

# 一类混沌系统的部分投影同步的稳定性判据\*

汪贺 贾贞

(桂林理工大学数理系, 桂林 541004)

**摘要** 研究了一类混沌系统的部分投影同步问题. 对于一类三维混沌系统提出了实现部分投影同步的稳定性判据, 用 Lyapunov 方法从理论上证明了结论. 该判据不仅可用于三维系统, 也可用于四维超混沌系统中两个变量的部分投影同步判别. 以混沌 Lorenz 系统和超混沌系统为例的数值仿真结果验证了稳定性判据的正确性和有效性.

**关键词** 混沌同步, 部分投影同步, 稳定性判据

## 引言

自然界和人类社会中广泛存在着混沌现象. 自 1963 年 E. N. Lorenz 发现混沌吸引子<sup>[1]</sup>以来, 人们对混沌现象有了广泛而深入的研究. 由于混沌运动具有初值的极其敏感性和长时间发展趋势的不可预测性, 过去人们认为混沌的同步非常困难, 然而 Pecora 和 Carroll 在 1990 年首次提出了混沌同步的思想, 并给出了一种混沌同步的有效方法 (PC 方法), 从此揭开了混沌同步研究的序幕<sup>[2]</sup>. 在随后的几年里, 人们尝试着用各种不同方法去实现混沌同步, 特别是借助现代控制论的方法取得了前所未有的成就, 先后提出了诸多混沌同步的方法, 如反馈方法, 自适应方法, 线性耦合方法, 变结构控制法, 反步设计法等等<sup>[3-7]</sup>. 随着混沌同步研究不断深入, 人们提出不同类型的混沌同步, 如完全同步或称精确同步 (CS), 相同步 (PS), 广义同步 (GS), 延迟同步 (LS), 互同步 (MS), 一致同步 (US) 等等<sup>[8]</sup>. 1999 年, Mainieri 和 Rehacek 在部分线性系统中观察到了投影同步 (Projective Synchronization) 现象<sup>[9]</sup>, 从此, 投影同步很快成为混沌同步研究的一个热点课题. 混沌系统的投影同步是指两个混沌系统的对应变量按照一定的比例关系线性地演化<sup>[10-13]</sup>, 它是一类特殊的广义同步现象.

本文针对两个三维部分线性的混沌系统提出了部分投影同步的稳定性判据, 给出两个恒同的三维混沌系统在部分变量的驱动下实现部分同步的

条件, 此判据也适用于四维混沌系统的部分投影同步判别. 用 Lyapunov 方法从理论上证明了结论的正确性, 数值仿真结果也验证了稳定性判据的有效性. 通过数值仿真, 还进一步探讨了部分投影同步比例因子与初值条件的依赖关系.

## 1 基本概念与模型描述

定义 1 系统  $\dot{u} = F(u)$  称为是部分线性的, 若此系统方程可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = M(z)x = f(x, z) \\ \dot{z} = g(x, z) \end{cases} \quad (1)$$

其中,  $u \in R^n (n \geq 3)$ ,  $u = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix}$ ,  $x \in R^s$ ,  $z \in R^{n-s}$ .  $f: R^n \rightarrow R^s$  和  $g: R^n \rightarrow R^{n-s}$  为连续可微向量函数,  $M(z)$  是关于变量  $z$  连续可微的矩阵函数.

注 1. 有许多典型的混沌系统可表示为部分线性系统, 例如 Lorenz 系统, Chen 系统, Lü 系统, 超混沌 Chen 系统, 超混沌 Lü 系统等等.

定义 2 设有两个恒同的混沌系统  $\dot{u}_m = F(u_m)$ ,  $\dot{u}_s = F(u_s)$ , 其中  $u_m, u_s \in R^n$  分别为两个系统的状态向量,  $F: R^n \rightarrow R^n$  为连续可微函数. 若存在非零常数  $\alpha$ , 使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\alpha u_m - u_s\| = 0$ , 则称这两个系统是投影同步的, 称  $\alpha$  为比例因子.

两个恒同系统实现了投影同步, 意味着这两个系统的状态向量的各分量都对应成比例, 即  $\frac{u_{mi}}{u_{si}} = \alpha (i = 1, \dots, n)$ . 若两个系统的状态向量的部分分量

对应成比例,即 $\frac{u_{mi}}{u_{si}} = \alpha (i = 1, \dots, j, j < n)$ ,则称两个系统实现了关于变量 $u_i$ 的部分投影同步.

