

非线性振动系统参数识别的迭代离散变分方法*

刘正山¹ 吴志刚^{1,2}

(1. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023) (2. 大连理工大学航空航天学院, 大连 116023)

摘要 针对存在干扰的非线性振动系统, 本文提出了一种识别模型参数的时域迭代方法. 首先, 对于每一组包含随机干扰的测量数据样本, 将待辨识参数对时间的导数引入到系统代价函数中, 进而利用离散变分原理导出关于待辨识参数的差分方程, 并与修改后的系统约束方程一同求解; 通过迭代计算使待识别参数从给定的初始值收敛到稳定的真值. 然后, 对通过 n 组干扰样本得到的参数识别结果取平均值, 并作为最终辨识结果. 最后, 利用本方法对一个四自由度非线性振动系统的模型参数进行了识别仿真, 数值结果证明了该方法的有效性.

关键词 参数识别, 非线性振动, 离散变分原理, 干扰样本

引言

动力学系统参数辨识的目的是为了构建准确的系统动力学模型, 以便于进行结构寿命检测、损伤估计和系统控制等^[1]. 它是现代控制和优化设计的关键环节, 属于动力学逆问题的范畴, 通常利用在实验和运行中测量到的系统输入输出数据, 根据系统辨识理论和参数识别技术, 辨识出系统动力学模型中的待定参数. 随着非线性动力系统各种分析和求解方法的深入发展、系统试验方法的创新以及现代计算机的应用, 关于非线性动力学系统参数识别的研究已经引起了广泛的关注, 成为重要的前沿课题之一^[2].

两类重要的非线性系统参数识别领域分别为时域和频域. 频域法具有物理意义明确、直观性强以及计算量小等优点^[3], 同时也存在着局部的很小损伤可能引起很大的偏差^[4], 以及不能用于估计系统阻尼特性^[5], 主要用于线性系统等缺陷. 而从系统时域特征提取数据的时域法, 则可以准确描述系统的动力学特性, 进而克服频域法的缺陷, 用于对非线性系统的全面分析. 本文从时域法角度出发研究系统参数辨识问题.

从时域角度出发, 关于非线性动力学系统参数辨识的研究已经广泛展开. Worden^[6]给出了对非线性系统参数识别方法的概述, 介绍了大部分已经成熟的以及正在发展的参数识别技术, 诸如恢复力界

面法、直接参数估计法、Narmax 模型、Volterra 级数法、逆路径法等. 以及其它文献提出的基于扩展卡尔曼滤波的辨识算法^[7], 子结构辨识算法^[8], 卡尔曼滤波增益辨识算法^[9], 小生境遗传算法的迟滞非线性参数识别方法^[10], 2-自由度强非线性振动参数识别方法^[11]等. 尽管已经提出诸多的辨识规则, 但是都普遍存在严格的适用条件, 因此应用范围有限, 只对少数参数辨识问题才是有效的^[5], 非线性动力系统参数辨识还没有形成相对统一的方法论.

在实际的计算过程中, 随机干扰对测量数据的影响是不可避免的, 如何使随机干扰对于实际的参数识别结果影响最小非常重要. 对于含噪声干扰信号的处理, 现在应用比较广泛的是卡尔曼滤波, 选干扰的二次型为代价函数^[12,13]. 本文从该角度出发对干扰进行处理.

考虑到每一组实际测量信号都是随机信号的一个样本, 因而是确定性的. 故本文首先针对每一组包含干扰的数据样本, 假定待辨识参数是随时间变化的矢量, 通过迭代求解获得待辨识参数的估计值; 然后, 对通过若干组包含干扰的数据样本得到的参数识别结果取平均值, 从而得到能够表征随机干扰的确定性的数字特征.

