

运动滑道含摩擦多体系统的建模和数值方法*

彭慧莲 王琪 庄方方

(北京航空航天大学一般力学研究室,北京 100191)

摘要 研究了运动约束面含摩擦多体系统动力学方程的建立和算法问题. 首先利用第一类 Lagrange 方程给出了系统的动力学方程,并以矩阵形式给出了这类系统摩擦力的广义力的一般表达式. 为便于摩擦力和铰链约束力的分析与计算,采用笛卡尔坐标和约束方程的局部方法,使得系统的约束力与 Lagrange 乘子一一对应. 应用增广法将微分-代数方程组转化为常微分方程组并用分块矩阵的形式给出,以便于方程的编程与计算,提高计算效率. 最后用一个算例验证了该方法的有效性.

关键词 多体系统, 双面约束, Lagrange 乘子, 干摩擦

引言

近年来非光滑多体系统动力学的研究一直受到学者们的关注,成为多体系统动力学研究的热点问题之一. 其主要原因是在研究航空航天、机械、车辆等多体系统动力学问题时,往往需要考虑摩擦或碰撞对系统运动的影响,由此会导致系统的动力学方程不连续(非光滑),不能将已有的光滑多体系统动力学的方法直接应用到非光滑多体系统,给系统的建模和数值计算带来困难,有必要探究解决这类问题的新方法.

目前,研究含摩擦多体系统动力学问题的建模方法一般包括矢量力学方法和分析力学方法. 由于矢量力学方法研究系统的各变量的直观性,很多学者利用该方法对带摩擦多体系统进行了研究,并给出了相应的算法. 如文献[1,2]研究了考虑摩擦和双面约束的多体系统,给出了一种迭代方法;文献[3]对一类具有双面约束单点摩擦单自由度多体系统进行了研究,给出了一种可避免迭代的数值计算方法. 但是,应用该方法建立含摩擦的多体系统动力学方程相当繁琐且不易于编程计算. 分析力学方法弥补了矢量力学的这一不足,其方程的建立相对简便,是一种程式化的方法. 其中第一类 Lagrange 方程又是目前研究含摩擦多体系统动力学的普遍方法之一. 如文献[4]应用第一类 Lagrange 方程建立了考虑摩擦的单面约束多体系统动力学

方程,并给出了相应的算法. 文献[5,6]应用第一类 Lagrange 方程和线性互补方法给出了考虑干摩擦的单面约束多体系统的动力学方程和数值算法;然而,目前所研究的问题主要是以固定单边约束面或平动单边约束面的多体系统为研究对象,对于这类系统,其动力学方程中摩擦力的广义力较易于分析与计算;如果系统含摩擦的约束面(滑道)作转动(如曲柄—滑块—摇杆机构)或平面一般运动,在计算动力学方程中摩擦力的广义力时,不仅要给出约束面的法向力与 Lagrange 乘子的关系,还要考虑滑块相对于滑道的相对速度和相对加速度,目前尚未见到相关的研究.

针对上述问题,本文以运动约束面含摩擦多体系统为研究对象,利用第一类 Lagrange 方程对该类系统进行建模. 为使得 Lagrange 乘子与系统的约束力一一对应,以便于方程的建立与计算,本文采用笛卡尔坐标描述系统的位形,用局部方法^[7]建立系统的约束方程,并通过几何关系写出滑块相对于运动滑道的相对位移的表达式,由此得到滑块的相对速度和相对加速度,给出了一种列写摩擦力的广义力的一般表达式的方法. 该方法适用于滑道为直线的多体系统,它与矢量方法相比具有简单、程式化程度高等特点. 根据这类多体系统动力学方程的特点,本文将固定约束面含摩擦多体系统的数值计算方法推广到运动约束面含摩擦多体系统. 为了便于数值计算,系统的动力学方程均以矩阵形式给

出,提高了计算效率.最后用一个滑道作定轴转动的算例验证了该方法的有效性.