设有两个形如(1)式的部分线性的混沌系统,以变量 $z$ 为驱动变量构成驱动-响应结构的耦合系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = M(z)x_m \\ \dot{z} = g(x_m, z) \\ \dot{x}_s = M(z)x_s \end{cases} \quad (2)$$

其中,下标 $m$ 代表驱动系统, $s$ 代表响应系统, $M(z)$ 是仅依赖于变量 $z$ 的矩阵.响应系统的状态变量 $x_s$ 通过驱动变量 $z$ 受控于驱动系统.

下面讨论(2)中的两个系统在变量的驱动下实现部分投影同步的稳定性判据.

## 2 部分投影同步的稳定性判据

考虑两个恒同的部分线性的三维系统, $\dot{u} = F(u)$ , $u = (x_1, x_2, z)^T$ ,取状态变量 $x_1, x_2$ 为部分同步变量,状态变量 $z$ 为驱动变量,构成驱动-响应结构的耦合系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = M(z)x_m \\ \dot{z} = g(x_m, z) \\ \dot{x}_s = M(z)x_s \end{cases} \quad (3)$$

其中, $x_m = (x_{m1}, x_{m2})^T$ , $x_s = (x_{s1}, x_{s2})^T$ , $M(z)$ 为:

$$M(z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

我们的目标是寻找系统(3)实现关于变量 $x_1, x_2$ 的部分投影同步的稳定性判据,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\alpha x_m - x_s\| = 0$ 成立的条件,它等价于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_{si}}{x_{mi}} = \alpha (i = 1, 2) \quad (4)$$

式(4)又可转换为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{m1}x_{s2} - x_{s1}x_{m2}) = 0 \quad (5)$$

于是,我们取误差向量 $e = x_{m1}x_{s2} - x_{s1}x_{m2}$ ,则误差系统为

$$\dot{e} = \dot{x}_{m1}x_{s2} + x_{m1}\dot{x}_{s2} - \dot{x}_{s1}x_{m2} - x_{s1}\dot{x}_{m2} \quad (6)$$

要实现投影同步只需要满足:当 $t \rightarrow \infty$ 时, $e \rightarrow \infty$ ,即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ .

**定理 1** 对于耦合系统(3),若满足 $\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$

$< 0$ ,则系统(3)可实现关于变量 $x_1, x_2$ 的部分投影同步.

证明:选取 Lyapunov 函数

$$V(t) = \frac{1}{2}e^2$$

显然, $V(t)$ 是正定的.

$V(t)$ 沿(8)的轨道对时间 $t$ 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e\dot{e} = e(\dot{x}_{m1}x_{s2} - x_{s1}\dot{x}_{m2} - \dot{x}_{s1}x_{m2} - x_{s1}\dot{x}_{m2}) = e \\ & \left[ \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_{m1}x_{s2} - x_{s1}x_{m2}) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(x_{m1}x_{s2} - x_{s1}x_{m2}) \right] = \\ & \left( \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \right) e^2 \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0$ ,则 $\dot{V}(t)$ 是负定的.由 Lyapunov 稳定性理论可知, $e$ 渐近趋向于0,即有 $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_{m1}x_{s2} - x_{s1}x_{m2}) = 0$ ,从而系统(3)实现了投影同步,定理1的结论成立.

定理1表明,当耦合系统(3)满足

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} < 0 \quad (7)$$

时,关于变量 $x_1, x_2$ 的部分投影同步存在且同步状态是稳定的.由于稳定性判据(7)仅仅依赖矩阵 $M(z)$ 对角线上的元素,因此只要矩阵 $M(z)$ 的迹是负的就能实现部分投影同步.这个判据对判断投影同步发生有一个明确的形式,此判据简单且易于应用.

注2.对于某些四维甚至更高维部分线性的混沌系统,稳定性判据(7)也是适用的.可适当的选取两个变量作为同步变量,而将其余变量作为驱动变量,在(7)式成立的条件下也能实现这两个变量的部分投影同步,下面我们将通过超混沌 Liu 系统的数值实验验证这一点.

