

含参数多自由度非线性系统的降维方法研究*

官晓春 曹登庆

(哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要 研究一类具有一定结构特点的含参数多自由度非线性系统,以固定界面动态子结构方法为基础,借助于灵敏度分析的基本思路,提出一种实用的降维方法首先根据实际系统的结构特点将其划分为若干子系统,使其中部分子系统是线性的,其余子系统是非线性的基于灵敏度分析的相关理论导出线性部分子系统的频率、模态对于参数的依赖关系,采用固定界面模态综合法将线性部分子系统的截断模态与非线性子系统进行综合,最终得到具有较低维数的含参数非线性动力系统结合具体算例,将降维前后的非线性动力系统随参数值变化时的对应的幅频特性曲线进行了比较算例表明,采用这里提出的降维方法所得到的低维系统可以较为准确地反映原系统的动力学特性.

关键词 参数系统, 非线性振动, 模态综合法, 灵敏度分析, 降维方法

引言

现代工程中的机构与结构,如大型旋转机械、航空航天飞行器、高速铁路车辆、水下航行体、土木建筑结构、大跨度桥梁、微电子机械结构等是高维、耦合的复杂非线性动力系统,直接研究它的非线性动力学行为即便是采用数值方法也存在着数值收敛、算法稳定性、计算机时等方面的困难,采用解析的方法研究其稳定性、分岔与混沌就更为困难.这类系统的降维处理是非线性动力学研究的一个瓶颈;目前常用的降维方法,如非线性 Galerkin 法^[1],恰当正交分解(POD)法^[1,2]和中心流形法^[2,3]等均有其各自的局限性,如仅适用于一些特殊动力学系统等.因此,寻求一个切实有效的降维方法,将高维复杂的非线性系统降低到仅有少数几个自由度的低维系统,再利用现有的研究稳定性、分叉与混沌的理论与方法分析其动力学行为是目前非线性动力学研究的重要内容.

针对线性系统提出的模态综合法^[4,5]是进行大型复杂结构动力分析的有效方法,在20世纪80年代就已成熟,并获得了广泛的工程应用,其中的固定界面模态综合法与自由界面模态综合法是最普遍采用的方法.考虑到控制系统设计技术的承受能力和激励的特点,文[6]在利用传统的模态综合

法在对各子结构进行模态组织时,去掉子系统中弱能控和弱能观部分,仅保留对于整体控制目标又较大贡献的子结构模态,从而得到能够保证必要精度的低维动力学系统.同样的方法也适用于高维非线性动力学系统,文[7]采用固定界面模态综合法将线性自由度转换到模态空间中,并对其进行缩减,而非线性自由度仍保留在物理空间中,得到相对低维的非线性系统.事实上,复杂系统的非线性特性大都具有其自身的结构特点,如转子-轴承系统的非线性油膜力仅出现在极少数几个自由度上,这是我们探讨其降维方法的立足点.文[8]利用固定界面模态综合法将608个自由度的非线性动力学系统降至12个自由度,对大型非线性转子-轴承系统的动态行为进行分析,不仅较完整地保留了系统的振动特性,并且显著提高了计算和分析的效率.

在大型机械与结构的设计和制造过程中,系统的物理参数,包括几何和材料等各类参数对系统动态性能的影响是必须要考虑的问题.灵敏度分析对线性动力系统的模态修改、优化设计和振动控制等具有重要作用^[9-13].对于大型复杂的含参数非线性系统,运用线性部分子结构的频率和模态对于参数的依赖关系,基于灵敏度分析的基本思想,导出含参数的低维非线性动力系统,从而进行系统的复

杂非线性动态行为研究有着非常重要的意义。

研究一类含参数多自由度非线性动力学系统,根据工程问题的结构特点,将实际系统划分为若干子系统,使其中部分子系统是线性的,而剩余部分则是非线性的.根据子模态综合法的基本思路,应用含参数系统灵敏度分析的基本概念,将含参数的线性部分的子系统降维,在此基础上对子结构进行组集,通过线性与非线性子结构的界面连接条件,可导出整个系统的以独立模态坐标表示的动力学方程.从而得到一个具有少数几个自由度的含参数非线性动力学系统,再利用现有非线性动力学的分析方法,考察系统的复杂多样的非线性现象.