1 动力学方程的建立

设平面多刚体系统由 n 个刚体和一个滑块(视为质点)组成,滑块可在其中某刚体的直线滑道内滑动.假定连接物体间的柱铰链是光滑的,仅考虑滑块与滑道间的摩擦.为便于描述和计算,本文采用笛卡尔坐标描述系统的位形,即用 $(x_{ej}, y_{ej}, \theta_j) j = 1, 2, \dots, n$ 表示刚体 i 的质心坐标和转角,用 (x^*, y^*) 表示滑块的坐标,系统的位形坐标为 $\mathbf{q} = [x_{c1}, y_{c1}, \theta_1, \dots, x_{cn}, y_{cn}, \theta_n, x^*, y^*]^T, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^{3n+2}$. 假设系统受到完整定常双面约束,滑块可在刚体 i 的滑道内运动,约束方程为 $g(x^*, y^*, x_{ci}, y_{ci}, \theta_i) = 0$; 物体间铰链的约束方程为 $f_j(\mathbf{q}) = 0, j = 1, \dots, p$, 系统的约束方程可写成 $\Phi(\mathbf{q}) = [f_1, \dots, f_p, g]^T = 0, \Phi \in \mathbf{R}^{p+1}$ ($p+1$ 为独立的约束方程个数). 应用第一类 Lagrange 方程可得系统的动力学方程:

$$\begin{cases} M\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^f + \Phi_q^T \lambda \\ \Phi(\mathbf{q}) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, M 为系统的广义质量矩阵,该矩阵为正定的对角阵; Φ_q 为约束方程的雅可比矩阵; $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda^*]^T \in \mathbf{R}^{p+1}$ 为 Lagrange 乘子列向量,其中 $[\lambda_1, \dots, \lambda_p]$ 是与铰链约束方程对应的 Lagrange 乘子, λ^* 是与刚体 i 上滑道的约束方程对应的 Lagrange 乘子; \mathbf{Q} 为系统主动力的广义力; \mathbf{Q}^f 为系统摩擦力的广义力.

根据库仑摩擦模型,摩擦力的大小与作用于约束面的法向约束力的大小 $|F_N|$ 成正比,方向与相对运动(或相对运动趋势)的方向相反,滑道作用在滑块上的摩擦力 F 可表示为:

$$F = \begin{cases} -\mu |F_N| \text{sgn}(\dot{s}_r) & \dot{s}_r \neq 0 \\ -\mu' |F_N| \text{sgn}(\dot{s}_r) & \dot{s}_r = 0 \text{ and } \ddot{s}_r \neq 0 \\ [-\mu' |F_N|, \mu' |F_N|] & \dot{s}_r = 0 \text{ and } \ddot{s}_r = 0 \end{cases}$$

其中:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

μ, μ' 和 F_N 分别为滑块与滑道间的动、静滑动摩擦系数和滑道作用在滑块上的法向约束力. \dot{s}_r, \ddot{s}_r 分别为滑块相对于滑道的相对速度和相对加速度.

为便于计算,本文采用局部方法建立系统的约

束方程,可以证明,由此得到的 Lagrange 乘子与滑道约束面的法向约束力一一对应.由于滑块被约束在 $g(x^*, y^*, x_{ci}, y_{ci}, \theta_i) = 0$ 的滑道上运动,与该约束方程对应的 Lagrange 乘子为 λ^* ,滑道法向约束力的大小为:

$$|F_N| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y^*}\right)^2} |\lambda^*|$$

将该式表示成: $|F_N| = c |\lambda^*| = c \lambda^* \text{sgn}(\lambda^*)$, 其中:

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x^*}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y^*}\right)^2}$$