## 3 实例与仿真

为了验证定理1的稳定性判据的正确性,下面分别以 Lorenz 系统和超混沌 Liu 系统为例,给出部分投影同步发生的条件,并通过数值仿真验证结论.

### 3.1 混沌 Lorenz 系统的部分投影同步判别

Lorenz 系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay \\ \dot{y} = (c - z)x - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (8)$$

当系统参数取值为  $a = 10, b = 8/3, c = 28$  时,

Lorenz 系统有一个混沌吸引子(图 1(a)).

由两个混沌 Lorenz 系统构成(3)形式的驱动

- 响应结构的耦合系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -ax_m + ay_m \\ \dot{y}_m = (c - z)x_m - y_m \\ \dot{z} = x_my_m - bz \\ \dot{x}_s = -ax_s + ay_s \\ \dot{y}_s = (c - z)x_s - y_s \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $M(z) = \begin{pmatrix} -a & a \\ c - z & -a \end{pmatrix}$ .

由稳定性判据(7)可知  $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = -a - 1 <$

0, 即当  $a > -1$  时, 系统(9)可实现关于变量  $x, y$  的

部分投影同步, 即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_m}{x_s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_m}{y_s} = \alpha$ .

### 3.2 超混沌 Lü 系统的部分投影同步判别

超混沌 Lü 系统描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + ay + v \\ \dot{y} = -xz + cy \\ \dot{z} = xy - bz \\ \dot{v} = xz + dv \end{cases} \quad (10)$$

其中  $a, b, c, d$  都是正的常数. 当系统的参数取  $a = 36, b = 3, c = 20, -0.35 < d \leq 1.3$  时, 系统是超混沌的, 其超混沌吸引子见图 1(b).

在超混沌 Lü 系统中, 选取  $z, v$  为驱动变量, 考察两个变量  $x, y$  的部分投影同步稳定性. 如(3)所描述的, 由两个超混沌 Lü 系统构成的驱动 - 响应结构的耦合系统方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -ax_m + ay_m + v \\ \dot{y}_m = -x_mz + cy_m \\ \dot{z} = x_my_m - bz \\ \dot{v} = x_my_m - bz \\ \dot{x}_s = -ax_s + ay_s + v \\ \dot{y}_s = -x_sz + cy_s \end{cases} \quad (11)$$

其中,  $M(z) = \begin{pmatrix} -a & a \\ -z & c \end{pmatrix}$ .

由稳定性判据(7)可知  $\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = -a + c <$

0, 即当  $a > c$  时, 系统(11)可实现关于变量  $x, y$  的

部分投影同步, 即有  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_m}{x_s} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_m}{y_s} = \alpha$ .

### 3.3 数值仿真

以下给出上面两例的数值仿真实验, 并进一步探讨部分投影同步对初值的依赖关系.

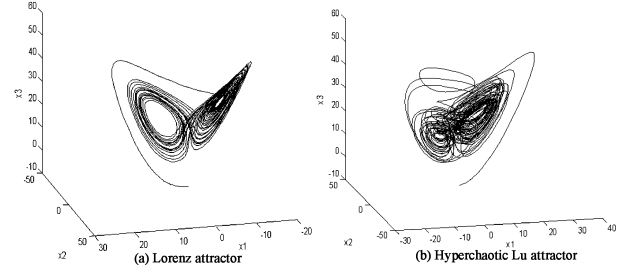


图 1 两个混沌吸引子在  $R^3$  上的相图

Fig. 1 Phase diagrams of two chaotic attractors in  $R^3$

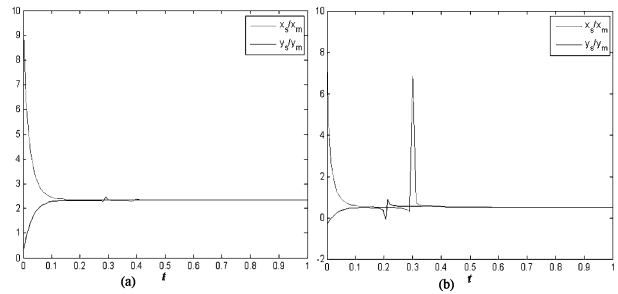


图 2 耦合系统(9)的比例因子随时间的演化图

(a) 初值取  $(1, 5, -5, 10, 1)^T$  时比例因子  $\alpha = 2.3442$ ;