1 系统描述

机械与结构领域中的复杂非线性动力系统可以由下述含参数的微分方程组来描述:

$$M(q)\ddot{x} + C(q)\dot{x} + K(q)x = f(x, \dot{x}, q, t) \quad (1)$$

式中 $x \in R^n$ 是系统的位移矢量; $q \in R^m$ 是参数矢量; $M, C, K \in R^{n \times n}$ 分别表示系统的质量、非比例阻尼和刚度矩阵, $f(x, \dot{x}, q, t) \in R^n$ 是非线性力矢量.对于大型复杂的多自由度非线性系统,其质量、阻尼和刚度矩阵中的参数具有某种程度的不确定性(如材料、几何等特性),假设质量、阻尼和刚度矩阵是系统参数的线性映射,即

$$\begin{cases} M(q) = M^0 + \sum_{j=1}^m q_j M^j, \\ C(q) = C^0 + \sum_{j=1}^m q_j C^j, \\ K(q) = K^0 + \sum_{j=1}^m q_j K^j, \end{cases} \quad (2)$$

式中 $M^0, C^0, K^0, M^j, C^j, K^j \in R^{n \times n}$ 是给定常数矩阵,参数矢量 $q \in \Omega \subset R^m$, 且 $0 \in \Omega$.

将非线性动力系统(1)划分成 N 个子结构,第 $i (i=1, 2, \dots, N)$ 个子结构的自由度数为 n_i , 且满足: $n_1 + n_2 + \dots + n_N = n$. 不失一般性,假设前 $L (1 \leq L < N)$ 个子结构是线性的. 第 $i (1 \leq i < L)$ 个线性子结构的振动方程可以写成:

$$M_i(q)\ddot{x}_i + C_i(q)\dot{x}_i + K_i(q)x_i = s_i(x, \dot{x}, q, t) + f_i(x, \dot{x}, q, t) \quad (3)$$

式中, $s_i(x, \dot{x}, q, t)$ 表示第 i 个子结构与其它子结构的关联项, $f_i(x, \dot{x}, q, t)$ 作用于第 i 个子结构的非线性力,且质量、阻尼与刚度矩阵可以写成:

$$\begin{cases} M_i(q) = M_i^0 + \sum_{j=1}^m q_j M_i^j, \\ C_i(q) = C_i^0 + \sum_{j=1}^m q_j C_i^j, \\ K_i(q) = K_i^0 + \sum_{j=1}^m q_j K_i^j, \end{cases} \quad (4)$$

式中 $M_i^0, C_i^0, K_i^0, M_i^j, C_i^j, K_i^j \in R^{n_i \times n_i}$ 是给定常数矩阵.固定子结构间的联界面,将第 $i (1 \leq i < L)$ 个线性子结构的位移按照非界面物理坐标 $x_{ia} \in R^{n_{ia}}$ 和界面物理坐标 $x_{ib} \in R^{n_{ib}}$ 划分,即 $\{x\} = \{x_{ia} : x_{ib}\}$, 则其非比例阻尼自由振动方程可以写成:

$$\begin{bmatrix} M_{iaa} & M_{iab} \\ M_{iba} & M_{ibb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ia} \\ \ddot{x}_{ib} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{iaa} & C_{iab} \\ C_{iba} & C_{ibb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_{ia} \\ \dot{x}_{ib} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{iaa} & K_{iab} \\ K_{iba} & K_{ibb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{ia} \\ x_{ib} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

式中 N_i 为第 $i (i=1, 2, \dots, n)$ 个子结构所受到的其它子结构的界面力,且

$$\begin{cases} M_{i\alpha\beta}(q) = M_{i\alpha\beta}^0 + \sum_{j=1}^m q_j M_{i\alpha\beta}^j, \\ C_{i\alpha\beta}(q) = C_{i\alpha\beta}^0 + \sum_{j=1}^m q_j C_{i\alpha\beta}^j, \\ K_{i\alpha\beta}(q) = K_{i\alpha\beta}^0 + \sum_{j=1}^m q_j K_{i\alpha\beta}^j, \end{cases} \quad \alpha, \beta = a, b \quad (6)$$

