

# 超混沌 Rössler 系统和超混沌 Lorenz 系统的全状态混合投影同步\*

张群娇

(武汉科技学院理学院, 武汉 430073)

**摘要** 用两种不同的方法 - 主动控制法和自适应控制法实现超混沌 Rössler 系统和超混沌 Lorenz 系统的异结构全状态混合投影同步,各自设计了不同的控制器,使得响应系统与驱动系统同步.当参数已知时,采用主动控制法,方法简单有效且不需要构造 Lyapunov 函数,实现同步的时间短;当系统参数部分未知或完全未知时,基于 Lyapunov 稳定性理论,给出自适应同步控制器的系统性设计过程和参数自适应律,使得系统间迅速达到同步.数值模拟验证了两种方法的有效性.

**关键词** 超混沌 Rössler 系统, 超混沌 Lorenz 系统, 主动控制, 自适应控制, 全状态混合投影同步

## 引言

近年来,混沌研究已是非线性科学领域的热点问题之一,而混沌的同步与控制由于其在物理、通信、信息科学、医学、生物工程等领域的巨大应用潜力和发展前途,已经引起广泛关注.自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了混沌控制的原理并在电路中得以实现以来<sup>[1,2]</sup>,人们提出了各种混沌控制方法,如,耦合同步,变结构同步,自适应方法,采样反馈方法,延迟反馈方法,Backstepping 方法,脉冲控制方法等<sup>[3-11]</sup>.这些方法讨论的大都是两个相同结构的混沌系统在不同初值时的同步,关于不同系统之间的同步研究相对较少,因为它们存在不同结构以及参数失配问题,然而在实际应用中特别是混沌系统的同步用于安全通信中,驱动系统与响应系统的结构有可能是不同的,因此最近也有一些学者们讨论了考虑异结构的同步问题<sup>[12-14]</sup>.

与低维混沌系统相比,超混沌系统具有更为复杂的动力学行为,其特点是至少在四维及更高维的非线性系统中具有两个或两个以上正的 Lyapunov 指数,它广泛存在于自然界、流体、生物、经济等一大类非线性系统的众多领域中,具有更高的保密性.因此研究超混沌系统的同步具有更重要的价值.而全状态混合投影同步(Full State Hybrid Projective Synchronization,简称 FSHPS)作为一种新的同步概念,是最近由胡等人提出来的<sup>[15,16]</sup>,常见的

完全同步,投影同步和反同步都是它的特例.相对来说,它是一种更广义的同步概念.

采用两种不同的方法实现超混沌 Rössler 系统和超混沌 Lorenz 系统的异结构全状态混合投影同步.当系统参数已知时,采用主动控制法;当参数部分未知或完全未知时,基于 Lyapunov 稳定性理论,设计自适应同步控制器和合适的未知参数的自适应律,也可实现它们的渐近同步.数值仿真验证了这两种方法的有效性.

## 1 问题的提出

驱动系统超混沌 Rössler 系统可描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a_1 x_1 + x_4 \\ \dot{x}_3 = b_1 + x_1 x_3 \\ \dot{x}_4 = -c_1 x_3 + d_1 x_4 \end{cases} \quad (1)$$

当  $a_1 = 0.25, b_1 = 3, c_1 = 0.5, d_1 = 0.05$  时,该系统是超混沌的.

响应系统超混沌 Lorenz 系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = b y_1 + c y_2 - y_1 y_3 + y_4 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -d y_3 + y_1 y_2 + u_3 \\ \dot{y}_4 = -r y_1 + u_4 \end{cases} \quad (2)$$

当  $a = 35, b = 7, c = 12, d = 3, r = 5$ ,且不受任何控制时(即  $u_i = 0$ ),这个系统也是超混沌的.这里  $u_i$  是

2008-12-02 收到第 1 稿,2008-12-30 收到修改稿.

\* 湖北省教育厅科学技术研究项目(Q20091706);国家自然科学基金资助项目(70771084)

待定的控制器.

**定义 1** 对于上述驱动响应系统,如果存在对角矩阵  $H = \text{diag}\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$  ( $h_i \neq 0, i = 1, 2, 3, 4$ ) 使得,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - Hx(t)\| = 0$ ,则称它们之间达到了全状态混合投影同步(full-state hybrid projective synchronization, 记为 FSHPS).