(b) 初值取  $(1, 15, -5, 10, -5)^T$  时比例因子  $\alpha = 0.5187$

Fig. 2 The time evolution of the scaling factors in coupled system (9)

(a) The scaling factor when the initial value is  $\alpha = 2.3442$ ;

(b) The scaling factor when the initial value is  $\alpha = 0.5187$

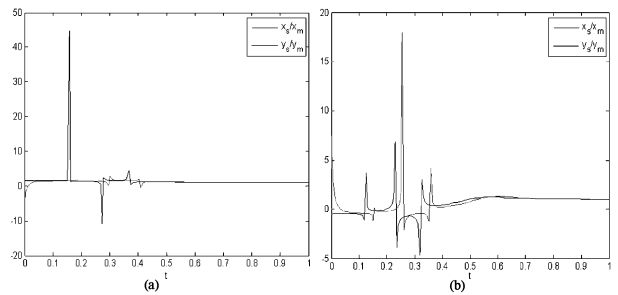


图 3 耦合系统(11)的比例因子随时间的演化图

(a) 初值取  $(1, 5, -5, 10, -5, 8)^T$  时比例因子  $\alpha = 0.9997$ ;

(b) 初值取  $(2, 10, -5, 15, 15, -5)^T$  时比例因子  $\alpha = 0.9561$

Fig. 3 The time evolution of the scaling factors in coupled system (11)

(a) The scaling factor when the initial value is  $\alpha = 0.9997$ ;

(b) The scaling factor when the initial value is  $\alpha = 0.9561$

图 1 分别是 Lorenz 系统和超 Lü 系统混沌吸引子在  $R^3$  上的相图. 图 2 是 Lorenz 系统比例因子随时间的演化图, 图中取参数  $a = 10, b = 8/3, c = 28$ , 其中  $a = 10 > -1$  满足稳定性判据, 由图 2 可见系统的两个变量成比例, 即  $x_s/x_m, y_s/y_m$  随着时间的

变化是迅速收敛到相应的比例因子,这表明 Lorenz 系统可实现关于变量的部分投影同步. 图 2(a) 和图 2(b) 分别取初始状态为:  $(x_m(0), y_m(0), z(0), x_s(0), y_s(0))^T = (1, 5, -5, 10, 1)^T$ ,  $(x_m(0), y_m(0), z(0), x_s(0), y_s(0))^T = (1, 15, -5, 10, -5)^T$ , 随着时间的变化比例因子分别收敛到: 2.3442 和 0.5187, 即不同的初始条件, 对应不同的比例因子, 这表明部分投影同步比例因子随着初值不同而不同. 图 3 是超混沌 Lü 系统比例因子随时间的演化图, 图中取参数  $a = 36, b = 3, c = 20, d = 1$ , 其中  $a > c$  满足稳定性判据, 由图 3 可见系统的两个变量成比例, 即  $x_s/x_m, y_s/y_m$  随着时间的变化是迅速收敛到相应的比例因子, 这表明超混沌 Lü 系统可实现关于变量  $x, y$  的部分投影同步. 图 3(a) 和图 3(b) 分别取初始状态为:  $(x_m(0), y_m(0), z(0), v(0), x_s(0), y_s(0))^T = (1, 5, -5, 10, -5, 8)^T$ ,  $(x_m(0), y_m(0), z(0), v(0), x_s(0), y_s(0))^T = (2, 10, -5, 15, 15, -5)^T$ , 随着时间的变化比例因子分别收敛到: 0.9997 和 0.9561. 说明不同的初始条件, 对应不同的比例因子, 即部分投影同步比例因子对初值具有依赖性.

注 3. 从以上的理论分析和实验结果可见, 对于 Lorenz 系统, 部分投影同步的实现只需满足:  $a > -1$ , 参数  $a$  对该系统部分投影同步实现起着关键作用, 参数  $b$  和  $c$  没有影响. 对超混沌 Lü 系统, 部分投影同步的实现只需满足:  $a > c$ , 参数  $a$  和  $c$  对该系统部分投影同步实现起着关键作用.