2 含参数子结构的模态综合法

2.1 子结构的主模态集

第 $i (1 \leq i < L)$ 个线性子结构无阻尼自由振动方程的名义系统($q=0$):

$$\begin{bmatrix} M_{iaa} & M_{iab} \\ M_{iba} & M_{ibb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_{ia} \\ \ddot{x}_{ib} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{iaa} & K_{iab} \\ K_{iba} & K_{ibb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{ia} \\ x_{ib} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

联接界面的物理坐标固定时 $x_{ib} = 0$, 故由方程(7)可得:

$$M_{iaa}^0 \ddot{x}_{ia} + K_{iaa}^0 x_{ia} = 0 \quad (8)$$

由方程(8)可求得方程(7)的特征值 λ_{ir}^0 , 相应的特征向量(正则化模态) u_{ir}^0 满足

$$\begin{cases} u_{ir}^{0T} M_{iaa}^0 u_{ir}^0 = 1, \\ u_{ir}^{0T} K_{iaa}^0 u_{ir}^0 = (\lambda_{ir}^0)^2 \end{cases} \quad (9)$$

采用灵敏度分析^[11-13]的基本方法对(特征值 λ_{ir} 与特征向量 u_{ir} 进行修改得到:

$$\begin{cases} \lambda_{ir} = \lambda_{ir}^0 + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \lambda_{ir}}{\partial q_j} q_j, \\ u_{ir} = u_{ir}^0 + \sum_{j=1}^m \frac{\partial u_{ir}}{\partial q_j} q_j \end{cases} \quad (10)$$

式中 $\frac{\partial \lambda_{ir}}{\partial q_j}, \frac{\partial u_{ir}}{\partial q_j}$ ($i=1,2,\dots,N; r=1,2,\dots,n_{ia}; j=1,2,\dots,m$) 分别为第 i 个子结构的第 r 阶特征值与第 r 阶特征向量在 q_j 处的偏导数,也称为特征灵敏度。

利用直接求导法可求得(10)式中的特征灵敏度为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{ir}}{\partial q_j} &= u_{ir}^T (K_{iaa}^j - \lambda_{ir} M_{iaa}^j) u_{ir} \\ \frac{\partial u_{ir}}{\partial q_j} &= \sum_{k=1, k \neq r}^m \frac{-u_{ir}^T (K_{iaa}^j - \lambda_{ir} M_{iaa}^j) u_{ir}}{\lambda_k - \lambda_r} - \\ &\quad \frac{1}{2} u_{ir}^T M_{iaa}^j u_{ir} u_{ir} \end{aligned} \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式中得到系统修改后的特征值 λ_{ir} 与特征向量 u_{ir} 。令

$$\Phi_{iaa} = [u_{i1} \quad u_{i2} \quad \dots \quad u_{in_i}] \quad (12)$$

则

$$\Phi_{iD} = \begin{bmatrix} \Phi_{iaa} \\ O_{n_{ib} \times n_{ia}} \end{bmatrix} \quad (13)$$

为第 i 个子结构的含参数的主模态集,其中 $O_{n_{ib} \times n_{ia}}$ 是 $n_{ib} \times n_{ia}$ 阶 0 矩阵。

由于结构动态响应中,低阶模态的响应通常远大于高阶模态,而外激励的频率通常在系统的少数几个低阶固有频率区域,我们可取子结构的前若干阶模态来分析系统的响应,即进行模态截断。将(13)式的高阶模态截断,取子结构前 k 阶模态来分析结构的振动特性,则其主模态集可以表示为:

$$\Phi_{iD} = \bar{\Phi}_{iD} = \begin{bmatrix} \Phi_{ikk} \\ O_{n_{ib} \times n_{ik}} \end{bmatrix} \quad (14)$$

