第 7 卷第 2 期 2009 年 6 月
1672-6553/2009/07(2)/136-7

动 力 学 与 控 制 学 报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL

Vol. 7 No. 2
Jun. 2009

一类时滞系统 Hurwitz 稳定的简单判据*

李俊余[1]　王在华[1,2]

(1. 南京航空航天大学振动工程研究所,南京　210016)(2. 解放军理工大学理学院应用数理系,南京　211101)

摘要　近年来,Lambert W 函数已被成功的应用到时滞系统的稳定性分析中. 但由于 Lambert W 函数是一个超越方程的解,而且它的求解需要借助数学软件 Maple,Matlab 或 Mathematica 才能完成,因此在理解和应用上都有一定困难. 本文通过深入研究,首先利用初等函数描述了 Lambert W 函数根的分布情况,进而给出了一类时滞系统渐近稳定和鲁棒稳定的简单判据. 利用新的判据,原来可以用 Lambert W 函数来判定的时滞系统的稳定性问题,现在只需要用初等函数就可以解决.

关键词　Lambert W 函数,　稳定性,　时滞系统,　鲁棒稳定性

引 言

近几十年来,对时滞系统的研究取得了许多重要进展[1-5]. 一方面,由于能量传输或者信号传递和测量都需要时间,所以时滞系统在许多领域普遍存在[5-7,11];另一方面,时滞反馈控制在控制不稳定的平衡点,混沌,同步等有着广泛的应用[6-8]. 分析表明,时滞常常使系统品质变差,使系统失稳,并且一阶时滞系统都可以发生分岔而导致混沌等复杂的动力学现象[9,10]. 因此,稳定性分析是研究时滞系统的基础问题之一. 在实际应用中,还常常要求在所有可能的参数组合下,系统稳定性是鲁棒的.

稳定性分析方法主要有两类. 一类是 Lyapunov 函数(或 Lyapunov 泛函)法,包括线性矩阵不等式方法(LMI). 这类方法应用很普遍[4],但它给出的结果往往比较保守. 另一类方法是特征根分析法,常常可以得到比较精细的结果[3-5][12-15],它主要包括两种研究思路,一种是基于凸方法的概念和边界定理[12,13],另一种是基于频率反应图示和零点分离原则的图示法[14,15]. 前一种方法随着边界数目的增加计算的复杂性也随之增加,后一种比较直观,却很难用来判定鲁棒稳定性.

最近,人们将 Lambert W 函数成功地应用于一些特殊时滞系统的稳定性分析中,使系统的特征根可以由方程的系数来表示[16-18]. 为了说明这一点,我们不妨在复数域中考虑具有单个时滞的线性微分方程:

$$\dot{Z}=AZ(t)+BZ(t-\tau),(\tau>0,A,B\in\mathbb{C}^{n\times n})\tag{1}$$

其中 A,B 可同时被三角化,即存在可逆矩阵 $S\in\mathbb{C}^{n\times n}$和上(下)三角矩阵 T_A,T_B 使得

$$A=S^{-1}T_AS,\quad B=S^{-1}T_BS$$

系统平凡解 $Z=0$ 渐近稳定当且仅当下面的特征方程所有的根具有负实部

$$\det(\lambda I-A-Be^{-\lambda\tau})=\prod_{j=1}^{n}(\lambda-t_{jj}^A-t_{jj}^Be^{-\lambda\tau})$$

其中 $t_{jj}^A,t_{jj}^B(j=1,2,\cdots,n)$ 分别是 T_A,T_B 对角线上的元素. 实际问题中,很多系统的特征方程具有这种形式[19-22].

由于方程(1)的特征方程由多个形如 $\Delta(\lambda)$

$$\Delta(\lambda):=\lambda-p-qe^{-\lambda\tau},(\tau>0,p,q\in\mathbb{C})$$

的因式相乘得到,所以要判定系统(1)平凡解的稳定性,只需分析 $\Delta(\lambda)$ 的根的分布即可.

Lambert W 函数定义为超越方程 $We^W=z$ 的解,这样特征根可显式表示为

$$\lambda=\frac{1}{\tau}W(\tau qe^{-p\tau})+p.$$

尽管常用的数学软件都可以直接计算 Lambert W 函数的值,但是 Lambert W 函数是超越方程的解,这使得不熟悉 Lambert W 函数的读者理解起来比较困难. 本文的目的是通过深入研究 Lambert W

2008-10-28 收到第 1 稿,2008-12-10 收到修改稿.
* 国家杰出青年科学基金(10825207)、国家自然科学基金重点项目(10532050)和全国优秀博士学位论文作者专项基金项目资助

函数来建立易于理解的渐近稳定性和鲁棒稳定性判据.

本文的主要内容由三部分组成. 在下一节,我们将简单介绍 Lambert W 函数,并给出一个重要的引理. 在第二节中,基于初等函数的 $\Delta(\lambda)$ 渐近稳定和鲁棒稳定的新判据将被给出,并通过一个例子说明新判据的简单有效性. 最后是本文的总结.

1　Lambert W 函数根的分布

我们把满足 $W(z)e^{W(z)}$ 的函数称为 Lambert W 函数,这里 $W:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$,W 将 z 平面映射到 w 平面,即,$w=W(z)$.