1 辨识问题和辨识方法

考虑由二阶常微分方程形式描述的带有局部

非线性动力特性的振动系统

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + N(x, \dot{x}, q) = D_1 F + D_2 w \quad (1)$$

其中, x, \dot{x}, \ddot{x} 分别为系统的位移、速度和加速度矢量; M, C, K 分别为系统的质量阵、阻尼阵和刚度阵的线性部分; F 为外激励项, D_1 为其方向矩阵; w 在此处定义为随机干扰信号的样本, 具有确定性, D_2 为其方向矩阵; N 为综合项, 描述动力系统的待辨识参数项 q 以及非线性项。

为了便于利用离散变分方法进行参数识别, 将描述连续振动系统的二阶常微分方程转化为常见的离散状态空间模型。首先, 将式(1)转化为一阶状态空间模型

$$\dot{z}(t) = Az(t) + BN(x, \dot{x}, q) + H_1 F + H_2 w \quad (2)$$

其中, $\dot{z} = \{\dot{x}^T \quad \ddot{x}^T\}^T, z = \{x^T \quad \dot{x}^T\}^T$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -M^{-1} \end{bmatrix}$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D_1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}D_2 \end{bmatrix}$$

然后, 将上述连续系统微分方程(2)转化为常见的离散状态空间模型(具体离散过程见第2节)状态方程

$$z_{k+1} = Tz_k + GN_k + HF_k + Dw_k \quad (3)$$

量测方程

$$y_k = Cz_k + v_k \quad (4)$$

其中, z_k, y_k 分别为系统的状态变量和量测矢量, T, G, H, D, C 为系统的常系数矩阵, N_k 为综合项, 描述系统的待辨识参数项以及非线性项, F_k 为系统的外激励项, w_k, v_k 分别为随机干扰(高斯白噪声)样本, 并且

$$T = e^{A\eta}; G = (e^{A\eta} - I)A^{-1}B;$$

$$H = (e^{A\eta} - I)A^{-1}H_1; D = (e^{A\eta} - I)A^{-1}H_2$$

本文对于每一组包含随机干扰(w_k, v_k)的样本, 在考虑系统干扰二次型最小情况的同时, 假设待辨识参数是随时间变化的, 并且希望其对时间的一阶导数的二次型也最小^[14], 故本文选定的系统参数辨识问题的代价函数为

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} w_k^T Q w_k + \frac{1}{2} v_k^T R v_k + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\eta} \right)^T \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\eta} \right) \right] \quad (5)$$

其中, Q, R, α 为加权系数, η 为采样时间间隔。

将代价函数(5)按照系统约束方程重新调整、

替换成为新的无约束最小二次型问题, 然后基于离散变分原理, 完成其一阶变分为零的推导(具体推导过程见第3节), 整理得到关于待辨识参数的差分方程以及考虑干扰的系统动力学差分方程

$$q_{k+1} = 2q_k - q_{k-1} - \frac{\eta^2}{\alpha} \left(G \frac{\partial N_k}{\partial q_k} \right)^T \left[\left(T + G \frac{\partial N_k}{\partial q_k} \right)^T \right]^{-1} \times \left[-C^T R (y_k - Cz_k) \right] \quad (6)$$

$$z_{k+1} = Tz_k + GN_k + HF_k + DQ^{-1}D^T \left[\left(T + G \frac{\partial N_k}{\partial q_k} \right)^T \right]^{-1} \times \left[-C^T R (y_k - Cz_k) \right] \quad (7)$$

最终采取如下计算策略: 首先, 对于每一组包含随机干扰(w_k, v_k)的数据样本, 通过迭代求解上述修正代价函数(5)极小值的必要条件(6)、(7), 待辨识参数从开始给定的任意初值逐步收敛到稳定的数值; 然后, 对若干组存在随机干扰的样本对应收敛到稳定数值的待辨识参数结果取平均值。

本方法的优势在于: 首先, 在第2节利用精细积分方法离散得到的系统差分方程, 能够保证系统离散化后的精度; 其次, 通过一定步骤的离散变分方法推导得到待辨识参数的差分方程以及考虑干扰的系统差分方程, 具有计算过程简单, 计算速度比较快的特点。