**注释:** 如果  $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h \neq 0$ ,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - h_i x_i(t)| = 0$ ,则称它们之间达到了文献[17]所提出的全状态投影同步(full-state projective synchronization, 记为 FSPS). 另外,完全同步、反同步分别是定义 1 中标量矩阵  $H$  依次取  $I_4$  和  $-I_4$  的特例,其中  $I_4$  是单位矩阵.

设误差  $e_i = y_i - h_i x_i$  ( $h_i \neq 0$ ),于是可得误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 + ae_2 - ah_1x_1 + (ah_2 + h_1)x_2 + h_1x_3 + u_1 \\ \dot{e}_2 = be_1 + ce_2 + e_4 + (bh_1 - h_2)x_1 + (c - a_1)h_2x_2 - y_1y_3 + (h_4 - h_2)x_4 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -de_3 + y_1y_2 - (d + x_1)h_3x_3 - h_3b_1 + u_3 \\ \dot{e}_4 = -re_1 - d_1e_4 - rh_1x_1 + c_1h_4x_3 - 2d_1h_4x_4 + d_1y_4 + u_4 \end{cases} \quad (3)$$

## 2 各种情形下的全状态混合投影同步

情形 1. 当两个系统的参数都已知时,选择控制器如下:

$$\begin{cases} u_1 = ah_1x_1 - (ah_2 + h_1)x_2 - h_1x_3 + v_1(t) \\ u_2 = (h_2 - bh_1)x_1 + (h_2a_1 - ch_2)x_2 + y_1y_3 + (h_2 - h_4)x_4 + v_2(t) \\ u_3 = (d + x_1)h_3x_3 - y_1y_2 + h_3b_1 + v_3(t) \\ u_4 = rh_1x_1 - c_1h_4x_3 + d_1h_4x_4 + v_4(t) \end{cases} \quad (4)$$

这里  $v_i(t)$  是关于误差变量  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 的函数输入信号,即

$$\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} \quad (5)$$

其中  $A$  是  $4 \times 4$  的实常数矩阵,关于矩阵  $A$  的选择有很多种可能性.不妨取

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & -1-c & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

将(4),(5),(6)代入(3)式,误差系统可简化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -ae_1 \\ \dot{e}_2 = be_1 - e_2 \\ \dot{e}_3 = -de_3 \\ \dot{e}_4 = -re_1 - e_4 \end{cases} \quad (7)$$

即误差系统(7)对应的特征值分别为  $-a, -1, -d, -1$ ,均小于 0. 由常微分方程的稳定性理论可得,当  $t \rightarrow \infty$  时,状态误差  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) 均收敛于零.从方程(7)出发,选取初值  $[e_1(0), e_2(0), e_3(0), e_4(0)] = [-1, -4, 3, 2]$ ,超混沌 Rössler 系统和超混沌 Lorenz 系统的异结构全状态混合投影同步的数值仿真结果见图 1.

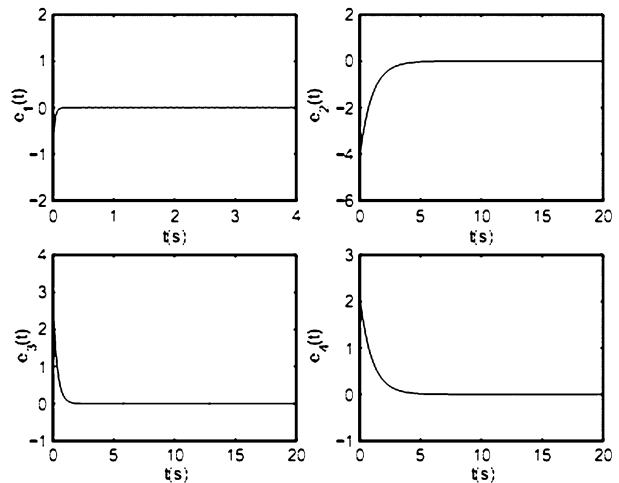


图 1 参数都已知时的同步误差图

Fig. 1 The synchronization errors with all known parameters

情形 2. 当系统(1)的参数未知而系统(2)的参数已知时,设计控制器

$$\begin{cases} u_1 = 35y_1 - 35y_2 - h_1x_3 - h_1x_2 - k_1e_1 \\ u_2 = h_2\hat{a}_1x_2 + y_1y_3 + h_2x_1 + h_2x_4 - 7y_1 - 12y_2 - y_4 - k_2e_2 \\ u_3 = h_3\hat{b}_1 - y_1y_2 + h_3x_1x_3 + 3y_3 - k_3e_3 \\ u_4 = \hat{d}_1h_4x_4 - \hat{c}_1h_4x_3 + 5y_1 - k_4e_4 \end{cases} \quad (8)$$