滑道作用在滑块上的摩擦力(静滑动摩擦力和动滑动摩擦力)可统一表示成:

$$F = \begin{cases} -\mu c \lambda^* \text{sgn}(\lambda^*) \text{sgn}(\dot{s}_r) & \dot{s}_r \neq 0 \\ -\mu' c \lambda^* \text{sgn}(\lambda^*) \text{sgn}(\dot{s}_r) & \dot{s}_r = 0 \text{ and } \ddot{s}_r \neq 0 \\ [-\mu' c \lambda^* \text{sgn}(\lambda^*), \mu' c \lambda^* \text{sgn}(\lambda^*)] & \dot{s}_r = 0 \text{ and } \ddot{s}_r = 0 \end{cases} \quad (2)$$

其中, $c \lambda^*$ 的物理含义是滑块受到刚体上的双面滑道的法向约束力. 当 $\lambda^* > 0$ 时,表示该滑道的一个约束面起作用;当 $\lambda^* < 0$ 时,表示该滑道的另一个约束面起作用;当 $\lambda^* = 0$ 时,表示该滑道的两个面均不起作用.

为给出摩擦力的广义力 \mathbf{Q}^f 的一般表达式,下面先给出一种列写 \dot{s}_r, \ddot{s}_r 和 δs_r 的解析式的方法,该方法适合滑块相对运动轨迹为直线的平面多体系统.

设滑块可在刚体 i 上的滑道内滑动且相对运动轨迹为直线,如图 1 所示. Oxy 为系统的惯性坐标系, $C_i x'_i y'_i$ 为固连在刚体 i 上的随体坐标系,坐标原点位于刚体 i 的质心 C_i ,其在惯性坐标系中的坐标为 $(x_{ci}, y_{ci}), x'_i$ 轴与惯性坐标系 x 轴正向的夹角为 θ_{ci} . 设滑块的瞬时重合点为 p^i ,其在惯性坐标系中的坐标为 (x^*, y^*) ,在随体坐标系中的坐标为 (x', y') ,则两者的关系可表示为:

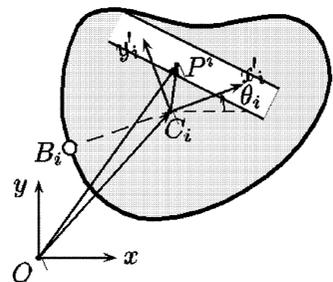


图 1 坐标转换

Fig. 1 coordinate transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^* - x_{ci} \\ y^* - y_{ci} \end{pmatrix} \quad (3)$$

假设滑道与随体坐标 y'_i 轴交于 $(0, b)$, 交点为滑块相对于滑道的相对位移的坐标原点, 与 x'_i 轴正向夹角为常数 α (逆时针为正), 则滑块在任意位置相对于滑道的相对位移的大小可表示为:

$$s_r = x' \cos\alpha + (y' - b) \sin\alpha = (x^* - x_{ci}) \cos(\theta_i + \alpha) + (y^* - y_{ci}) \sin(\theta_i + \alpha) - b \sin\alpha \quad (4)$$

由(4)式可知, 滑块的相对位移的大小为广义坐标的函数, 即 $s_r = s_r(x^*, y^*, x_{ci}, y_{ci}, \theta_i)$, 将(4)对时间求一阶导数和二阶导数即可得到滑块的相对速度 \dot{s}_r 和 \ddot{s}_r 相对加速度. 摩擦力所作的虚功为:

$$\begin{aligned} \delta W^f &= F \delta s_r = F \frac{\partial s_r}{\partial x^*} \delta x^* + F \frac{\partial s_r}{\partial y^*} \delta y^* + \\ &F \frac{\partial s_r}{\partial x_{ci}} \delta x_{ci} + F \frac{\partial s_r}{\partial y_{ci}} \delta y_{ci} + F \frac{\partial s_r}{\partial \theta_i} \delta \theta_i \end{aligned}$$

由于 s_r 只是刚体 i 和滑块的位形坐标的函数, 与系统其他刚体的位形坐标无关, 因此摩擦力对应于系统位形坐标的广义力可统一表示为:

$$Q_{qi}^f = F \frac{\partial s_r}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, 3n + 2) \quad (5)$$