2 精细积分法导出离散状态空间模型

利用 Duhamel 积分, 按照精细积分思想—将状态空间模型后三项一起作为系统外力项, 可以得到方程(2)的解

$$z(t) = e^{A(t-t_0)} z(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\xi)} (BN(\xi) + H_1 F(\xi) + H_2 w(\xi)) d\xi \quad (8)$$

假定每次采样的时间间隔为 η , 则选定的辨识时间段可以表示为如下形式

$$t_k = k\eta, \quad (k=0, 1, 2, \dots, N)$$

则时间为 t_{k+1} 时方程解的形式可以作如下变换

$$z_{k+1} = e^{A(t_{k+1}-t_0)} z_0 + \int_{t_0}^{t_{k+1}} e^{A(t_{k+1}-\xi)} (BN(\xi) + H_1 F(\xi) + H_2 w(\xi)) d\xi = e^{A(k+1)\eta} z_0 + \int_0^{(k+1)\eta} e^{A((k+1)\eta-\xi)} (BN(\xi) + H_1 F(\xi) + H_2 w(\xi)) d\xi = e^{A\eta} (e^{A(k)\eta} z_0 + \int_0^{k\eta} e^{A(k\eta-\xi)} (BN(\xi) + H_1 F(\xi) + H_2 w(\xi)) d\xi) + \int_{k\eta}^{(k+1)\eta} e^{A((k+1)\eta-\xi)} (BN(\xi) + H_1 F(\xi) + H_2 w(\xi)) d\xi$$

$$H_1 F(\xi) + H_2 w(\xi) d\xi \approx e^{A\eta} z_k + \int_0^\eta e^{A\tau} d\tau (BN_k + H_1 F_k + H_2 w_k) = e^{A\eta} z_k + (e^{A\eta} - I)A^{-1}(BN_k + H_1 F_k + H_2 w_k) \quad (9)$$

所以对于存在干扰输入的振动系统,可以按照精细积分形式离散得到离散状态空间模型(2)和(3). 并且其初始条件为

$$z_0 = z(t_0) \quad (10)$$

3 待辨识参数及修正后系统差分方程的推导

本文讨论的参数识别问题可以描述如下:在系统方程(3)、(4)的约束下,求使代价函数(5)取得极小值的待辨识参数 q . 从系统量测方程(4)导出量测干扰 v_k 的表示形式,然后代入到代价函数(5)中;同时利用拉格朗日乘子法将系统动力学方程(3)代入到代价函数(5)中,把约束条件极值问题转化为无约束条件极值问题,整理得到

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} w_k^T Q w_k + \frac{1}{2} (y_k - Cz_k)^T R (y_k - Cz_k) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\eta} \right)^T \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\eta} \right) + \lambda_{k+1}^T (z_{k+1} - Tz_k - GN_k - HF_k - Dw_k) \right] \quad (11)$$

其中,独立变量为 z, λ, w . 完成上述代价函数 J 对 w_k 取最小,得到

$$w_k = Q^{-1} D^T \lambda_{k+1} \quad (12)$$

将关于过程干扰^[13]输入的表达式(12)代入到代价函数(11)中,整理得到

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{2} (y_k - Cz_k)^T R (y_k - Cz_k) + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\eta} \right)^T \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{\eta} \right) + \lambda_{k+1}^T (z_{k+1} - Tz_k - GN_k - HF_k) - \frac{1}{2} \lambda_{k+1}^T DQ^{-1} D^T \lambda_{k+1} \right] \quad (13)$$

要使上述代价函数(13)取得最小,则需要 J 的一阶变分为零,即 $\delta J = 0$, 所以

$$\delta J = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ [-C^T R (y_k - Cz_k) - T^T \lambda_{k+1}]^T \delta z_k + \lambda_{k+1}^T \delta z_{k+1} + \frac{\alpha}{2} (-q_{k+1} + q_k)^T \delta q_k + \frac{\alpha}{2} (q_{k+1} - q_k)^T \delta q_{k+1} + (z_{k+1} - Tz_k - GN_k - HF_k - DQ^{-1} D^T \lambda_{k+1})^T \delta \lambda_{k+1} - \lambda_{k+1}^T \delta GN_k - \lambda_{k+1}^T \delta HF_k \right\} = 0 \quad (14)$$