及参数自适应率

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}}_1 = -h_2x_2e_2 \\ \dot{\hat{b}}_1 = -h_3e_3 \\ \dot{\hat{c}}_1 = h_4x_3e_4 \\ \dot{\hat{d}}_1 = -h_4x_4e_4 \end{cases} \quad (9)$$

则未知参数的系统(1)与系统(2)是全状态混合投影同步的.这里  $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1$  分别是对  $a_1, b_1, c_1, d_1$

的估计,  $k_1, k_2, k_3, k_4$  是待定的正常数.

记  $\tilde{a} = \hat{a}_1 - a_1, \tilde{b}_1 = \hat{b}_1 - b_1, \tilde{c}_1 = \hat{c}_1 - c_1, \tilde{d}_1 = \hat{d}_1 - d_1$ ,  
令 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2) \quad (10)$$

由(1),(2),(8),(9)可得

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2 \leq 0 \quad (11)$$

由于  $\dot{V}$  是半负定的, 所以不能直接得出误差系统的原点是渐近稳定的. 因为  $\dot{V} \leq 0$ , 则

$$e_1, e_2, e_3, e_4 \in L_\infty \text{ 且 } \hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1 \in L_\infty.$$

又因为

$$\dot{e}_1, \dot{e}_2, \dot{e}_3, \dot{e}_4 \in L_\infty, \dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2$$

所以

$$\min\{k_1, k_2, k_3, k_4\} \int_0^t (e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2) \leq \int_0^t -\dot{V} dt = V(0) - V(t) \leq V(0)$$

所以  $e_1, e_2, e_3, e_4 \in L_2$ . 根据 Barbalat 引理知, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $e_i \rightarrow 0$ . 选取比例因子  $h_1 = 4, h_2 = -2, h_3 = -10, h_4 = 30$  和反馈系数  $k_1 = 1, k_2 = 10, k_3 = 23, k_4 = 84$ , 此时的同步误差仿真结果见图 2.

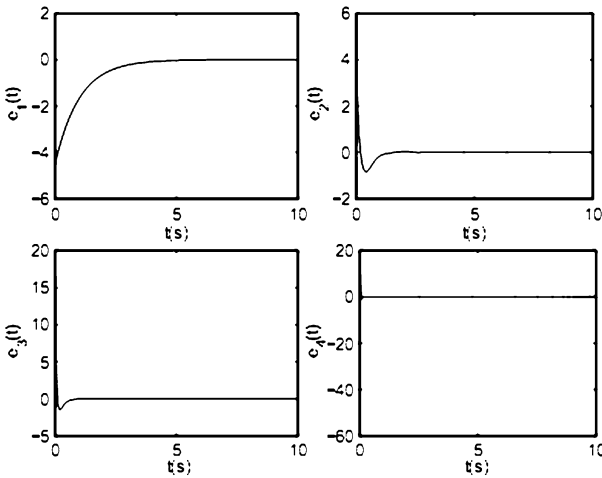


图2 系统(1)参数未知而系统(2)参数已知的同步误差图  
Fig.2 The synchronization errors with partly known parameters

情形3. 当系统(1)和系统(2)的参数都未知时, 选择控制器

$$\begin{cases} u_1 = -h_1 x_3 - h_1 x_2 - \hat{a}(y_2 - y_1) - k_1 e_1 \\ u_2 = h_2 x_1 - y_4 + y_1 y_3 - \hat{b} y_1 - \hat{c} y_2 + \hat{a}_1 h_2 x_2 + h_2 x_4 - k_2 e_2 \\ u_3 = h_3 \hat{b}_1 - y_1 y_2 + h_3 x_1 x_3 + \hat{d} y_3 - k_3 e_3 \\ u_4 = \hat{d}_1 h_4 x_4 - \hat{c}_1 h_4 x_3 + \hat{r} y_1 - k_4 e_4 \end{cases} \quad (12)$$

