413 \text{ m}^4$ ,  $r_1 = r \sin(\Omega \tau)$ ,  $r_2 = 0$ ,  $b_2 = 0$ .

### 2.1 材料参数的影响

图2给出了单自由度和两自由度两种模型在相同参数条件下广义坐标  $q_1$  的计算结果对比图.

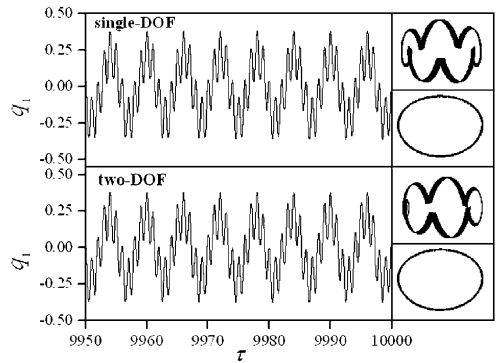


图2 两种模型结果对比图

( $k = 0.00005, b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

Fig. 2 Comparison diagrams of the two models with

( $k = 0.00005, b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

从图中时间历程曲线、相图和 Poincaré 映射可看出两种不同截断系统虽然具有较好的等价性,但二种模型中模态对应的位移响应存在一定的差异. 给定矢高和激励参数  $b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ , 图3给出了单自由度模型粘弹性浅拱随材料参数  $k$  变化的分岔图. 从中可以看到单自由度模型显示出复杂的非线性动力特性,在图中可以观察到混沌运动和准周期运动的窗口,而当  $k$  值增至一定程度时系统运行相对稳定. 图4则给出了与之对应的两自由度的分岔图,从图4(a,b)中均可看到材料参数对非线性动力特性的重要影响,广义坐标  $q_1$  和  $q_2$

的幅值随材料参数  $k$  的增大而固定在某一范围内. 同时与图 3 对比, 两自由度模型的一阶模态幅值大于单自由度模型的幅值, 因此二阶模态的非线性响应粘弹性浅拱的一阶模态的响应影响显著.

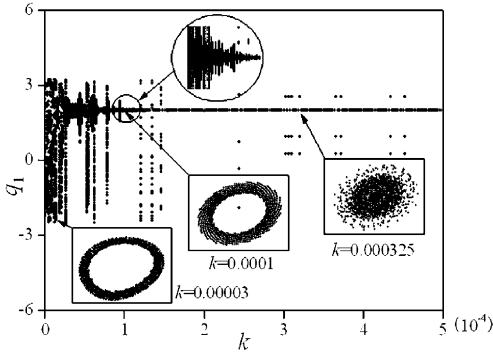


图3 材料参数变化时单自由度模型系统分岔图  
( $b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

Fig.3 Bifurcation diagrams of the single DOF model with  
( $b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

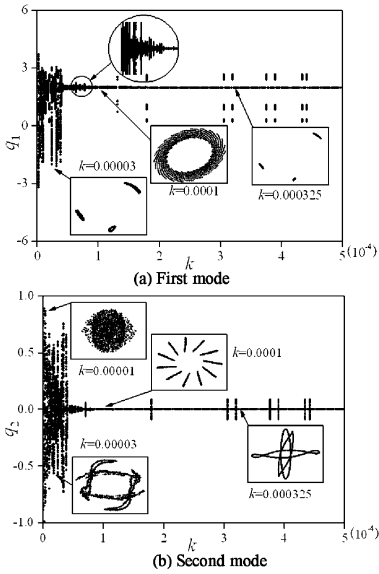


图4 材料参数变化时两自由度模型系统分岔图  
( $b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

Fig.4 Bifurcation diagrams versus variation of material parameter of two DOF model with ( $b_1 = 2.0, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

### 2.2 矢高参数的影响

图 5 给出了粘弹性浅拱随矢高参数变化时的分岔图, 其中材料、外激励参数给定为  $k = 0.00001, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ . 从图中可以看出在矢高参数  $b_1 \leq 1.70$  时系统的运动较为稳定, 运动形态以周期运动为主; 而在  $b_1$  继续增至 7.05 的过程中系统的运动则多为混沌运动;  $b_1$  继续增大时系统的运动又以周期运动和准周期运动为主. 因此, 系统的

各种运动形态随矢高参数  $b_1$  的变化而交替出现, 粘弹性浅拱的非线性动力行为十分复杂.