关于 N_k, F_k 的一阶变分可以描述如下

$$\delta N_k = \frac{\partial N_k}{\partial z_k} \delta z_k + \frac{\partial N_k}{\partial q_k} \delta q_k \quad \delta F_k = \frac{\partial F_k}{\partial z_k} \delta z_k + \frac{\partial F_k}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \quad (15)$$

由于 $\delta z_0 = 0, \delta q_0 = 0$, 并假定 $\delta z_N = 0, \delta q_N = 0$, 经过整理,可以得到代价函数的一阶变分表达式

$$\delta J = \sum_{k=1}^{N-1} \left\{ [-C^T R (y_k - Cz_k) + \lambda_k - (T + G \frac{\partial N_k}{\partial z_k})^T \lambda_{k+1}]^T \delta z_k + \left[\frac{\alpha}{\eta^2} (-q_{k+1} + 2q_k - q_{k-1}) - (G \frac{\partial F_k}{\partial q_k})^T \lambda_{k+1} \right] + (z_{k+1} - Tz_k - GN_k - HF_k - DQ^{-1} D^T \lambda_{k+1})^T \delta \lambda_{k+1} \right\} = 0 \quad (16)$$

由于 $\delta z_k, \delta q_k, \delta \lambda_{k+1}$ 为任意值,所以可以得到代价函数(13)极值的必要条件

$$C^T R (y_k - Cz_k) + (T + G \frac{\partial N_k}{\partial z_k})^T \lambda_{k+1} - \lambda_k = 0 \quad (17)$$

$$q_{k+1} = 2q_k - q_{k-1} - \frac{\eta^2}{\alpha} (G \frac{\partial N_k}{\partial q_k})^T \lambda_{k+1} \quad (18)$$

$$z_{k+1} = Tz_k + GN_k + HF_k + DQ^{-1} D^T \lambda_{k+1} \quad (19)$$

在实际计算过程中,忽略式(17)中的 λ_k (不影响实际结果,并使运算简化),因此整理式(17)、(18)、(19)得到关于待辨识参数的差分方程(6)以及考虑干扰的系统差分动力学方程(7).

系统的初始条件可以直接转化为方程(6)、(7)的初始值

$$z_0 = z(t_0), \quad q_0 = q_1 = const \quad (20)$$

因此,非线性系统待辨识参数的求解可以采取下节所述的计算策略

4 辨识系统参数的算法

(1) 对于每一组包含随机干扰的测量数据样本,采取如下计算步骤

A. 选定一个时间段 $[t_0, t_f]$, 正的加权系数 α , 系统的初值 z_0 , 并选取参数 $q_0 = q_1 = const$ 作为初始估计值;

B. 由 z_0 和 $q_0 = q_1 = const$ 利用系统约束方程式(7)求得 z_1 ;

C. 在选定的时间段 $[t_0, t_f]$ 内,同时计算方程式(6)、(7)得到时间段末端的待辨识参数 q_N ;

D. 将 q_N 作为 $const$, 重新计算过程 A、B 和 C;

E. 重复步骤 A、B、C 和 D, 直到待辨识的数值收敛到稳定的数值;

(2) 通过多组包含随机干扰的测量数据样本分

别计算对应的待辨识参数结果,并求其平均值作为系统模型参数的最终辨识值.

对于每一个包含干扰的数据样本的处理,求解过程是一个迭代过程.在选定的时间段内,式(6)、(7)在式(20)给定的初始条件下同时求解,并将末端的辨识值作为初始估计值重新计算,每次迭代之后都更加接近最终的稳定数值.对通过多组包含干扰的样本得到的参数识别结果取平均值,具有重要的物理意义^[16].