Lambert W 函数是一个多值函数,它有无穷多个分支,我们通常把它的分支记为 $W_k(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$,每一个 $W_k(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 又都是一个单值函数. 各分支所在的区域可参见图 1. $W_0(z)$ 常被称为主支,它包含了实轴 $[-1,+\infty)$,并且当 $z\in[-e^{-1},+\infty)$ 时为实数. 图 2 与图 3 给出了 $W_0(z)$ 由 z 平面到 w 平面的映射,其中黑线代表 $+\pi$,虚线代表 $-\pi$,浅色的实线代表虚轴. Lambert W 函数的更多性质和应用可参考文献[16-18,23].

在稳定性分析中,下面的 Lambert W 函数各分支实部之间的关系非常重要[16]. 对于任意地 $z\in\mathbb{C}$,有

$$\max_{k=0,\pm1,\pm2\cdots} Re(W_k(z))=Re(W_0(z)) \qquad (2)$$

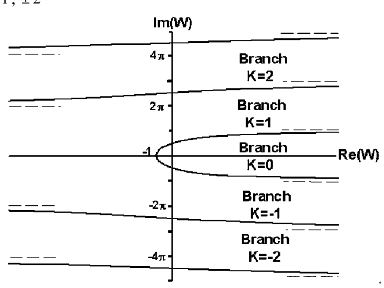

图 1　Lambert W 函数各个分支的所在区域

Fig. 1　The ranges of the branches of Lambert W function

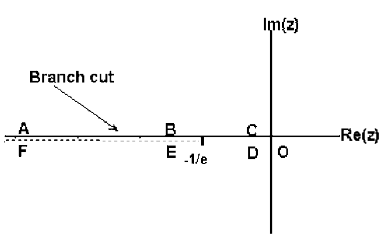

图 2　$W_0(z)$ 映射中的 z 平面

Fig. 2　The branch cut for $W_0(z)$ in z plane

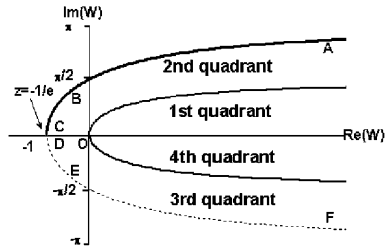

图 3　$W_0(z)$ 将 z 平面映射到 w 平面

Fig. 3　The mapping of $W_0(z)$ from z plane to w plane

由上面的结论,$\Delta(\lambda)$ Hurwitz 稳定当且仅当 $W_0^R(\tau q e^{-p\tau})<-\tau p^R$,其中,$W_0^R(z)$ 和 p^R 分别表示 $W_0(z)$ 和 p 的实部. 因此,要分析方程(1)的稳定性,只需获得 $W_0^R(z)<\xi_0(\xi_0\in\mathbb{R},z\in\mathbb{C})$ 的精确区域即可.

现在取 $z=re^{i\theta},r\geqslant0,\theta\in(-\pi,\pi],w=\xi+i\eta$,并假定 $r=0$ 时 $\theta=0$(如不做特别说明,后文中 z 与 w 均这样表示),则有下面的引理成立

引理 1　对固定的 $\xi_0\in\mathbb{R}$,$W_0^R(z)<\xi_0$ 当且仅当 $\xi_0\in(-1,+\infty)$,且

1) $r<\xi_0e^{\xi_0}$ 成立;或

2) $r\geqslant|\xi_0|e^{\xi_0}$ 和 $|\theta|>\phi(r,\xi_0)$ 同时成立.

这里 $\phi(r,\xi)=\arccos(\xi e^{\xi}r^{-1})+\sqrt{r^2e^{-2\xi}-\xi^2}$.

引理 1 的证明将在附录中给出.

当 $\xi_0=0$ 时,会有下面的推论:

推论 1　$W_0^R(z)<0$ 当且仅当 $|\theta|>r+\pi/2$.

由引理 1,容易给出由 $W_0^R(z)<\xi_0$ 确定的 $r-\theta$ 平面上的区域. 若取 $z=re^{i\theta}=x+iy$,则还可以得到其在 $x-y$ 平面上的区域. 图 4 与图 5 分别表示在 $r-\theta$ 和 $x-y$ 平面上由 $W_0^R(z)<2,W_0^R(z)<0,W_0^R(z)<-0.5$ 确定的区域.

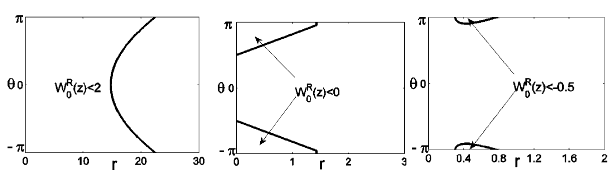

图 4　$W_0^R(z)<2,W_0^R(z)<0,W_0^R(z)<-0.5$ 在 $r-\theta$ 平面上的区域($z=re^{i\theta}$)

Fig. 4　The domains of $W_0^R(z)<2,W_0^R(z)<0,W_0^R(z)<-0.5$ in $r-\theta$ plane for $z=re^{i\theta}$

类似地,可以得到 $W_k^R(z)<\xi_0,(k=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 的条件:对固定的 $\xi_0\in\mathbb{R}$.