式中 $\Phi_{ikk} = [u_{i1} \quad u_{i2} \quad \dots \quad u_{ik}]$

2.2 子结构的约束模态集

与无阻尼自由振动方程(7)相对应的子结构静力平衡方程为:

$$\begin{bmatrix} K_{iaa}^0 & K_{iab}^0 \\ K_{iba}^0 & K_{ibb}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{ia} \\ x_{ib} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ N_i \end{Bmatrix} \quad (15)$$

由方程(15)的第一式得到:

$$x_{ia} = -(K_{iaa}^0)^{-1} K_{iab}^0 x_{ib} \quad (16)$$

或

$$x_{ia} = \Phi_{iab}^0 x_{ib} \quad (17)$$

令

$$\Phi_{iC}^0 = \begin{bmatrix} \Phi_{iab}^0 \\ I_{n_{ib} \times n_{ib}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(K_{iaa}^0)^{-1} K_{iab}^0 \\ I_{n_{ib} \times n_{ib}} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Φ_{iC}^0 为子结构的约束模态集约束模态相当于给定某

些界面自由度为单位位移,而其他界面自由度为零时所形成的静模态约束模态的数目等于子结构界面自由度的数目。

采用灵敏度分析的方法对子结构约束模态 Φ_{iC}^0 进行修改,则:

$$\Phi_{iab} = \Phi_{iab}^0 + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_{iab}^0}{\partial q_j} q_j \quad (19)$$

从而,第 i 个子结构的含参数约束模态

$$\Phi_{iC} = \begin{bmatrix} \Phi_{iab} \\ I_{n_{ib} \times n_{ib}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_{iab}^0 + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Phi_{iab}^0}{\partial q_j} q_j \\ I_{n_{ib} \times n_{ib}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

式中, $I_{n_{ib} \times n_{ib}}$ 是 $n_{ib} \times n_{ib}$ 阶单位矩阵,且

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{iab}^0}{\partial q_j} &= \frac{\partial (-(K_{iaa}^0)^{-1} K_{iab}^0)}{\partial q_j} = \\ &= -\frac{\partial (K_{iaa}^0)^{-1}}{\partial q_j} K_{iab}^0 - (K_{iaa}^0)^{-1} \frac{\partial K_{iab}^0}{\partial q_j} = \\ &= (K_{iaa}^0)^{-1} (K_{iaa}^0 (K_{iaa}^0)^{-1} K_{iab}^0 - K_{iab}^j) \end{aligned} \quad (21)$$

这里 K_{iaa}^0 和 K_{iab}^0 由关系式(6)给出,且假定对任意参数 $q \in \Omega$, 矩阵 K_{iaa}^0 可逆

2.3 坐标转换

令模态矩阵

$\Phi_i = [\bar{\Phi}_{iD} \quad \Phi_{iC}]$ 做第一次坐标转换,把子结构 i 物理坐标 x_i 变换到模态坐标 p_i 上

$$x_i = \Phi_i p_i = [\bar{\Phi}_{iD} \quad \Phi_{iC}] p_i \quad (22)$$

或写作

$$\begin{Bmatrix} x_{ia} \\ x_{ib} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_{iak} & \Phi_{iab} \\ O_{n_{ib} \times n_{ik}} & I_{n_{ib} \times n_{ib}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{ik} \\ p_{ib} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

式中 p_{ik} 是子结构 i 的前 k 阶模态坐标, p_{ib} 为对应的约束模态坐标。由式(23)可以得到 $p_{ib} = x_{ib}$, 即约束模态坐标就是界面物理坐标。

利用坐标变换(22)将子结构运动方程(5)变换到模态坐标 p_i 上得

$$\bar{M}_i \ddot{p}_i + \bar{K}_i p_i = \bar{f} \quad (24)$$

式中

$$\bar{M}_i = \Phi_i^T M_i \Phi_i, \bar{K}_i = \Phi_i^T K_i \Phi_i, \bar{f}_i = \Phi_i^T f_i(x, q, t) \quad (25)$$

考虑坐标变换式(22),有

$$\bar{M}_i = \begin{bmatrix} \bar{M}_{iaa} & \bar{M}_{iab} \\ \bar{M}_{iba} & \bar{M}_{ibb} \end{bmatrix}, \bar{K}_i = \begin{bmatrix} \bar{K}_{iaa} & \bar{K}_{iab} \\ \bar{K}_{iba} & \bar{K}_{ibb} \end{bmatrix} \quad (26)$$