其中 F 由(2)式确定. 由于认为铰链是光滑的, 只考虑滑块与滑道间的摩擦, 为便于计算, 将摩擦力的广义力表示成矩阵形式:

$$Q^f = A \lambda \quad (6)$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= [A_1 \quad A_2], A_1 = 0 \in \mathbf{R}^{(3n+2) \times p}, A_2 \in \mathbf{R}^{3n+2}, A_2 = \left(d \frac{\partial s_r}{\partial q} \right) \\ \frac{\partial s_r}{\partial q} &= \left[\frac{\partial s_r}{\partial x_{c1}}, \frac{\partial s_r}{\partial y_{c1}}, \frac{\partial s_r}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial s_r}{\partial x_{cn}}, \frac{\partial s_r}{\partial y_{cn}}, \frac{\partial s_r}{\partial \theta_n}, \frac{\partial s_r}{\partial x^*}, \frac{\partial s_r}{\partial y^*} \right]^T \\ d &= \begin{cases} -\mu c \operatorname{sgn}(\lambda^*) \operatorname{sgn}(\dot{s}_r) & \dot{s}_r \neq 0 \\ -\mu' c \operatorname{sgn}(\lambda^*) \operatorname{sgn}(\ddot{s}_r) & \dot{s}_r = 0 \text{ and } \ddot{s}_r \neq 0 \\ [-\mu' c \operatorname{sgn}(\lambda^*), \mu' c \lambda^* \operatorname{sgn}(\lambda^*)] & \dot{s}_r = 0 \text{ and } \ddot{s}_r = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

因此利用增广法和 Baumgarte 稳定化方法^[8], 系统的动力学方程(1)可表示为:

$$\begin{bmatrix} M & -\Phi_q^T - A \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ -\Phi_q \dot{q} - \alpha \dot{\Phi} - \beta \Phi \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中: $\dot{\Phi}_q = d\Phi_q/dt$, $\dot{\Phi} = d\Phi/dt$, α, β 为大于零的常数. 该方程是分段光滑方程组. 对于单点摩擦的平面多体系统普遍适用. 对于相对运动轨迹为直线的运动约束面多点摩擦多体系统, 可由同样的方法得

到的摩擦力的广义力, 其形式与公式(6)类似.

2 动力学方程的特点

方程(7)的矩阵 A 中含 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$, $\operatorname{sgn}(\dot{s}_r)$ 和 $\operatorname{sgn}(\ddot{s}_r)$ 项, 系统在运动过程中, 这些项的符号会发生变化, 若能确定了这些项的符号, 方程(7)就是关于系统广义加速度 \ddot{q} 和 Lagrange 乘子 λ 的线性方程组, 应用线性方程组和常微分方程的数值计算方法就可以求解. 因此要数值求解该类方程组, 首先要确定符号函数 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$, $\operatorname{sgn}(\dot{s}_r)$ 和 $\operatorname{sgn}(\ddot{s}_r)$ 的值.

对于单点摩擦的多体系统, 若滑块的相对速度不等于零, 公式(6)中的 d 与滑块的相对速度有关, 而 $\operatorname{sgn}(\dot{s}_r)$ 是确定的值; 若滑块的相对速度等于零, 此时滑块所受的摩擦力为静摩擦力, 公式(6)中的 d 与滑块的相对加速度有关, 可应用摩擦趋势确定法^[9] 确定. 这样, 矩阵 A 只是系统的位形坐标和 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 的函数, 而计算时不能事先确定 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 的值, 可采用试算法确定 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 的值. 注意到: 虽然 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 的值有 ± 1 和 0 三种选择, 但对于 $\lambda^* = 0$ 的特殊情况, 无论 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 取何值, 都不会影响 $\lambda^* \operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 的值(该值仍然为零), 所以 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 可以只选择 $+1$ 和 -1 即可.