(1)当 $k=1,2,\cdots$ 时,$W_k^R(z)<\xi_0$ 当且仅当 $r\leqslant|\xi_0|$

e^{ξ_0}成立,或 $r > |\xi_0| e^{\xi_0}$和 $\theta > \phi(r, \xi_0) - 2k\pi$ 同时成立.

(2)当 $k = -1, -2, \cdots$时, $W_k^R(z) < \xi_0$ 当且仅当 $r < |\xi_0| e^{\xi_0}$,或 $r \geqslant |\xi_0| e^{\xi_0}$和 $\theta < -\phi(r, \xi_0) - 2k\pi$ 同时成立.

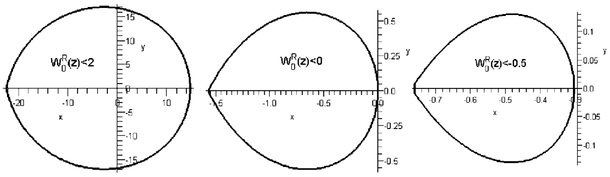

图 5 $W_0^R(z) < 2, W_0^R(z) < 0, W_0^R(z) < -0.5$ 在 $x - y$ 平面上的区域($z = x + iy$)

Fig. 5 The domains of $W_0^R(z) < 2, W_0^R(z) < 0, W_0^R(z) < -0.5$ in $x - y$ plane for $z = x + iy$

图 6 给出了 $w = W(z)$在 $r - \theta$ 平面不同区域内,分别当 $W^R(z) > 0, W^R(z) > -0.5, W^R(z) > 2$ 时根的个数.

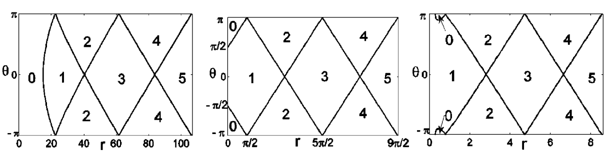

图 6 $w = W(z)$在 $r - \theta$ 平面不同区域内分别当 $W^R(z) > 0, W^R(z) > -0.5, W^R(z) > 2$ 时的根的个数

Fig. 6 The numbers of roots of $w = W(z)$ with $W^R(z) > 0$, $W^R(z) > -0.5, W^R(z) > 2$ respectively in $r - \theta$ plane

注 1:直接应用 $W_k^R(z) < \xi_0$ 的条件可以得到 $s = Ae^{-W(A/\alpha)}$在 $A - \alpha$ 平面内根的分布情况,其结果与文献[22]中利用 D – 划分法得到的结果一致.

2 新的稳定性判据

2.1 渐近稳定性

作为引理 1 的一个应用,我们有

定理 1 在 $\Delta(\lambda)$中记 $p = p^R + ip^I, q = q^r e^{iq^\theta}, q^r \geqslant 0, \vartheta = q^\theta - \tau p^I + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$ 满足 $\vartheta \in (-\pi, \pi]$,则 $\Delta(\lambda)$ Hurwitz 稳定当且仅当 $-p^R\tau \in (-1, +\infty)$,且

(1) $q^r < -p^R$ 成立;或

(2) 同时有 $q^r \geqslant |p^R|$和$|\vartheta| > \Theta(p^R, q^r)$成立.

这里 $\Theta(p^R, q^r) = \arccos(-p^R/q^r) + \tau\sqrt{(q^r)^2 - (p^R)^2}$.

证明:由方程(2),$\Delta(\lambda)$Hurwitz 稳定当且仅当

$$W^R(z) = W_0^R(r, \theta) = W_0^R(\tau q^r e^{-\tau p^R}, \vartheta) < 0.$$

由引理 1,命题得证.

注 2:一些文献中提出的稳定性判据是定理 1 的推论. 如方程(1)中,当 $A = 0$ 时,平凡解 $Z = 0$ 渐近稳定当且仅当对所有的 $j = 1, 2, \cdots, n$,满足 $t_{jj}^B\tau \in \{z \,|\, |\theta| > r + \pi/2, z = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in (-\pi, \pi]\}$ 这和文献[24]在 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$时得到的结果相同. 另外,定理 1 还可将 Hayes 定理[25]由实数域推广到复数域.

2.2 鲁棒稳定性

在实际工程中存在着各种不确定性,其中一类不确定性在用数学模型描述时,可描述为系统参数在一些确定的区间内变化,也就是所谓的区间系统[26],研究这类系统的鲁棒稳定性具有重要的实际意义.

下面来分析拟多项式 $\Delta(\lambda)$的鲁棒稳定性,设

$$p \in \Omega^p := \{p^R + ip^I \,|\, p^R \in [\underline{p}^R, \bar{p}^R], p^I \in [\underline{p}^I, \bar{p}^I]\}$$

$$q \in \Omega^q := \{q^r e^{iq^\theta} \,|\, q^r \in [\underline{q}^r, \bar{q}^r], q^\theta \in [\underline{q}^\theta, \bar{q}^\theta]\}$$