式中 $\bar{M}_{iaa} = \Phi_{iaa}^T M_{iaa} \Phi_{iaa}$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{iab} &= \Phi_{iaa}^T M_{iab} \Phi_{iab} + \Phi_{iaa}^T M_{iab} \\ \bar{M}_{iba} &= \Phi_{iab}^T M_{iab} \Phi_{iaa} + M_{iba} \Phi_{iaa} \\ \bar{M}_{ibb} &= (\Phi_{iab}^T M_{ibb} + M_{iba}) \Phi_{iab} + \Phi_{iab}^T M_{iab} + M_{ibb} \\ \bar{K}_{iaa} &= \Phi_{iaa}^T K_{iaa} \Phi_{iaa} \\ \bar{K}_{iab} &= \Phi_{iaa}^T K_{iab} \Phi_{iab} + \Phi_{iaa}^T K_{iab} \\ \bar{K}_{iba} &= \Phi_{iab}^T K_{iab} \Phi_{iaa} + K_{iba} \Phi_{iaa} \\ \bar{K}_{ibb} &= (\Phi_{iab}^T K_{ibb} + K_{iba}) \Phi_{iab} + \Phi_{iab}^T K_{iab} + K_{ibb} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} \bar{M}_{iaa} & 0 & \bar{M}_{iab} \\ 0 & \bar{M}_{jaa} & \bar{M}_{jab} \\ \bar{M}_{iab} & \bar{M}_{jab} & \bar{M}_{ibb} + \bar{M}_{jbb} \end{bmatrix} \\ K &= \begin{bmatrix} \bar{K}_{iaa} & 0 & \bar{K}_{iab} \\ 0 & \bar{K}_{jaa} & \bar{K}_{jab} \\ \bar{K}_{iab} & \bar{K}_{jab} & \bar{K}_{ibb} + \bar{K}_{jbb} \end{bmatrix} \end{aligned} \right. \quad (33)$$

2.4 模态综合

考虑两个线性子结构的连接问题,首先建立两个子结构 i 和 j 在模态坐标下的振动方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_i & 0 \\ 0 & \bar{M}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{p}_i \\ \ddot{p}_j \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{K}_i & 0 \\ 0 & \bar{K}_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_i \\ p_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_i \\ s_j \end{Bmatrix} \quad (27)$$

若子结构 i 和 j 为刚性连接,则位移的协调方程为: $x_{ib} = x_{jb}$, 即 $p_{ib} = p_{jb}$. 则可以选择系统的广义坐标为:

$$\{z\} = \{z_{ia}^T \quad z_{ja}^T \quad z_b^T\}^T \quad (28)$$

从而建立了系统的广义坐标 z 与非独立坐标 p_i, p_j 之间的变换关系为

$$\begin{Bmatrix} p_{ia} \\ p_{ib} \\ p_{ja} \\ p_{jb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_{ia} \\ z_{ja} \\ z_b \end{Bmatrix} \quad (29)$$

或简记作

$$p = \beta z \quad (30)$$

由界面上的平衡条件 $s_{ib} + s_{jb} = 0$ 可得:

$$\beta^T s = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ s_{ib} \\ 0 \\ s_{jb} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ s_{ib} + s_{jb} \end{Bmatrix} = 0 \quad (31)$$

利用式(30)可将式(27)变换到广义坐标 z 上,从而建立系统的无阻尼自由振动方程

$$M\ddot{z} + Kz = 0 \quad (32)$$

式中

若子结构 i 是线性的,而第 j 个子结构是非线性的,则由于非线性子结构没有非界面坐标,利用类似于两个线性子结构的连接方法,可以得到其非线性振动方程为

$$M\ddot{z} + Kz = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_j(z, \dot{z}, t) \end{Bmatrix} \quad (34)$$

式中 $\{z\} = \{z_{ia}^T \quad z_b^T\}^T$

经过子结构之间的模态综合后得到降维后含参数多自由度非线性系统的振动方程为:

$$\bar{M}(q)\ddot{z} + \bar{C}(q)\dot{z} + K(q)z = \bar{f}(z, \dot{z}, q, t) \quad (35)$$

2.5 返回物理坐标

用数值方法求解(35)式可求得模态坐标 z 的值,然后再利用(30)式、(22)式两次坐标变换返回物理坐标. 利用现有的分析非线性动力学振动方程的方法可求得系统的若干非线性特性.