3 动力学方程的矩阵表示与算例

3.1 动力学方程的矩阵表示

若 $\Phi_q^T, \Phi_q^T + A$ 列满秩, 则方程(7)可表示为:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & -\Phi_q^T - A \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q \\ -\Phi_q \dot{q} - \alpha \dot{\Phi} - \beta \Phi \end{bmatrix} \quad (8)$$

由于方程(8)中的 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 有 $+1$ 和 -1 两种选择, 可先假设 $\operatorname{sgn}(\lambda^*) = +1$, 由方程(7)求出 \ddot{q} 和 λ , 若求出的 $\lambda^* \geq 0$, 则说明假设成立, 否则设 $\operatorname{sgn}(\lambda^*) = -1$, 由式(8)求出 \ddot{q} 和 λ . 但是, 当对 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 进行选择时, 若假设的 $\operatorname{sgn}(\lambda^*)$ 不成立, 由方程(8)求出的 \ddot{q} 是没有意义的, 为避免不必要的计算, 便于方程的求解, 有必要对方程(7)作进一步的推导, 由方程(7)可解得:

$$\lambda = -[\Phi_q M^{-1} (\Phi_q^T + A)]^{-1} [\Phi_q M^{-1} Q + \Phi_q \dot{q} + \alpha \dot{\Phi} + \beta \Phi] \quad (9)$$

$$\ddot{q} = M^{-1} (Q + A \lambda + \Phi_q^T \lambda) \quad (10)$$

由于 $\mathbf{R}^{n \times n}$ 矩阵求逆的计算工作量(乘除法次数)为 $O(n^3)$, $\mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^{n \times l}$ 矩阵相乘的计算工作量

(乘除法次数)为 $m \times n \times l^{[10]}$. 针对本文研究的多体系统,采用方程(8)每次计算 λ 的计算工作量(乘除法次数)为 $O((3n+p+3)^3)$,而采用式(9)每次计算 λ 的计算工作量(乘除法次数)为 $O((p+1)^3)$,可提高计算效率,并且用矩阵形式表示系统的动力学方程,便于编程计算.

考虑到在实际问题中的 λ^* 分段连续性,可将原来的试算法进行改进,即选取前一步的试算结果作为初选.若滑块相对速度等于零,则需要进行“sticking-slipping”判别,本文采用文献[9]给出的方法进行判别.

3.2 算例

设运动约束面单点摩擦多体系统如图2所示.设均质杆 OA 和 O_1B 质量分别为 m_1, m_2 ,长分别为 l_1, l_2 ,滑块 A 的质量为 m^* .机构在铅垂平面内运动,滑块可沿 O_1B 杆滑动.曲柄 OA 上作用有力偶,其力偶矩为 $M = M_{max} \sin \omega t$;滑块与滑道间的动、静滑动摩擦系数分别为 μ, μ' .其惯性坐标系的建立如图2所示, y 轴铅垂向上.设 $(x_{c1}, y_{c1}), (x_{c2}, y_{c2})$ 分别为杆 OA 和 O_1B 的质心坐标, (x^*, y^*) 为滑块 A 的坐标.则系统的位形坐标为 $(x_{c1}, y_{c1}, \theta_1, x_{c2}, y_{c2}, \theta_2, x^*, y^*)$.

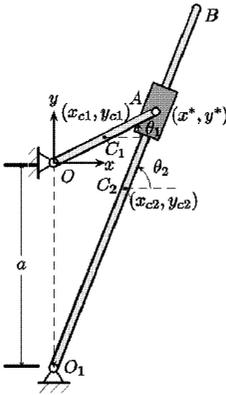


图2 曲柄摇杆机构图
Fig.2 crank rocker mechanism

应用局部方法,系统的约束方程可表示为:

$$\begin{cases} f_1 = x_{c1} - 0.5l_1 \cos \theta_1 = 0 \\ f_2 = y_{c1} - 0.5l_1 \sin \theta_1 = 0 \\ f_3 = x^* - x_{c1} - 0.5l_1 \cos \theta_1 = 0 \\ f_4 = y^* - y_{c1} - 0.5l_1 \sin \theta_1 = 0 \\ f_5 = x_{c2} - 0.5l_2 \cos \theta_2 = 0 \\ f_6 = y_{c2} - 0.5l_2 \sin \theta_2 + a = 0 \\ g = (y^* - y_{c2}) \cos \theta_2 - (x^* - x_{c2}) \sin \theta_2 = 0 \end{cases} \quad (11)$$