其中, $p = p^R + ip^I, q = q^r e^{iq^\theta}, \underline{p}^R \leqslant \bar{p}^R, \underline{p}^I \leqslant \bar{p}^I, 0 \leqslant \underline{q}^r \leqslant \bar{q}^r, \underline{q}^\theta \leqslant \bar{q}^\theta$. 用 C^{pq}表示 C_z^{pq} 的辐角,这里 $C_z^{pq} := \{z \,|\, p^I \in [\underline{p}^I, \bar{p}^I], q^\theta \in [\underline{q}^\theta, \bar{q}^\theta], z = \tau q e^{-p\tau}\}$. Shinozaki 和 Mori 给出了下面的结论[16]

引理 2 记 $\Lambda(p, q) := W_0^R(\tau q e^{-p\tau})/\tau + p^R$,则对所有的 $p \in \Omega^p, q \in \Omega^q$, $\Delta(\lambda)$鲁棒稳定当且仅当

(Ⅰ)若 C^{pq}穿过正实轴,

$\max\{\Lambda(\bar{p}^R, \underline{q}^r), \Lambda(\bar{p}^R, \bar{q}^r)\} < 0$;

(Ⅱ)若 C^{pq}不穿过正实轴,

$\max\{\Lambda(\bar{p}^R + i\underline{p}^I, \underline{q}^r e^{i\bar{q}^\theta}), \Lambda(\bar{p}^R + i\underline{p}^I, \bar{q}^r e^{i\bar{q}^\theta}),$

$\Lambda(\bar{p}^R + i\bar{p}^I, \underline{q}^r e^{i\underline{q}^\theta}), \Lambda(\bar{p}^R + + i\bar{q}^I, \bar{q}^r e^{i\underline{p}^\theta})\} < 0.$

需要指出的是,引理 2 中的条件(I)可以替换为 $\Lambda(\bar{p}^R, \bar{q}^r) < 0$. 事实上,由推论 1,

$W_0^R(z) = W_0^R(r, \theta) = W_0^R(\tau q^r e^{-\tau p^R}, 0) > 0$,

再由附录中引理 1 的证明可知, $W_0^R(\tau q^r e^{-\tau p^R}, 0)$关于 q^r 单调递增. 因此,根据 $\Lambda(p^R, q^r)$的定义,有

$$\max\{\Lambda(\bar{p}^R + \underline{q}^r), \Lambda(\bar{p}^R + \bar{q}^r)\} = \Lambda(\bar{p}^R + \bar{q}^r) \tag{3}$$

为了将引理 2 中的稳定性条件用初等函数来表示,取 $\underline{\vartheta} = \underline{q}^\theta - \tau\bar{p}^I + 2m\pi, \bar{\vartheta} = \bar{q}^\theta - \tau\underline{p}^I + 2n\pi$,这里 $m, n \in \mathbb{Z}$ 满足 $\underline{\vartheta}, \bar{\vartheta} \in (-\pi, \pi]$. 直接由定理 1 和引理 2 可以得到鲁棒 Hurwitz 稳定性的新判据

定理 2 对所有的 $p \in \Omega^p, q \in \Omega^q$, $\Delta(\lambda)$鲁棒稳

定当且仅当且 $-\bar{p}^R\tau \in (-1, +\infty)$

(Ⅰ)当 C^{pq}穿过正实轴,有 $\bar{q}^r < -\bar{p}^R$ 成立;

(Ⅱ)当 C^{pq}不穿过正实轴,下面的条件之一成立

1) $\bar{q}^r < -\bar{p}^R$;

2) $\underline{q}^r < -\bar{p}^R, \bar{q}^r \geq |\bar{p}^R|, \min\{|\underline{\vartheta}|, |\bar{\vartheta}|\} > \Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r)$;

3) $\underline{q}^r \geqslant |\bar{p}^R|, \min\{|\underline{\vartheta}|, |\bar{\vartheta}|\} > \max\{\Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r), \Theta(\bar{p}^R, \underline{q}^r)\}$

证明:(Ⅰ) C^{pq}穿过正实轴.

由定理 1,引理 2 及方程(3),此时 $\Delta(\lambda)$鲁棒稳定当且仅当 $\Lambda(\bar{p}^R, \bar{q}^r) = W_0^R(\tau\bar{q}^r e^{-\tau\bar{p}^R}) < -\bar{p}^R\tau$,即 $\bar{q}^r < -\bar{p}^R$.

(Ⅱ) C^{pq}不穿过正实轴.

记:

$\Lambda_1 := \Lambda(\bar{p}^R + i\underline{p}^I, \underline{q}^r e^{i\bar{q}\theta})$, $\Lambda_2 := \Lambda(\bar{p}^R + i\underline{p}^I, \bar{q}^r e^{i\bar{q}\theta})$,

$\Lambda_3 := \Lambda(\bar{p}^R + i\bar{p}^I, \underline{q}^r e^{i\underline{q}\theta})$, $\Lambda_4 := \Lambda(\bar{p}^R + i\bar{p}^I, \bar{q}^r e^{i\underline{q}\theta})$,

由引理 2,$\Delta(\lambda)$鲁棒稳定当且仅当 $\Lambda_i < 0, (i = 1, 2, 3, 4)$,下面分三种情况讨论

1) $\bar{q}^r < -\bar{p}^R$

显然此时有 $\underline{q}^r < -\bar{p}^R$,由定理 1,

$\Lambda_i < 0, (i = 1, 2, 3, 4)$成立.