以上公式是对于无阻尼自由振动系统推导的. 对于强迫振动系统,式(31)的右端项不为零. 对于有阻尼系统,如果阻尼是比例阻尼,可按上述方法处理;对于非比例阻尼的情况,应按复模态理论作复模态综合.

3 算例分析

为验证本文提出的降维方法的有效性,考虑一个10自由度非线性振动系统,质量块 m_1, m_2, \dots, m_{10} 分别用线性弹簧 k_1, k_2, \dots, k_{10} 和线性阻尼器 c_1, c_2, \dots, c_{10} 连接如图1所示. m_{10} 由非线性弹簧 f_s 和非

表1 系统质量 m (kg) 和弹簧常数 k (N/m)

Table 1 Mass m (kg) and spring k (N/m) coefficients of the system

| m_1 | m_2 | m_3 | m_4 | m_5 | m_6 | m_7 | m_8 | m_9 | m_{10} |
|-------|-------|-------------|-------|-------|-------|-------------|-------|-------|----------|
| 1.5 | 3 | 2 | 3.5 | 1 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 | 1.5 |
| k_1 | k_2 | k_3 | k_4 | k_5 | k_6 | k_7 | k_8 | k_9 | k_{10} |
| 100 | 100 | $100 + q_1$ | 100 | 100 | 100 | $200 + q_2$ | 300 | 250 | 150 |

线性阻尼器 f_d 与一面固定墙连接,质量和弹簧常数简表 1. 下面利用本文提出的降维方法研究该系统的振动特性.

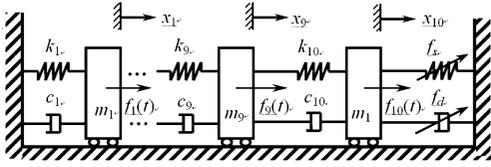


图 1 非线性弹簧质量系统

Fig.1 Nonlinear spring mass system

设 $f_1 = \dots = f_9 = 0, f_{10} = F_0 \sin \omega t$, 作用于质量块 m_{10} 非线性弹力为

$$f_s = b_1 x_{10} + b_2 x_{10}^3$$

非线性阻尼力为

$$f_d = d_1 \dot{x}_{10} + d_2 \dot{x}_{10}^3$$

其中: F_0, d_1, d_2, b_1, b_2 为给定常数. 系统的运动微分方程为

$$M(q)\ddot{x} + C(q)\dot{x} + K(q)x = f(x, \dot{x}, q, t) \quad (36)$$

式中:

$$M(q) = M^0 = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & m_{10} \end{bmatrix};$$

$$K(q) = K^0 + q_1 K^1 + q_2 K^2$$

$$K^0 = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & -k_8 \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

q_1, q_2 是弹簧 k_3 和 k_7 的改变量, 因此

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix};$$

$$K^2 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这里

$$x = \{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_9 \quad x_{10}\}^T$$

$$f(x, \dot{x}, q, t) = \{0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad f_{10} + f_s + f_d\}^T$$

采用比例阻尼, 即

$$C(q) = \alpha M(q) + \beta K(q) \quad (37)$$

首先利用动态子结构法将系统划分为两个子结构: 由于 m_{10} 含有非线性特性, 将前四个自由度作为第 1 个子结构, m_{10} 作为第 2 个子结构. 将含有非线性特性的子结构 m_{10} 固定, 对第一个子结构进行降维. 计算可知第一个子结构可简化为两个自由度, 因此可将该系统降维至 3 个自由度系统. 线性阻尼采用比例阻尼, 应用本文提出的降维方法, 将系统的物理坐标变换到模态坐标, 可得其降维后的运动微分方程:

$$\bar{M}(q)\ddot{z} + \bar{C}(q)\dot{z} + \bar{K}(q)z = \bar{f}(z, \dot{z}, q, t) \quad (38)$$