设随体坐标系的 x' 轴沿 O_1B 杆方向,由(4)式可得,滑块 A 相对于滑道的相对位置为:

$$s_r = (x^* - x_{c2}) \cos \theta_2 + (y^* - y_{c2}) \sin \theta_2$$

将上式对时间求一阶导数和二阶导数,并利用运动滑道的约束方程,得到滑块 A 相对于滑道的相对速度和相对加速度分别为:

$$v_r = \dot{s}_r = (\dot{x}^* - \dot{x}_{c2}) \cos \theta_2 + (\dot{y}^* - \dot{y}_{c2}) \sin \theta_2$$

$$a_r = \ddot{s}_r = (\ddot{x}^* - \ddot{x}_{c2}) \cos \theta_2 + (\ddot{y}^* - \ddot{y}_{c2}) \sin \theta_2 -$$

$$(\dot{x}^* - \dot{x}_{c2}) \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + (\dot{y}^* - \dot{y}_{c2}) \dot{\theta}_2 \cos \theta_2$$

摩擦力的广义力由公式(6)求得.

本算例有关参数为: $m_1 = 0.5 \text{ kg}, l_1 = 0.2 \text{ m}, m_2 = 1.5 \text{ kg}, l_2 = 0.6 \text{ m}, m^* = 2.0 \text{ kg}, a = 0.3 \text{ m}, \omega = (\pi/3) \text{ rad/s}$. 分以下几种情形进行数值仿真.

情形1. (不存在 sticking-slipping) 当摩擦系数比较小时,系统不会出现“sticking-slipping”现象.该机构在某些参数下,其稳态运动为周期运动,但在另一些参数下,其运动是混沌的.

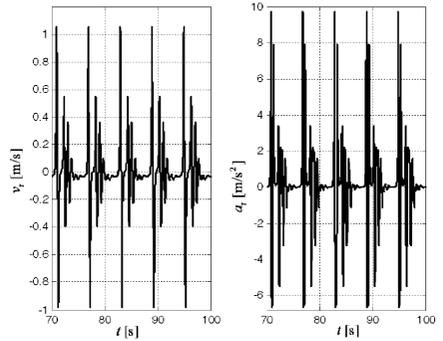


图3 滑块 A 相对于 O_1B 杆的相对速度、相对加速度

Fig.3 The time history of relative velocity and relative acceleration of slider A with respect to O_1B

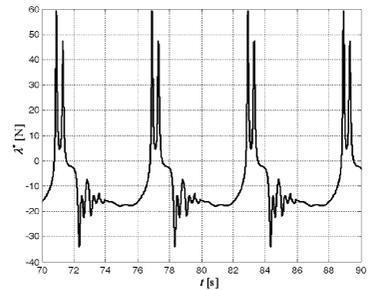


图4 λ^* 的时间历程

Fig.4 The time history of λ^*

设 $M_{max} = 2.0 \text{ N} \cdot \text{m}$, 初始状态为 $\theta_1 = 0.5 \text{ rad}, \dot{\theta}_1 = 0.0 \text{ rad/s}$, 消除暂态后,图3,图4分别为 $\mu = 0.1, \mu' = 0.08$ 时滑块 A 相对于摇杆 O_1B 的相对速度、相对加速度和 λ^* 的时间历程图,由数值仿真结果

可以看出机构在该参数下其稳态运动为周期运动;图 5 为 $\mu = 0.22, \mu' = 0.176$ 时 OA 杆转角和角速度的相图,由仿真结果可以看出机构在该参数下的运动是混沌的。

