

# 大型动力系统的降维： 基于模态截断的非线性 Galerkin 方法\*

王晋麟 曹登庆 宋救淘

(哈尔滨工业大学航天学院, 哈尔滨 150001)

**摘要** 为了有效地求解大型动力系统, 现已提出了各种降维方法. 根据非线性 Galerkin 方法的求解思路, 我们将大型动力系统分解成三个子系统, 即“慢子系统”、“适速子系统”和“快子系统”. 在此基础上提出了改进的非线性 Galerkin 方法, 即: 在数值积分过程中将适速子系统的贡献导入慢子系统. 然后, 以一个含有立方非线性的 5 自由度强迫振动系统为例阐明了新方法的有效性.

**关键词** Galerkin 方法, 非线性系统, 降维, 后处理方法, 模态截断

## 引言

随着科学技术的进步, 现代机械的结构尺寸越来越大, 结构越来越轻, 连接结构变得极其复杂, 因此导致了复杂的非线性结构动力学问题. 对于这种复杂的结构需要建立其有限元模型进行动特性分析, 一般来说, 数学模型的规模越大, 自由度数越多, 则模型的精度越高, 然而对于高维非线性动力系统的分析还是十分困难, 即使利用数值模拟, 特别是分析其长时间动力学特性, 计算量仍然是巨大的. 于是人们积极寻求降维方法, 用一个低维的系统在定量和定性上近似取代原有系统. 降维方法的应用不仅可以提高动力学仿真的计算效率, 还便于控制的设计和实现<sup>[1]</sup>. 降维方法的思想就是找到一些变量组成原有系统的子集, 通过这些变量反映系统的动力学特性. 利用原有系统的一些特性采用什么方法获得这个子系统是降维的关键. 对于线性问题, 应用标准的 Galerkin 方法 (Galerkin 截断) 已经发展的很成熟, 虽然标准的 Galerkin 方法在非线性系统中仍然适用, 但是必须取足够多的模态, 否则很难保证精度, 甚至可能得出与原系统不一样的定性结果. 为了克服标准 Galerkin 方法的不足, 人们提出了非线性 Galerkin 方法, 它是基于惯性流形和近似惯性流形的概念提出来的<sup>[2-4]</sup>, 其核心思想是利用惯性流形获得高频分量和低频分量之间的关系, 并将这种关系代入到低维的子系统, 也就是相当于构建一个考虑高频分量的贡献的低维系统.

由于非线性 Galerkin 方法要求在每一步积分中包含来自于近似惯性流形的非线性因素, 其耗费的计算时间与直接积分原系统相比没有明显的优势<sup>[5]</sup>. 为了克服非线性 Galerkin 方法耗时的不足, 且保证对标准 Galerkin 方法的改进, Garcia - Archilla 等<sup>[6]</sup>提出了所谓后处理 Galerkin 方法 (Postprocessing Galerkin method), 试图综合标准与非线性两种 Galerkin 方法的优点, 即既象标准 Galerkin 方法一样简单, 又能提高精度. 并且应用这一方法求解了周期边界条件下流体动力学的耗散方程<sup>[7]</sup>. 有关非线性 Galerkin 方法和后处理 Galerkin 方法的优缺点可参见 Rega and Troger<sup>[8]</sup> 和 Matthies and Meyer<sup>[9]</sup> 的评述, 及其在风机有限元模型的降维中的应用<sup>[9]</sup>.

后处理 Galerkin 方法首先将动力学系统投影到低维空间上, 然后采用数值积分到一个给定的时间, 最后通过一个校正因子将高维动力系统的影响计入到用物理坐标表示的输出结果. 这样的方式在某些情况下是可行的, 而且与标准的 Galerkin 方法比较也可以提高求解的精度<sup>[8]</sup>. 然而, 用后处理 Galerkin 方法求得的解只能体现低维系统的动力学特性, 在某些情况下并不能提高解的精度, 这一点可从本文给出的算例予以证实.

根据非线性 Galerkin 方法的求解思路, 我们将大型动力系统分解成三个子系统, 即“慢子系统”、“适速子系统”和“快子系统”. 在此基础上提出了改进的非线性 Galerkin 方法, 即: 在数值积分过程

中将适速子系统的贡献导入慢子系统. 一般来说, 应用有限元方法建立的多自由度非线性动力学系统, 其动力学性质可由前几阶模态的动力学性质主导. 因此, 我们取“适速子系统”的维数稍大于或等于“慢子系统”的维数, 而“快子系统”的维数比“慢子系统”的维数要高得多, 即: 将相对高频的模态振动对低频振动影响考虑在内. 新方法与非线性 Galerkin 方法相比较, 不但可以达到几乎同样的精度, 而且可以节省大量的计算时间.