由于 $\bar{M}(q), \bar{C}(q), \bar{K}, \bar{f}(z, \dot{z}, q, t)$ 的表达式十分复杂, 这里没有列出

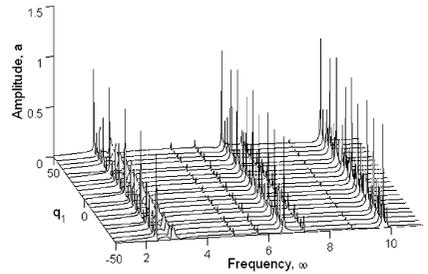


图 2 降维系统 m_{10} 的 $\omega - q_1 - a$ 幅频特性图

Fig.2 Reduced system's amplitude - frequency characteristic chart for m_{10} of $\omega - q_1 - a$

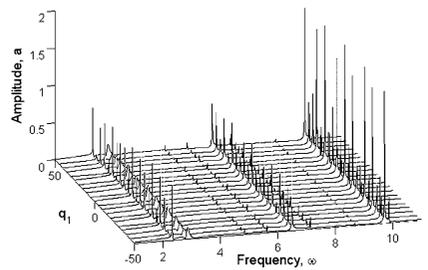


图 3 原系统 m_{10} 的 $\omega - q_1 - a$ 幅频特性图

Fig.3 Original system's amplitude - frequency characteristic chart for m_{10} of $\omega - q_1 - a$

为了比较原 10 自由度系统和降维后的 3 自由度系统的非线性动力学特性是否相同, 本文利用多自由度非线性系统的平均法^[15] 求得到幅频特性. 当参数 $q = [q_1, q_2]$ 在一定范围内变化时, 对于每个给定的 ω , 若保持 q_2 不变, q_1, ω 在一定范围内变化, 可画出, 的幅频特性三维图. 图 2 所示的是求解降维后的系统方程所得到的幅频特性图. 图 3 所

示的是求解原系统得到的幅频特性图. 比较图2和图3可知,在误差允许的范围内,降维后的系统能够比较好的反映原系统的非线性特性,证明本文提出的降维方法可以有效地对高维系统进行降维并保持原系统的非线性动特性.

4 结论

本文基于固定界面子结构方法及灵敏度分析的基本思想研究了一类多参数多自由度非线性振动系统,提出了一种较为实用的降维方法. 为验证该降维方法的有效性,文中研究了一个10自由度的含参数非线性系统,经过计算得知,原系统可降维至3自由度含参数系统,并计算出原系统和降维系统的各自的幅频特性曲线随参数的变化关系. 比较二者可知,降维后的系统能够比较好的反映原系统的非线性特性,表明文中提出的降维方法适用于含参数多自由度非线性系统地降维计算,既大大简化了计算过程,又可进行有效的定性定量分析,为含参数高维非线性系统地降维计算提供了一定的理论基础