2) $\underline{q}^r < -\bar{p}^R$ 且 $\bar{q}^r \geq |\bar{p}^R|$

$\underline{q}^r < -\bar{p}^R$ 意味着 $\Lambda_1 < 0, \Lambda_3 < 0$,而由定理 1,$\Lambda_2 < 0$ 和 $\Lambda_4 < 0$ 当且仅当 $|\underline{\vartheta}| > \Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r)$ 和 $|\bar{\vartheta}| > \Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r)$ 同时成立,即

$\min\{|\underline{\vartheta}|, |\bar{\vartheta}|\} > \Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r)$.

3) $\underline{q}^r \geq |\bar{p}^R|$

类似于上面的讨论,$\Lambda_i < 0$ 对所有的 $i = 1, 2, 3, 4$ 成立当且仅当

$\min\{|\underline{\vartheta}|, |\bar{\vartheta}|\} > \max\{\Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r), \Theta(\bar{p}^R, \underline{q}^r)\}$.

证明完毕.

注 3:定理 2 说明当 $-\bar{p}^R\tau \in (-1, +\infty)$,且 $\bar{q}^r < -\bar{p}^R$ 时,不论 C^{pq}是否穿过正实轴,$\Delta(\lambda)$都具有鲁棒稳定性.

下面我们利用定理 2 来讨论文献[16]中的一个例子,我们将会发现定理 2 用起来比引理 2 更方便.

例 1　利用定理 2 分析当 $p^R \in [-0.08, 0.02]$, $p^I \in [-6, -5]$, $q^r \in [0.5, 1.5]$, $q^\theta \in [0.8, 1.5]$ 时,$\Delta(\lambda)$的鲁棒稳定性.

首先 $\underline{q}^r = 0.5 > 0.02 = |\bar{p}^R|$,且当 $\tau \in (0, 0.7633]$ 时 C^{pq}不穿过正实轴,因此我们只需要检验定理 2 中条件Ⅱ(3)即可. 又 $\Theta(\bar{p}^R, \bar{q}^r) = \Theta(\bar{p}^R, \underline{q}^r)$ 和 $|\underline{\vartheta}| = |\bar{\vartheta}|$ 时分别得到 $\tau = 0.02667$ 和 $\tau = 0.3618$,下面分三种情况

(i)　$\tau \in (0, 0.02667]$,此时由条件Ⅱ(3)

$$0.8 + 5\tau > \arccos(-0.02/0.5) + \tau\sqrt{0.5^2 - 0.02^2}$$

即 $\tau > \dfrac{\arccos(-0.02/0.5) - 0.8}{5 - \sqrt{0.5^2 - 0.02^2}} = 0.1802$

这与 $\tau \in [0, 0.02667]$ 相矛盾.

(ii)　$\tau \in [0.02667, 0.3618]$,条件Ⅱ(3) 等价于

$$0.8 + 5\tau > \arccos(-0.02/1.5) + \tau\sqrt{1.5^2 - 0.02^2}$$

即 $\tau > \dfrac{\arccos(-0.02/1.5) - 0.8}{5 - \sqrt{1.5^2 - 0.02^2}} = 0.2240$

则 $\Delta(\lambda)$在 $\tau \in (0.2240, 0.3618]$ 上鲁棒稳定.

(iii)　$\tau \in (0.3618, 0.7633]$,条件Ⅱ(3)等价于

$$2\pi - 1.5 - 6\tau > \arccos(-0.02/1.5) + \tau\sqrt{1.5^2 - 0.02^2}$$

即 $\tau < \dfrac{-\arccos(-0.02/1.5) - 1.5 + 2\pi}{6 + \sqrt{1.5^2 - 0.02^2}} = 0.4265$

则 $\Delta(\lambda)$在 $\tau \in (0.3618, 0.4265)$ 上鲁棒稳定.

综上所述,$\Delta(\lambda)$在 $\tau \in (0.2240, 0.4265)$ 上鲁棒稳定,包含文献[16]中得到的 $\tau \in [0.23, 0.42]$.

3　结论

在本文中,通过深入研究 Lambert W 函数,对固定的实数 ξ_0,得到了 $W_0^R(z) < \xi_0$ 的初等函数判据. 进而针对一类时滞系统,得到了渐近稳定性和鲁棒稳定性的简单判据. 利用新的判据,以往可以用 Lambert W 函数判定稳定性的时滞系统,现在只需要通过计算简单的初等函数就可以判定. 新判据包含已有的一些判据,并期望找到更广泛的应用.

附录:引理 1 的证明

为了证明引理 1,先给出下面三个引理.

引理 3[16] 用 $W_0(r, \theta)$表示 $W_0(re^{i\theta})$,若 $r \geqslant 0, \theta \in (-\pi, \pi]$,则 $W_0(r, \theta)$在 B_0 的补集 B_0^C 上解析,

其中 $B_0:=\{(r,\theta)e^{-1}\leqslant r<+\infty,\theta=\pi\}$. 另外,$W_0^R(r,\theta)$ 关于 θ 在 $\theta\in(-\pi,0]$ 上单调递增,在 $\theta\in[0,\pi]$ 上单调递减.