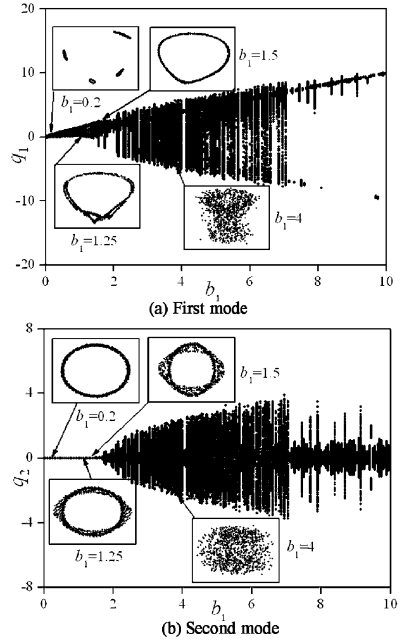


图5 矢高变化时系统分岔图( $k = 0.00001, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )  
Fig.5 Bifurcation diagrams versus variation of arch rise with  
( $k = 0.00001, r = 1.0, \Omega = 2\pi$ )

### 2.3 荷载参数的影响

外激励对粘弹性浅拱非线性从运动形态的影响一般考察激励的幅值和频率两个重要参数, 基于此图 6 和图 7 分别给出了粘弹性浅拱运动时广义坐标  $q_1$  和  $q_2$  随激励幅值和频率变化的分岔图, 前图中  $k = 0.00001, b_1 = 2.0, \Omega = 2\pi$ , 后图中  $k = 0.00001, b_1 = 2.0, r = 1.0$ .

图 6 中激励幅值区域为 (1, 50), 从中可以看到当激励幅值位于区间  $r \in (0, 25]$  时粘弹性浅拱的运动形态十分复杂, 图中给出了  $r = 8, r = 12.5$  和  $r = 15$  时三种典型准周期运动的 Poincaré 图; 而当激励幅值增大至幅值区间  $r \in (25, 50)$  内时系统的运动以准周期运动为主, 但其中又相间有明显的混沌运动窗口, 如  $r = 32.5$ . 图 7 给出了激励频率区域  $\Omega \in (0, 2\pi]$  内的分岔图, 从中可以看到在激励频率的变化过程中系统的运动非常复杂, 周期运动、准周期运动和混沌运动交替出现. 为进一步说明频率变化区间内粘弹性浅拱的运动特性, 图 7 中还给出了  $\Omega = \pi/4, \Omega = \pi/2, \Omega = \pi$  和  $\Omega = 15\pi/8$  四种情况下粘弹性浅拱的 Poincaré 图, 从中可以看到系统的映射为各种不同的环面, 系统的运动以一种特殊的周期发生变化, 即粘弹性浅拱的准周期运动.

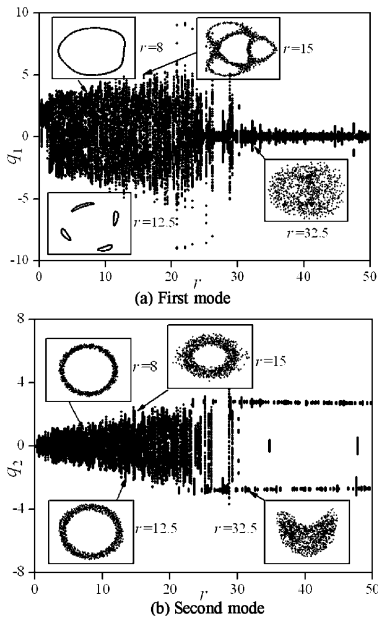


图 6 激励幅值变化时系统分岔图 ( $k = 0.00001, b_1 = 2.0, \Omega = 2\pi$ )  
 Fig. 6 Bifurcation diagrams versus variation of excitation amplitude with ( $k = 0.00001, b_1 = 2.0, \Omega = 2\pi$ )

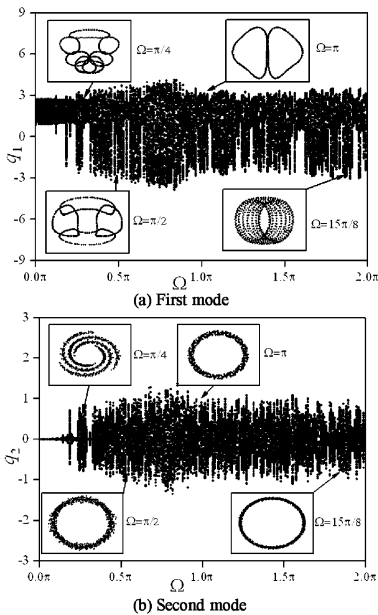


图 7 激励频率变化时系统分岔图 ( $k = 0.00001, b_1 = 2.0, r = 1.0$ )  
 Fig. 7 Bifurcation diagrams versus variation of excitation frequency with ( $k = 0.00001, b_1 = 2.0, r = 1.0$ )

### 3 结论

本文从达朗贝尔原理和欧拉 - 贝努利基本假定出发,采用 Galerkin 方法建立了粘弹性浅拱基于 Kelvin 模型的动力微分方程,用数值方法研究了外激励作用下的非线性动力特性,主要结论有:(1)材料参数  $k$  较小时系统运动较为复杂, $k$  增至某一