注 4. 由于混沌系统对初值的敏感依赖性, 不同的初值将对应不同的稳定同步状态, 即(3.1)式对不同的初始条件  $x_s(0), x_m(0), z(0)$ , 对应不同的比例因子  $\alpha$ , 这说明部分投影同步比例因子对初值具有依赖性.

## 4 结论

本文讨论了一类混沌系统的部分投影同步问题. 对于一类部分线性的三维混沌系统提出了实现部分投影同步的稳定性判据, 此结论还可用于四维超混沌系统中关于两个变量的部分投影同步的判断. 以 Lorenz 系统和超混沌 Lü 系统为例的数值仿真结果验证了稳定性判据的正确性和有效性. 研究表明, 一些系统参数对于实现系统部分投影同步起

着关键作用, 在 Lorenz 系统和超混沌 Lü 系统中分别只需满足  $a > 1$  和  $a < c$  部分投影同步就可实现. 并且部分投影同步的稳定轨道的比例因子对初值具有依赖性, 而这种依赖关系能否用一种函数关系来表达是我们今后要进一步探讨的问题.

## 参 考 文 献

- 1 Lorenz E N. Deterministic non-periodic flows. *J Atmos. Sci.*, 1963, 20: 130 ~ 141
- 2 Pecora LM, Carroll TL. Synchronization in chaotic system. *Phys. Rev. Lett.*, 1990, 64(8): 821 ~ 824
- 3 Chen G R, Dong X N. From chaos to order. Singapore: World Scientific, 1998
- 4 Huberman A. Dynamics of adaptive systems. *IEEE Transactions on CAS*, 1990, 37: 547 ~ 550
- 5 胡岗, 萧井华, 郑志刚. 混沌控制. 上海科技教育出版社, 2000 (Hu gang, Xiao jinhua, Zheng zhigang. Chaos control. Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, 2000 (in Chinese))
- 6 贾贞, 邓光明. 超混沌 Lü 系统的线性与非线性耦合同步. *动力学与控制学报*, 2007, 5(3): 220 ~ 223 (Jia zhen, Deng guangming. Linearly and nonlinearly coupled synchronization of hyperchaotic Lü systems. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(3): 220 ~ 223 (in Chinese))
- 7 Fang J Q, Hong Y G, Chen G R. Switching manifold approach to chaos synchronization. *Physical Review E*, 1999, 59(3): 2523 ~ 2526
- 8 Reggie B A. Unifying definition of synchronization for dynamical systems. *Chaos*, 2000, 10(2): 344 ~ 349
- 9 Mainieri R, Rehacek J. Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 1999, 82(15): 3042 ~ 5
- 10 Li Z G, Xu D L. Stability criterion for projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Physics Letters*, 2001, 282: 175 ~ 179
- 11 Jia Z, Lu J A. Generalized projective synchronization of a class of chaotic (hyperchaotic) systems. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems - Series B - Applications & Algorithms*, 2007, 14(S6): 223 ~ 226
- 12 Jia Z, Lu J A, et al. Generalized projective synchronization of a class of chaotic (hyperchaotic) systems with uncertain parameters. *Chinese Physics*, 2007, 16(5): 1246 ~ 1251
- 13 刘福才, 宋佳秋. 一类参数不确定混沌系统的广义同步. *动力学与控制学报*, 2008, 6(2): 130 ~ 133 (Liu Fu-

cai, Song Jiaqiu. Generalized synchronization for a class of chaotic systems with unknown parameters. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2): 130 ~ 133 (in Chinese)

## STABILITY CRITERION FOR PARTIALLY PROJECTIVE SYNCHRONIZATION IN A CLASS OF CHAOTIC SYSTEMS \*

Wang He Jia Zhen

(Department of Mathematics and Physics, Guilin University of Technology, Guilin 541004, China)

**Abstract** The partially projective synchronization of a class of chaotic systems was investigated. We presented a stability criterion for the partially projective synchronization in three – dimensional systems, which was proved theoretically via Lyapunov method. This criterion can be used not only in three – dimensional chaotic systems but also in four – dimensional hyper – chaotic systems for two – variables partially projective synchronization. Finally, some numerical simulations with the chaotic Lorenz system and the hyperchaotic Lü system were given to demonstrate the correctness and effectiveness of the stability criterion.

**Key words** chaotic synchronization, partially projective synchronization, stability criterion