引理4 Lambert W 函数在其主支上成立:

$$\theta\in(-\pi,0)\Leftrightarrow\eta\in(-\pi,0)\Leftrightarrow\theta-\eta\in(-\pi,0)$$

$$\theta\in[0,\pi]\Leftrightarrow\eta\in[0,\pi)\Leftrightarrow\theta-\eta\in[0,\pi]$$

证明:首先,W_0 所包含的区域为[20]

$$\{(\xi,\eta):\xi\geqslant-\eta\cot\eta,\eta\in[0,\pi)\}$$
$$\cup\{(\xi,\eta):\xi>-\eta\cot\eta,\eta\in(-\pi,0)\}$$

其中在 $\eta=0$, $-\eta\cot\eta$ 取极限值 -1. 将 $z=re^{i\theta}$, $w=\xi+i\eta$ 代入 $we^w=z$ 并分离实虚部,得:

$$r\cos\theta=e^{\xi}(\xi\cos\eta-\eta\sin\eta)$$
$$r\sin\theta=e^{\xi}(\eta\cos\eta+\xi\sin\eta)\tag{4}$$

用反证法. 当 $\theta\in[0,\pi]$ 时,由(4)式得,$\eta\cos\eta\geqslant-\xi\sin\eta$. 而若 $\eta\in(-\pi,0)$,则有 $-\sin\eta>0$,即 $\xi\leqslant-\eta\cos\eta$,这与 W_0 所包含的区域相矛盾,从而 $\theta\in[0,\pi]\Rightarrow\eta\in[0,\pi)$. 同理 $\theta\in(-\pi,0)\Rightarrow\eta\in(-\pi,0)$,进而有

$$\theta\in(-\pi,0)\Leftrightarrow\eta\in(-\pi,0),$$
$$\theta\in[0,\pi]\Leftrightarrow\eta\in[0,\pi).$$

由方程组(4)我们还可以得到

$$\eta[\eta-re^{-\xi}\sin(\theta-\eta)]=0$$

即,$\eta=0$ 或

$$\sin(\theta-\eta)=\begin{cases}\eta e^{\xi}r^{-1}, & r\neq0\\ 0 & r=0\end{cases}\tag{5}$$

由(4)式,$\eta=0$ 意味着 $r\sin\theta$,即 $r=0$ 或 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$. 其中当 $\theta=0$ 或 $\theta=\pi$ 时分别有 $\theta-\eta=0$ 和 $\theta-\eta=\pi$;而 $r=0$ 意味着 $W_0(0)=0$,即 $\theta=\eta=\theta-\eta=0$.

当 $\eta\neq0$, $r\neq0$ 时,由于 $\theta-\eta\in(-\pi,\pi]$,且 $e^{\xi}r^{-1}>0$,则由(5)式

$$\eta\in(-\pi,0)\Leftrightarrow\theta-\eta\in(-\pi,0),$$
$$\eta\in[0,\pi)\Leftrightarrow\theta-\eta\in[0,\pi]$$

证毕!

引理5 记 η_0^* 为 $\xi_0=-\eta\cot\eta,\eta\in(0,\pi)$ 在 $\xi_0\in(-1,+\infty)$ 时的唯一解,则当 $r\geqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 时,

(Ⅰ) $W_0^R(z)\geqslant\xi_0$ (Ⅱ) $\phi(r,\xi_0)\geqslant\pi$

证明:首先由 $W_0(z)$ 在 w 平面上的区域,当 $W_0^R(z)=\xi_0$ 时有 $-\eta_0^*<\eta_0\leqslant\eta_0^*$ 成立,即

$$|\xi_0|e^{\xi_0}\leqslant r\leqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$$

(Ⅰ) 由引理3,对任意固定的 $r>0$, $W_0^R(r,\theta)\geqslant\xi_0$ 当且仅当 $W_0^R(re^{i\pi})\geqslant\xi_0$. 注意到当 $r=e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 时,$W_0^R(re^{i\pi})=\xi_0$,则如果能够证明 ξ 关于 r 在 $r\geqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 及 $\theta=\pi$ 上单调递增,即可证明(Ⅰ). 下面我们证明之.

事实上,由 η_0^* 的定义可得

$$r\geqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}=$$
$$e^{\xi_0}\sqrt{(\eta_0^*)^2(\cot\eta_0^*)^2+(\eta_0^*)^2}=$$
$$e^{\xi_0}\frac{\eta_0^*}{\sin\eta_0^*}>e^{\xi_0}>e^{-1}$$

根据 Lambert W 函数的性质,$W_0(z)$ 仅当 z 属于 $[-e^{-1},+\infty)$ 时为实数,由引理4,$\theta>0$ 与 $r>e^{-1}$ 意味着 $\eta\in(0,\pi)$,因此,存在 $\varepsilon>0$,在 $\theta\in(\pi-\varepsilon,\pi)$ 上,$W_0(z)$ 解析且 $\eta>0$,从而

$$\mathrm{Im}\left(\frac{dW_0(z)}{dr}\right)=\frac{\eta}{r(1+\xi)^2+\eta^2}>0$$

又因为 $W_0(r,\theta)$ 在 $\theta=\pi$ 处连续,所以当 $\theta=\pi$ 时,η 关于 r 在 $r\geqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 上单调递增.