5 仿真算例

如图 1 所示为弹簧—阻尼—质量形式的四自由度非线性振动系统, M_1 上作用有正弦激励 F , M_2 与 M_3 之间除线性弹簧连接外,还有立方非线性弹簧.其中,系统参数为 $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 1\text{kg}$, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0.02\text{Ns/m}$, $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 10\text{N/s}$, $q_{23} = 100\text{N/s}^3$ (待辨识参数),非线性弹簧力的形式为

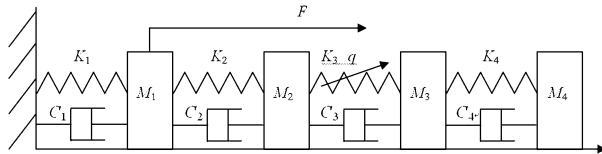


图 1 四自由度非线性振动系统

Fig. 1 Four-degree-of-freedom nonlinear vibration systems

$$N(x, \dot{x}, q) = q(x_2 - x_3)^3 \quad (21)$$

在确定条件下 ($\eta = 0.005\text{s}$, $t_f = 5\text{s}$, $\alpha = 1.0 \times 10^{-6}$),该非线性振动系统受到外部正弦激励力的作用,激励类型及辨识结果如表 1 所示(假定仿真过程中的随机干扰是具有相同的均值和方差的高斯白噪声(本文取 30 组随机样本),且加权矩阵 $Q = R = I$).

表 1 系统参数辨识结果

Table 1 Identification results

Types of excitation	Ideal condition		Gaussian white noise (0,0.001)		Gaussian white noise (0,0.003)	
	result	error	result	error	result	error
$f = 5\sin(t)$	100.04	0.04%	101.2410	1.2410%	98.5161	1.4839%
$f = 10\sin(1/5t)$	100.03	0.03%	100.6892	0.6892%	98.9493	1.0507%
$f = 15\sin(1/10t)$	100.03	0.03%	100.6689	0.6689%	98.9243	1.0757%

另外,对于同一组干扰样本,在其它参数相同的情况下,表 2 显示选取的计算时间段对于待辨识参数的收敛速度也有较大影响:当时间段选取的越长,即利用系统的采样数据越多,收敛到稳定数值的速度越快;反之,则比较慢.

表 2 待辨识参数收敛到稳定值的迭代次数与所选时间段的关系

Table 2 The relation between the iterative times and the time slice

Time slice	$t_f = 5\text{s}$	$t_f = 8\text{s}$	$t_f = 10\text{s}$
Iteration times	100	15	10

6 结论

本文所得到的关于待辨识参数的差分方程,是从离散变分原理导出的,故具有保结构的性质^[17].利用该差分方程迭代计算系统未知参数的值,由于避开了文献[14]中求解非线性微分方程的过程,提高了参数估计的计算速度;并且,对所取的时间段无严格要求,可充分利用系统运动的全部特征数据.同时对若干组包含随机干扰的样本对应的辨识结果取平均值,能够表征随机干扰的确定性特征.通过对不同的待辨识参数进行仿真,结果表明每一组包含随机干扰的数据样本对应的辨识结果不仅与文中提到的选取时间段有关,而且与采样时间间隔也有关,所选择的采样时间间隔越小,结果精度越高;同时收敛速度与加权系数 α 有关,加权系数在可变化的范围内,取值越小,收敛速度越快.

参 考 文 献

- B Hong, L P Pey, T Y Soh. Structural parameter identification using robust genetic algorithm optimization method, 45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Palm Springs, California, 2004, 19 ~ 22
- 钟学平. 非线性振动系统参数识别方法的研究. 浙江大学: 博士学位论文, 2007 (Zhong Xueping. Studies on parameters identification of nonlinear oscillatory system. Doctoral dissertation of Zhejiang university, 2007 (in Chinese))
- O Gottlieb, M Feldman. Parameter identification of nonlinear ocean mooring systems using the Hilbert transform. *Journal of offshore Mechanics and Arctic Engineering*, 1996, 118: 29 ~ 36
- M Raghavendrachar, A E Aktan. Flexibility by multireference impact testing for bridge diagnostics. *Journal of Structural Engineering*, 1992, 118 (8): 2186 ~ 2203
- J S Kang, S K Park, S Shin. Structural system identification in time domain using measured acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 288: 215 ~ 234
- G Kerschen, K Worden, Alexander F Vakakis, Past. Present and future of nonlinear system identification in structur-