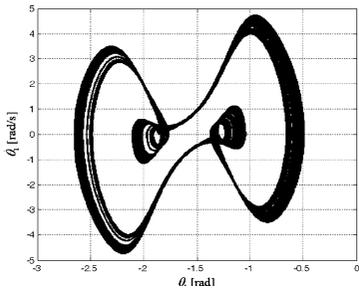


图 5 OA 杆转角和角速度的相图

Fig. 5 The phase diagram of angle and angular velocity of OA

情形 2. (存在 sticking - slipping) 随着摩擦系数的增大,该机构会出现“sticking - slipping”现象,在某些参数下其稳态运动为周期运动;但在另一些参数下,其运动是混沌的。



图 6 滑块 A 相对于 O_1B 杆的

相对速度、相对加速度及 λ^* 的时间历程

Fig. 6 The time history of relative velocity and relative acceleration of slider A with respect to O_1B , and the time history of λ^*

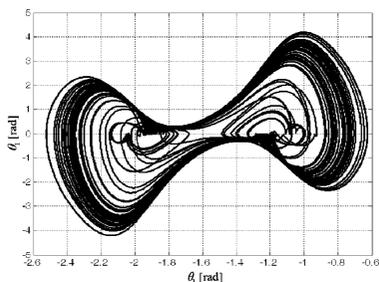


图 7 OA 杆转角和角速度的相图

Fig. 7 The phase diagram of angle and angular velocity of OA

设 $M_{max} = 2.0 \text{ N} \cdot \text{m}$, 初始状态为 $\theta_1 = 0.5 \text{ rad}, \dot{\theta}_1 = 0.0 \text{ rad/s}$, 消除暂态后,图 6 为 $\mu = 0.224, \mu' = 0.28$ 时滑块 A 相对于摇杆 O_1B 的相对速度、相对加速度以及 λ^* 的时间历程图,由图 6 可知机构消除暂态后作周期运动且出现了“sticking - slipping”现象;图 7 为

$\mu = 0.256, \mu' = 0.32$ 时 OA 杆转角和角速度的相图,机构在该参数下的运动是混沌的,并且存在“sticking - slipping”转换. 图 8 给出了系统随摩擦系数变化的分岔图. 由此可得在特定结构参数下,系统作周期或混沌运动时,摩擦系数的取值范围。

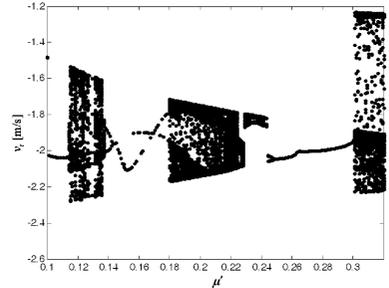


图 8 分岔图

Fig. 8 Bifurcation diagram

针对上述算例采用了不同的计算方法. 方法一直接采用方程(8)和原有的试算法进行计算;方法二根据动力学方程分段连续的特点,采用方程(8)和改进的试算法进行计算;方法三采用方程(9), (10)及改进的试算法进行计算;三种计算方法数值仿真 100s 所用 CPU 时间如表 1 所示。

表 1 用三种方法计算所用的 CPU 时间

Table 1 The CPU time of three methods

| Method of Compute | CPU Time |
|-------------------|----------|
| Method 1st | 86s |
| Method 2nd | 76s |
| Method 3rd | 29s |

由上表可以看出,采用方程(9), (10)及改进的试算法进行计算可提高计算效率。

4 结论

在多体系统中,考虑含摩擦的约束面作定轴转动或平面一般运动的情况,给系统动力学方程的建立和摩擦力的广义力一般表达式的推导带来困难. 本文采用笛卡尔坐标作为系统的位形坐标,应用第一类 Lagrange 方程建立了一类运动面双面约束单点摩擦的多体系统动力学方程,应用局部方法建立了系统的约束方程,使得动力学方程中的 Lagrange 乘子与系统的约束力一一对应,易于约束力和摩擦力的分析和计算. 为便于方程的数值求解,用矩阵形式给出了系统摩擦力的广义力的一般表达式;应用增广法将微分 - 代数方程转化为常微分方程,并对动力学方程进行了进一步推导,得到了求解 La-

grange 乘子的矩阵表达式,避免了不必要的计算,提高了计算效率;通过数值仿真分析了系统的动力学特性;采用这种方法建立动力学方程简便,且摩擦力的广义力的表达形式简洁.另外,本文的建模方法对相对运动轨迹为直线的运动约束面多点摩擦多体系统同样适用,由此得到的摩擦力的广义力的形式与公式(6)类似.