另外,由方程组(4),当 $r\geqslant e^{-1}$ 时,$\theta=\pi$ 等价于 $\xi=-\eta\cot\eta$. 记 $\xi(\eta):=-\eta\cot\eta,\eta\in(0,\pi)$,有

$$\xi'(\eta)=\frac{\eta-\sin\eta\cos\eta}{(\sin\eta)^2}>\frac{\eta-\sin\eta}{(\sin\eta)^2}>0$$

即 ξ 关于 η 在 $\eta\in(0,\pi)$ 上单调递增. 进而,当 $\theta=\pi$ 时,ξ 关于 r 在 $r\geqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 上单调递增.

(Ⅱ) 记 $\phi(r):=\phi(r,\xi_0)$,则有

$$\phi'(r)=\frac{r^2+\xi_0e^{2\xi_0}}{re^{\xi_0}\sqrt{r^2-\xi_0^2e^{2\xi_0}}}>$$
$$\frac{e^{2\xi_0}[\xi_0^2+(\eta_0^*)^2]+\xi_0e^{2\xi_0}}{re^{\xi_0}\sqrt{r^2-\xi_0^2e^{2\xi_0}}}=$$
$$\frac{e^{2\xi_0}\eta_0^*[\eta_0^*-\sin\eta_0^*\cos\eta_0^*]}{re^{\xi_0}(\sin\eta_0^*)^2\sqrt{r^2-\xi_0^2e^{2\xi_0}}}>$$
$$\frac{e^{2\xi_0}\eta_0^*[\eta_0^*-\sin\eta_0^*]}{re^{\xi_0}(\sin\eta_0^*)^2\sqrt{r^2-\xi_0^2e^{2\xi_0}}}>0$$

因为当 $r=e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 时,$\theta=\pi$;由上式,当 $r\geqslant e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2+(\eta_0^*)^2}$ 时,$\phi(r,\xi_0)\geqslant\pi$ 成立.

引理5证毕.

下面我们开始引理1的证明.

首先,$W_0^R(z)\geqslant-1$ 决定了如果存在 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $W_0^R(z)<\xi_0$,必有 $\xi_0\in(-1,+\infty)$. 分两种情况讨论:

<1>　$r < |\xi_0| e^{\xi_0}$

(i)　$r < -\xi_0 e^{\xi_0}$（注意到此时 $\xi_0 \in (-1,0)$）

首先，$r < -\xi_0 e^{\xi_0}$ 意味着 $r \in [0, e^{-1})$，从而 $W_0(re^{i\pi})$ 为实数，即 $\eta = 0$. 将 $\theta = \pi$ 与 $\eta = 0$ 代入(4)式得 $r = -\xi e^{\xi}$. 作为 $r = -\xi e^{\xi}$ 的反函数，ξ 在 $\theta = \pi$ 时关于 r 在 $r \in [0, e^{-1})$ 上单调递增. 则

$$W_0^R(re^{i\pi}) > W_0^R(-\xi_0 e^{\xi_0} e^{i\pi}) = W_0^R(\xi_0 e^{\xi_0}) = \xi_0$$

进一步由引理 3，$W_0^R(re^{i\pi}) > \xi_0$ 当且仅当对任意的 $\theta \in (-\pi, \pi]$，有 $W_0^R(re^{i\theta}) > \xi_0$.

(ii)　$r < \xi_0 e^{\xi_0}$（注意到此时 $\xi_0 \in (0, +\infty)$）

首先，若 $r = 0$，有 $W_0^R(0) = 0 < \xi_0$. 下面取 $r \neq 0$ 且 $\theta \neq \pi$，由 $W_0(z)$ 的解析性有

$$\mathrm{Re}\left(\frac{dW_0(z)}{dr}\right) = \frac{\xi^2 + \xi + \eta^2}{r((1+\xi)^2 + \eta^2)}$$

由方程(5)，$\theta = 0$ 意味着 $\eta = 0$，将 $\theta = 0$ 与 $\eta = 0$ 代入 $\cos(\theta - \eta) = \xi e^{\xi} r^{-1}$，得到 $\xi > 0$，从而，当 $\theta = 0$ 时，$W_0^R(r, \theta)$ 关于 r 单调递增. 所以，$r < \xi_0 e^{\xi_0}$ 意味着 $W_0^R(r) < W_0^R(\xi_0 e^{\xi_0}) = \xi_0$. 再由引理 3，$W_0^R(r) < \xi_0$ 当且仅当对任意的 $\theta \in (-\pi, \pi]$，有 $W_0^R(re^{i\theta}) < \xi_0$.

<2>　$|\xi_0| e^{\xi_0} \leqslant r < e^{\xi_0}\sqrt{\xi_0^2 + (\eta_0^*)^2}$

首先由方程组(4)得，$\cos(\theta - \pi) = \xi e^{\xi} r^{-1}$，则当 $\xi = \xi_0$ 时，由引理 4 有

$$\theta = \begin{cases} \phi(r, \xi_0), & \theta \in [0, \pi] \\ -\phi(r, \xi_0), & \theta \in (-\pi, 0) \end{cases}$$

然后由引理 3，$W_0^R(z) < \xi_0$ 当且仅当 $|\theta| > \phi(r, \xi_0)$，$\theta \in (-\pi, \pi]$.

结合引理 5，引理 1 证毕.