- al dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2006, 20: 505 ~ 592
- 7 D H Zhou, Y X Sun, Y G Xi, Z J Zhang. Extension of friendland's separate-bias estimation to randomly time-varying bias of nonlinear systems. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 1993, 38(8): 1270 ~ 1273
- 8 C J Zhang, Robert R Bitmesd. Subspace system identification for training-based MIMO channel estimation. *Automatic*, 2005, 41:1623 ~ 1632
- 9 M Q Phan, J A Solbeck, L R Ray. A direct method for state-space model and observer/Kalman filter gain identification AIAA Guidance, navigation, and Control Conference and Exhibit, Providence, Rhode Island, 2004:16 ~ 19
- 10 曾威, 于德介. 一种基于小生境遗传算法的迟滞非线性系统参数识别方法. *动力学与控制学报*, 2004, 2(1): 82 ~ 86 (Zeng Wei, Yu Dejie. A parameter identification method based on a niche genetic algorithm for hysteretic nonlinear system. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(1): 82 ~ 86 (in Chinese))
- 11 彭解华, 彭卓. 2-自由度强非线性振动系统的参数识别. *动力学与控制学报*, 2007, 5(1): 54 ~ 57 (Peng Jiehua, Peng Zhuo. Parameter identification of strongly nonlinear vibration systems of 2-DOF. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 54 ~ 57 (in Chinese))
- 12 钟万勰, 吴志刚, 谭述军. 状态空间控制理论与计算. 北京: 科学出版社, 2007: 121 (Zhong Wanxie, Wu Zhigang, Tan Shujun. Space-state control theory and calculation. Beijing: Science Press, 2007: 121 (in Chinese))
- 13 W X Zhong. On precise integration method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, 163: 59 ~ 78
- 14 M Tadi, H Rabitz. Explicit method for parameter identification. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 1997, 20(3): 486 ~ 491
- 15 Jeffrey, B Burl. Linear optimal control: H_2 and H_∞ methods. Addison Wesley Longman, Inc, 1999: 237
- 16 林家浩, 张亚辉. 随机振动的虚拟激励法. 北京: 科学出版社, 2004 (Lin Jiahao, Zhang Yahui. Pseudo excitation method for random vibration, Beijing: Science Press, 2004 (in Chinese))
- 17 O Junge, J E Marsden, S Ober-Blobaum. Discrete mechanics and optimal control. Proceedings of the 16th IFAC World Congress, 2005

AN ITERATIVE PARAMETER IDENTIFICATION METHOD FOR NONLINEAR VIBRATION SYSTEMS BASED ON DISCRETE VARIATIONAL PRINCIPLE*

Liu Zhengshan¹ Wu Zhigang^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

(2. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China)

Abstract An iterative system identification scheme for the nonlinear vibration systems with random noise was presented. Firstly, for each sample of measured data with random disturbance, the derivative with respect to the unknown parameters was introduced into the cost function; then the difference equations for the unknown parameters were obtained by means of the discrete variational principle, and solved simultaneously with the revised constraint equations; thus, the to-be-identified parameters were guided from given initial conditions to their true numerical values with an iterative procedure. Secondly, for many data samples with random disturbance, the mean value of the to-be-identified parameters was obtained as the identification results. Finally, simulations for parameter identification of nonlinear vibration systems with four-degree-of-freedom were presented so as to verify the proposed algorithm. Numerical results demonstrate that the parameter identification technology is effective.

Key words parameter identification, nonlinear vibration, discrete variational principle, disturbance sample