及参数自适应率

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = (y_2 - y_1) e_1 \\ \dot{\hat{b}} = y_1 e_2 \\ \dot{\hat{c}} = y_2 e_2 \\ \dot{\hat{d}} = -y_3 e_3 \\ \dot{\hat{r}} = -y_1 e_4 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = -h_2 x_2 e_2 \\ \dot{\hat{b}} = -h_3 e_3 \\ \dot{\hat{c}} = h_4 x_3 e_4 \\ \dot{\hat{d}} = -h_4 x_4 e_4 \end{cases} \quad (13)$$

则系统(1)与(2)会达到全状态混合投影同步. 这里  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{r}$  分别是对  $a, b, c, d$  的估计,  $\hat{a}_1, \hat{b}_1, \hat{c}_1, \hat{d}_1$  是对的估计,  $k_1, k_2, k_3, k_4$  是待定的正常数. 记,

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \hat{a} - a, \tilde{b} = \hat{b} - b, \tilde{c} = \hat{c} - c, \\ \tilde{d} &= \hat{d} - d, \tilde{r} = \hat{r} - r, \\ \tilde{a}_1 &= \hat{a}_1 - a_1, \tilde{b}_1 = \hat{b}_1 - b_1, \tilde{c}_1 = \hat{c}_1 - c_1, \\ \tilde{d}_1 &= \hat{d}_1 - d_1, \tilde{r}_1 = \hat{r}_1 - r_1 \end{aligned}$$

令 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + \tilde{a}^2 + \tilde{b}^2 + \tilde{c}^2 + \tilde{d}^2 + \tilde{r}^2 + \tilde{a}_1^2 + \tilde{b}_1^2 + \tilde{c}_1^2 + \tilde{d}_1^2) \quad (14)$$

类似于情形2的证明过程, 同理可得, 当  $t \rightarrow \infty$  时, 有  $e_i \rightarrow 0$ . 选取比例因子  $h_1 = 4, h_2 = 0.2, h_3 = -1, h_4 = -2$  和反馈系数  $k_1 = 10, k_2 = 5, k_3 = 12, k_4 = 16$ , 此时的同步误差图如图3所示.

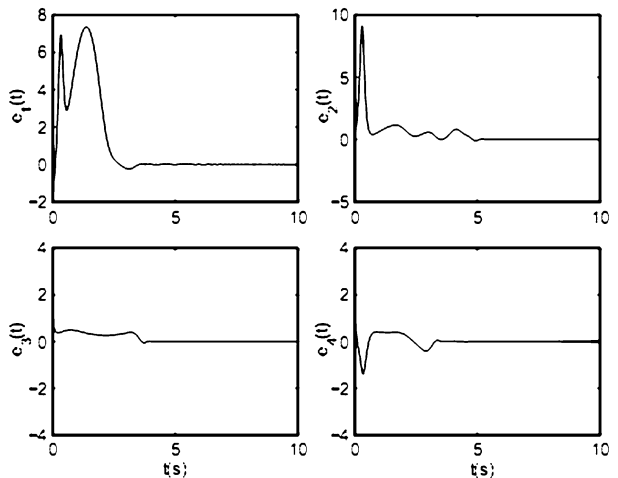


图3 系统参数均未知的同步误差图

Fig.3 The synchronization errors with all unknown parameters

### 3 结论

本文采用两种不同的方法实现了超混沌 Rössler 系统和超混沌 Lorenz 系统的异结构全状态混合投影同步. 主动控制设计的控制器简单, 并且容易实现. 但是该方法要求是系统参数已知的条件下实现同步. 而自适应同步法可以在参数部分或完全未知的情况下实现同步, 使得异结构超混沌系统之间达到渐近的全状态混合投影同步. 通过选择适当的比例因子参数以及反馈系数值, 数值模拟实验验证了所提出的方法是有效可行.