值时系统的运动趋于稳定;(2)系统运动对矢高参数  $b_1$  的变化非常敏感;(3)激励幅值和频率的变化对粘弹性浅拱的非线性动力特性影响十分显著,周期运动、准周期运动和混沌运动窗口在外激励参数变化时交替出现。

### 参 考 文 献

- 1 陈立群,程昌钧. 基于 Galerkin 截断的粘弹性结构动力学行为研究综述. 自然杂志, 1999, 21(1): 1~4 (Chen L Q, Cheng C J. On investigations of dynamical behavior of viscoelastic structures based on the galerkin method. *Natural Journal*, 1999, 21(1): 1~4 (in Chinese))
- 2 陈立群,程昌钧. 非线性粘弹性梁的动力学行为. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 897~920 (Chen L Q, Cheng C J. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic beams. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(9): 897~920 (in Chinese))
- 3 陈立群,程昌钧,张能辉. 具有几何和物理非线性粘弹性梁的混沌运动. 工程力学, 2001, 18(1): 1~6 (Chen L Q, Cheng C J, Zhang N H. Chaotic motion of viscoelastic beams with geometric and physical nonlinearities. *Engineering Mechanics*, 2001, 18(1): 1~6 (in Chinese))
- 4 Chen L Q, Cheng C J. Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic columns based on 2-order galerkin truncation. *Mechanics Research Communications*, 2000, 27(4): 413~419
- 5 Chen L Q, Cheng C J. Stability and chaotic motion in columns of nonlinear viscoelastic material. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2000, 21(9): 987~994
- 6 冯振宇,王忠民,樊丽俭. 粘弹性点支承粘弹性桩的动力稳定性分析. 中国公路学报, 2006, 19(1): 67~70 (Feng Z Y, Wang Z M, Fan L J. Dynamic stability analysis of viscoelastic pile with point viscoelastic supports. *China Journal of Highway and Transport*, 2006, 19(1): 67~70 (in Chinese))
- 7 张能辉,程昌钧. 粘弹性板动力稳定性分析中的两模态 Galerkin 逼近. 应用数学和力学, 2003, 24(3): 221~228 (Zhang N H, Cheng C J. Two-mode Galerkin approach in dynamic stability analysis of viscoelastic plates. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 24(3): 221~228 (in Chinese))
- 8 程昌钧,张能辉. 轴压作用下粘弹性柱壳的动力学行为. 应用数学和力学, 2001, 22(1): 1~8 (Cheng C J, Zhang N H. Dynamical behavior of viscoelastic cylindrical shells

- under axial pressures. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2001, 22(1): 1 ~ 8 (in Chinese))
- 9 张能辉, 王建军, 程昌钧. 轴向变速运动粘弹性弦线横向振动的复模态 Galerkin 方法. *应用数学和力学*, 2007, 28(1): 1 ~ 8 (Zhang N H, Wang J J, Cheng C J. Complex-mode Galerkin approach in transverse vibration of an axially accelerating viscoelastic string. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2007, 28(1): 1 ~ 8 (in Chinese))
- 10 盛冬发, 程昌钧. 几何非线性的损伤粘弹性 Timoshenko 梁的动力学行为. *动力学与控制学报*, 2004, 2(4): 77 ~ 83 (Sheng D F, Cheng C J. Dynamical behaviors of non-linear viscoelastic Timoshenko beams with damage. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(4): 77 ~ 83 (in Chinese))
- 11 Potapov V D, Marasanov A Y. The investigation of the stability of elastic and viscoelastic rods under a stochastic excitation. *International Journal of Solids and Structures*, 1997, 34(9): 1367 ~ 1377
- 12 Huang N C, Nachbar W. Dynamic snap-through of imperfect viscoelastic shallow arches. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1968, 35: 289 ~ 296

## THE DYNAMIC BEHAVIORS OF VISCOELASTIC SHALLOW ARCHES BASED ON KELVIN MODEL \*

Yi Zhuangpeng<sup>1</sup> Kang Houjun<sup>2</sup> Wang Lianhua<sup>3</sup>

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410114, China)

(2. College of Mechanical and Aerospace, Hunan University, Changsha 410082, China)

(3. College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract** The dynamic of nonlinear viscoelastic shallow arches subjected to the external excitation was investigated. Based on the d'Alembert principle and the Euler-Bernoulli assumption, the governing equation of shallow arch was obtained, where the Kelvin model was used to express the constitutive relation of nonlinear viscoelastic material, and the equation was simplified by the Galerkin's method for numerical analysis. Moreover, the effects of the viscoelastic material parameter, the rise and excitation on the nonlinear dynamic including system bifurcation and chaos of shallow arch were investigated. The results show that the nonlinear dynamic properties of the viscoelastic shallow arches were very complex, and the periodic motion, quasi-periodic motion and chaotic motion appeared alternately for certain condition.

**Key words** shallow arches, viscoelastic, Kelvin model, nonlinear dynamic behaviors, Galerkin's method