参 考 文 献

- 1 Rega G and Troger H. Dimension reduction of dynamical systems; methods, models, applications. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41: 1 ~ 15
- 2 Kerschen G, Golinval J-C, Vakakis A E, and Bergman L A. The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems; an overview. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41: 147 ~ 169
- 3 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论. 北京: 高等教育出版社, 1993, 223 ~ 254 (Chen Yushu. Bifurcation and chaos theory of nonlinear vibration systems. Beijing: Higher education press, 1993, 223 ~ 254 (in Chinese))
- 4 王永岩. 动态子结构方法: 理论及应用. 北京: 科学出版社, 1999 (Wang Yongyan. Theories and applications of the dynamic substructure methods. Beijing: Science press, 1999 (in Chinese))
- 5 邹经湘. 结构动力学. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1993, 126 ~ 156 (Zou Jingxiang. Structural dynamics. Harbin: Harbin institute of technology press, 1993, 126 ~ 156 (in Chinese))
- 6 黄欢, 缪炳祺, 施高萍. 多柔体系统动力学部件两级降阶响应分析. 工程设计学报, 2002, 11 (6): 347 ~ 350 (Huang Huan, Mou Bingqi, Shi Gaoping. Two-stage component model reduction analysis of flexible multi-body stimulation. *Journal of Engineering Design*, 2002, 11 (6): 347 ~ 350 (in Chinese))
- 7 张家忠, 许庆余, 郑铁生. 具有局部非线性动力系统周期解及稳定性方法. 力学学报, 1998, 30 (5): 572 ~ 578 (Zhang Jiazong, Xu Qingyu, Zheng Tiesheng. A method for determining the periodic solution and its stability of a dynamic system with local nonlinearities. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1998, 30 (5): 572 ~ 578 (in Chinese))
- 8 崔颖, 刘占生, 黄文虎, 韩万金. 高维转子一轴承系统非线性动力稳定性分析. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37 (11): 1465 ~ 1468 (Cui Ying, Liu Zhansheng, Huang Wenhui, Han Wanjin. Nonlinear dynamic stability analysis for a large-scale rotor bearing system. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2005, 37 (11): 1465 ~ 1468 (in Chinese))
- 9 Haug E J, Choi K K et al. Design sensitivity analysis of structural systems. New York: Academic Press, 1986
- 10 丁洁玉, 潘振宽, 陈立群. 基于微分/代数方程的多体系统动力学设计灵敏度分析的伴随变量方法. 动力学与控制学报, 2006, 4 (3): 205 ~ 209 (Ding Jieyu, Pan Zhenkuan, Chen Liqun. Adjoin variable method for sensitivity analysis of multibody system dynamics described of differential/algebraic equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2006, 4 (3): 205 ~ 209 (in Chinese))
- 11 王文亮. 离散振系的灵敏度分析. 力学学报, 1995, 27 (2): 180 ~ 188 (Wang Wenliang. Sensitivity analysis of discrete vibratory system. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 1995, 27 (2): 180 ~ 188 (in Chinese))
- 12 Chen YY. Design sensitivity analysis for repeated eigenvalues in structural design. *AIAA Journal*, 1993, 31 (12): 2347 ~ 2350
- 13 应祖光, 吴淇泰. 多自由度系统动力响应灵敏度分析与振动控制. 固体力学学报, 1999, 20 (2): 177 ~ 181 (Ying Zuguang, Wu Taiqi. Sensitivity analysis and vibration control for dynamic response of multi-DOF system. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 1999, 20 (2): 177 ~ 181 (in Chinese))
- 14 陈立群, 吴哲民. 多自由度非线性振动分析的平均法. 振动与冲击, 2002, 21 (3): 63 ~ 65 (Chen Liqun, Wu Zhemin. Average method for analyzing a multi-degrees-of-freedom nonlinear oscillation. *Journal of Vibration and Shock*,

2002,21(3):63~65(in Chinese)

DIMENSION REDUCTION OF NONLINEAR MUTI-DEGREE-OF- FREEDOM SYSTEM WITH MULTIPLE PARAMETERS *

Gong Xiaochun Cao Dengqing

(The School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, PO Box 137, Harbin 150001, China)

Abstract The problem of dimension reduction of high-dimensional nonlinear systems with multiple parameters was addressed in terms of structural characteristics of the system. The dimension reduction approach based on the fixed interface component mode synthesis of substructures was employed to analyze the system, and then an order reduction for the entire nonlinear system was proposed along with the process of sensitivity analysis. First the system was divided into a number of subsystems according to the characteristics of practical structure, some of which are linear subsystem, and the remains are nonlinear. Then the frequencies and modes related to parameters of the linear subsystems were derived from the sensitivity analysis theory. Finally lower dimension nonlinear dynamic systems with multiple parameters were obtained by synthesizing the nonlinear subsystems and the modes truncated from the linear subsystems in terms of the fixed interface mode synthesis. Numerical example was given to illustrate the effect of the proposed approach.

Key words parametric system, nonlinear vibration, component mode synthesis, sensitivity analysis, dimension reduction