### 参 考 文 献

- 1 L M Pecora, T L Carroll. Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 ~ 824
- 2 T L Carroll, L M Pecora. Synchronization chaotic circuits. *IEEE Transactions On Circuits and Systems*, 1991, 38(4): 453 ~ 456
- 3 X Q Wu, J A Lu. Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2003, 18: 721 ~ 729
- 4 J A Lu, X Q Wu, J H. Lü. Synchronization of unified chaotic system and application in secure communication. *Physics Letters A*, 2002, 305: 365 ~ 370
- 5 S H Chen, J Lu. Synchronization of an uncertain unified chaotic system via adaptive control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2002, 14: 643 ~ 647
- 6 J A Lu, B X Huang, X Q Wu. Control of a unified chaotic system with delayed continuous periodic switch. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2004, 22: 229 ~ 236
- 7 蒋贵荣, 陆启韶, 钱临宁. 一类脉冲动力系统的状态反馈控制. *动力学与控制学报*, 2005, 3(4): 17 ~ 23 (Jiang Guirong, Lu Qishao, Qian Linning, State feedback control of a class of impulsive dynamic systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 17 ~ 23 (in chinese))
- 8 X Tan, J. Zhang, Y Yang. Synchronizing chaotic systems using backstepping design. *Chaos Solitons & Fractals*, 2003, 16(1): 37 ~ 45
- 9 高洁, 陆君安. 不确定参数下的四维超混沌 Lü 系统的最优同步. *动力学与控制学报*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (Gao jie, Lu Jun - an. Optimal synchronization of hyperchaotic Lü system with uncertain parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4(4): 320 ~ 325 (in chinese))
- 10 J A Lu, X Q Wu, X P Han, J Lu. Adaptive feedback synchronization of a unified chaotic system. *Physics Letters A*, 2004, 329(4-5): 327 ~ 333
- 11 S H Chen, Q Yang, C P Wang. Impulsive control and synchronization of unified chaotic system. *Chaos Solitons & Fractals*, 2004, 20: 751 ~ 758
- 12 宁娣, 陆君安. 一个临界系统与 Lorenz 系统和 Chen 系统的异结构同步. *物理学报*, 2005, 54: 4590 ~ 4596 (Ning Di, Lu Jun - an. Synchronization of a critical chaotic system with Lorenz system and Chen system. *Acta Physica Sinica*, 2005, 54: 4590 ~ 4596 (in chinese))
- 13 蔡国梁, 黄娟娟. 超混沌 Chen 系统和超混沌 Rossler 系统的异结构同步. *物理学报*, 2006, 55: 3997 ~ 4005 (Cai Guoliang, Huang Juanjuan. Synchronization for hyperchaotic Chen system and hyperchaotic Rossler system with different structure. *Acta Physica Sinica*, 2006, 55: 3997 ~ 4005 (in chinese))
- 14 王兴元, 王勇. 基于主动控制的三维自治混沌系统的异结构反同步. *动力学与控制学报*, 2007, 5(1): 13 ~ 17 (Wang Xingyuan, Wang Yong, Anti - synchronization of three - dimensional autonomous different - structural chaotic systems via active control. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(1): 13 ~ 17 (in chinese))
- 15 M Hu, Z Xu, R Zhang. Full state hybrid projective synchronization in continuous - time chaotic (hyperchaotic) systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(2): 456 ~ 464
- 16 M Hu, Z Xu, R Zhang, A Hu. Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyper - chaotic) systems. *Physics Letters A*, 2007, 361(3): 231 ~ 237
- 17 G Wen, D Xu. Nonlinear observer control for full - state projective synchronization in chaotic continuous - time systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 26: 71 ~ 77

# FULL STATE PROJECTIVE SYNCHRONIZATION OF HYPERCHAOTIC RÖSSLER SYSTEM AND HYPERCHAOTIC LORENZ SYSTEM \*

Zhang QunJiao

(*College of Science, Wuhan University of Science and Engineering, Wuhan 430073*)

**Abstract** Two different methods – active control method and adaptive method were presented to study the full state hybrid projective synchronization between hyperchaotic Rössler system and hyperchaotic Lorenz system with different structures. Three kinds of different controllers were designed for synchronizing drive system and response system. When the parameters are all known in advance, active control method is utilized, without constructing Lyapunov function, which can realize the synchronization easily. When the parameters are partly or fully unknown, suitable controllers and adaptive laws of parameters are given based on Lyapunov stability theory, which make the different systems achieve synchronization quickly. Numerical simulations show the effectiveness and feasibility of these methods.

**Key words** hyperchaotic Rössler system, hyperchaotic Lorenz system, active control, adaptive control, full state hybrid projective synchronization