参 考 文 献

1 R Bellman, K L Cooke. Differential Difference Equations. Academic Press, New York, 1963

2 G Stepan. Retarded Dynamical Systems: Stability and Characteristic Functions. Essex: Longman Scientific & Technical, New York, 1989

3 Y Kuang. Delay Differential Equation with Application to Population Dynamics. Academic Press, San Diego, CA, 1993

4 S I Niculescu. Delay Effects on Stability: A Robust Control Approach. Springer－Verlag, London, 2001

5 H Y Hu, Z H Wang. Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed Feedback. Springer－Verlag, Berlin, 2002

6 胡海岩，王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展. 力学进展，1999，29：501～512（H Y Hu and Z H Wang. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays. *Advances in Mechanics*, 1999, 29: 501～512 (in Chinese)）

7 徐鉴，裴利军. 时滞系统动力学近期研究进展与展望. 力学进展，2006，36：17～30（J Xu, L J Pei. Advances in dynamics for delayed systems. *Advances in Mechanics*, 2006, 36: 17～30 (in Chinese)）

8 A Jnifene. Active vibration control of flexible structures using delayed position feedback. *Systems & Control Letters*, 2007, 56: 215～222

9 H L Wang, H Y Hu. Bifurcation analysis of a delayed dynamic system via method of multiple scales and shooting technique. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2005, 15: 425～450

10 X Xu, H Y Hu, H L Wang. Stability, bifurcation and chaos of a delayed oscillator with negative damping and delayed feedback control. *Nonlinear Dynamics*, 2006, 49: 117～129

11 H Y Hu, Z Q Wu. Stability and Hopf bifurcation of four－wheel－steering vehicles involving driver's delay. *Nonlinear Dynamics*, 2000, 22: 361～374

12 V L Kharitonov, S I Niculescu. On the stability of linear systems with uncertain delay. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2003, 48: 127～132

13 Z H Wang, H Y Hu, T Küpper. Robust hurwitz stability test for linear systems with uncertain commensurate time delays. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2004, 49: 1389～1393

14 M Fu, A W Olbrot, M P Polis. Robust stability for time－delay systems: the edge theorem and graphical tests. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1989, 34: 813～820

15 S Mondie, J Santos, V L Kharitonov. Robust stability of quasi－polynomials and the finite inclusions theorem. *IEEE Transactions Automatic Control*, 2005, 50: 1826～1831

16 H Shinozaki, T Mori. Robust stability analysis of linear time－delay systems by Lambert W function: some extreme point results. *Automatica*, 2006, 42: 1791～1799

17 R M Corless, G H Gonnet, D E G Hare, D J Jeffrey, D E Knuth. On the Lambert W function. *Advances in Computational Mathematics*, 1996, 5: 329～359

18 E Jarlebring K Damm. The Lambert W function and the spectrum of some multidimensional time－delay system. *Automatica*, 2007, 43: 2124～2128

19 C M Marcus R M Westervelt. Stability of analog neural networks with delay. *Physical Review A*, 1989, 39: 347～359

20 K Ikeda. Multiple – valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity. *Optics Communications*, 1979, 30: 257 ~ 261

21 R Lang K Kobayashi. External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties. *IEEE Journal of Quantum Electron*, 1980, 16: 347 ~ 355

22 A E Dubinov, I D Dubinova, S K Saikov. Characteristic roots and stability domains of one dynamic delay system. *Automation and Remote Control*, 2005, 66: 1212 ~ 1213

23 王京祥，王在华. 时滞状态反馈控制系统的稳定性增益区域. 动力学与控制学报，2008, 6(4): 301 ~ 306 (J X Wang, Z H Wang. Stable region of the feedback gains in a controlled system with delayed feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(4): 301 ~ 306 (in Chinese))

24 T Hara, J Sugie. Stability region of differential difference equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 1996, 39: 69 ~ 86

25 N D Hayes. Roots of the transcendental equation associated with a certain difference differential equation. *Journal of London Mathematical Society*, 1950, 25: 226 ~ 232

26 严艳，杨玉华，魏晓燕，卢占会. 带有时滞的区间动力系统的鲁棒稳定性研究. 动力学与控制学报，2008, 6(1): 1 ~ 4 (Y Yan, Y H Yang, X Y Wei, Z H Lu. Study on robust stability of interval system with time – delay. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(4): 1 ~ 4 (in Chinese))

SIMPLE CRITERIA FOR THE HURWITZ STABILITY OF SOME TIME – DELAY SYSTEMS *

Li Junyu[1] Wang Zaihua[1,2]

(1. *Institute of Vibration Engineering Research, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing* 210016, *China*)

(2. *Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing* 211101, *China*)

Abstract Recently, Lambert W function has been found successful applications in stability analysis of time – delay systems. Because Lambert W function is defined as the solution of a transcendental equation, and it works only if some mathematical softwares such as Maple, Matlab or Mathematica are available, so the stability criteria based on Lambert W functions are not easy for understanding in applications. In this paper, two simple stability criteria have been derived from a careful investigation of the root location of Lambert W function, so that the stability as well as the robust stability of some time – delay systems checked by using Lambert W function can now be tested simply by calculating elementary functions.

Key words Lambert W function, stability, time – delay system, robust stability

Received 28 October 2008, revised 10 December 2008.

* The project supported by NNSF of China for DYS (10825207), NNSF of China (10532050), and FANEDD of China