参 考 文 献

- 1 Klepp H J. Trial-and-error based method for the investigation of multi-body systems with Friction. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, 197(5):629 ~ 637
- 2 Klepp H J. The existence and uniqueness of solutions for a single-degree-of-freedom system with two friction affected sliding joints. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 185(2):364 ~ 371
- 3 王晓军,彭慧莲,王琪.具有双面约束单点摩擦多体系统的数值计算方法. *动力学与控制学报*, 2007, 05(4):320 ~ 324 (Wang Xiaojun, Peng Huilian, Wang Qi. A numerical algorithm for multibody systems with bilateral constraint and single frictional point. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 05(4), 320 ~ 324 (in Chinese))
- 4 王剑锋,王琪.含摩擦多体系统 Lagrange 方程的数值算法. *动力学与控制学报*, 2004, 2(2):58 ~ 61 (Wang Jianfeng, Wang Qi. The numerical method for Lagrange's equations of multibody system with dry friction. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(2):58 ~ 61 (in Chinese))
- 5 Clocker CH, Pfeiffer F. Multiple impacts with friction in rigid multi-body systems. *Nonlinear Dynamics*, 1995, 7:471 ~ 497
- 6 Pfeiffer F. Multi-body systems with unilateral constraints. *Journal Applied Mechanics*, 2001, 65(4):665 ~ 671
- 7 洪嘉振.计算多体系统动力学.北京:高等教育出版社, 1999 (Hong Jiazhen. Computational Dynamics of multibody system. Beijing: Higher Education Press, 1999 (in Chinese))
- 8 潘振宽,洪嘉振等.多体系统动力学微分-代数方程数值方法. *力学进展*, 1996, 26(1):28 ~ 40 (Pan Zhenkuan, Hong Jiazhen, et. al. On numerical algorithms for differential/ algebraic equations of motion of multibody systems. *Advances in Mechanics*, 1996, 26(1):28 ~ 40 (in Chinese))
- 9 Shihui Fu, Qi Wang. Estimating the largest lyapunov exponent in a multibody system with dry friction with using chaos synchronization. *Acta. Mechanica Sinica*, 2006, 22(3):277 ~ 283
- 10 徐士良,常用算法程序集(C语言描述)(第三版),北京:清华大学出版社, 2004 (Xu Shiliang. Common Algorithm Procedure Set (C Described) 3rd. ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2004 (in Chinese))

MODELING AND NUMERICAL ALGORITHM OF MULTI-BODY SYSTEM WITH FRICTION AND MOVING-BILATERAL-SLOT*

Peng Huilian Wang Qi Zhuang Fangfang

(Dynamics and Control Department, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract A method for dynamics modeling and numerical algorithm of multi-body system with friction and Moving-bilateral-Slot was provided. At first, the dynamic equations of the system were derived from the first kind of Lagrange's equations by using the Cartesian coordinates and local approach of constraint equations. A one-to-one correspondence between the constraint forces of the system and the Lagrange multipliers was established to analyze and compute the friction forces conveniently. Secondly, with the augmentation approach, the differential-algebraic equations were transformed into ordinary differential equations of partitioned matrix form, which can improve the calculating efficiency. Finally, a numerical example was given to prove the method to be effective.

Key words multi-body system, bilateral constraint, multiplier of Lagrange, dry friction

Received 28 July 2008, revised 11 December 2008.

* The project supported by the National Natural Science Foundation of China (10672007)