## 1 状态空间的非线性 Galerkin 方法

为了便于介绍本文提出的改进的非线性 Galerkin 方法, 考虑由下述微分方程描述的非线性动力学系统:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x \in R^n \quad (1)$$

设  $u \in R^m$ ,  $v \in R^p$  和  $w \in R^q$  分别是  $m$  维子集,  $p$  维子集和  $q$  维子集 ( $m + p + q = n$ ). 这三个子集分别对应上节所描述的三个子系统, 这样方程(1)通过变换可以写成下面的形式:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = l(u, v, w, t) \\ \frac{dv}{dt} = s(s, v, w, t) \\ \frac{dw}{dt} = h(u, v, w, t) \end{cases} \quad (2)$$

向量  $(l(u, v, w, t), s(u, v, w, t), h(u, v, w, t))^T$  对应方程(1)中的  $f(x, t)$ . 一般情况下(2)中的  $m$  维子系统的解是原系统(1)的一个近似解. 标准 Galerkin 方法认为  $v$  和  $w$  近似为 0. 方程(2)变成下式:

$$\frac{du}{dt} = h(u, 0, 0, t) \quad (3)$$

而非线性 Galerkin 方法则是试图寻找  $u$  和  $v$ 、 $w$  的关系, 将  $u$  表示成  $v$  和  $w$  的函数. 然而通常很难找到他们之间的精确关系, 只能采用反映它们之间近似关系的近似惯性流形. 求近似惯性流形的方法很多, 文献[10]中提供了一个简单实用的方法. 作者认为  $v$  和  $w$  的时间导数相对于  $v$  和  $w$  可以忽略, 然后计算这个准稳态近似惯性流形. 这样方程(2)可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = l(u, v, w, t) \\ 0 = s(s, v, w, t) \\ 0 = h(u, v, w, t) \end{cases} \quad (4)$$

通过(4)中的  $s(u, v, w, t) = 0, h(u, v, w, t) = 0$  我们可以得到  $u$  和  $v$ 、 $w$  的近似关系. 我们认为“快子系统”对系统的贡献和影响微乎其微, 令  $w$  为 0. 得到如下系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = l(u, v, t) \\ 0 = s(s, v, t) \end{cases} \quad (5)$$

方程(5)具体处理过程如下: 首先将非线性函数写成  $f(x, t) = Ax + g(x, t)$ , 其中  $Ax$  是  $f(x, t)$  的线性部分,  $g(x, t)$  是  $f(x, t)$  的非线性部分. 三个子系统的划分通过特征值的比较来实现. 对于(1)的解可以通过坐标变换表示成如下形式:

$$x = U_m u + V_p v + W_q w \quad (6)$$

其中  $U_m = [y_1, \dots, y_m]$  为矩阵  $A$  的前  $m$  个特征向量组成的矩阵, 对应“慢子系统”,  $V_p = [y_{m+1}, \dots, y_{m+p}]$  是矩阵  $A$  的  $p$  个特征向量组成的矩阵, 对应“适速子系统”,  $W_q = [y_{m+p+1} \dots y_{m+p+q}]$  为矩阵  $A$  剩余  $q$  个特征向量组成的矩阵, 对应“快子系统”, 对于实际系统其维数要远远高于  $U_m$  和  $V_p$ . 计算对应于  $A^T$  的特征向量  $\tilde{U}_m$ 、 $\tilde{V}_p$  和  $\tilde{W}_q$ . 将(6)代入到(1)并在方程两边同时左乘  $\tilde{U}_m^T$ 、 $\tilde{V}_p^T$  和  $\tilde{W}_q^T$  我们可以得到下面的微分方程:

$$\frac{du}{dt} = \tilde{U}_m^T A U_m u + \tilde{U}_m^T g(U_m u + V_p v + W_q w, t) \quad (7a)$$

$$\frac{dv}{dt} = \tilde{V}_p^T A V_p v + \tilde{V}_p^T g(U_m u + V_p v + W_q w, t) \quad (7b)$$

$$\frac{dw}{dt} = \tilde{W}_q^T A W_q w + \tilde{W}_q^T g(U_m u + V_p v + W_q w, t) \quad (7c)$$

方程(7a)、(7b)和方程(7c)通过非线性项耦合在一起. 忽略“快子系统”的影响, 令  $w = 0$ , 同时考虑适速子系统的影响令  $v$  的时间导数为 0, 则方程(7b)可写成如下形式:

$$v = -J^{-1} \tilde{V}_p^T g(U_m u + V_p v, t) \quad (8)$$

其中  $J = \tilde{V}_p^T A V_p$ . 方程(8)是一个非线性的超越函数, 可以采用迭代的方式得到其近似解. 迭代格式如下:

$$v_1 = -J^{-1} \tilde{V}_p^T g(U_m u, t),$$

$$v_2 = -J^{-1} \tilde{V}_p^T g(U_m u + V_p v, t), \dots$$

## 2 振动方程的改进的非线性 Galerkin 方法

一般的振动方程可写成如下形式:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F(x, t) \quad (9)$$

通常  $M$  和  $K$  是对称的正定矩阵, 假设采用比例阻

尼,则方程(9)的左边可以在模态坐标下解耦.令

$$x = \Xi \xi = \Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta \quad (10)$$

其中:  $\Phi_m = [\varphi_1, \dots, \varphi_m]$ ,  $\Psi_p = [\varphi_{m+1}, \dots, \varphi_{m+p}]$ ,  $Z_q = [\varphi_{m+p+1}, \dots, \varphi_{m+p+q}]$ ,  $\Xi = [\Phi_m, \Psi_p, Z_q]$ .  $\varphi_i$  是  $A = M^{-1}K$  的特征向量,也称为振型.对于非标准的振动方程即  $M$  或  $K$  不是对称的正定矩阵,如果是非亏损的,我们仍然可以采用的左右特征向量进行解耦,关于这个问题以后再作讨论.

将(10)代入(9),并在两端左乘  $\Xi^T$  得到如下方程:

$$\bar{M} \ddot{\xi} + \bar{C} \dot{\xi} + \bar{K} \xi = \bar{f}(\Xi \xi, t) \quad (11)$$

其中  $\bar{M}$ ,  $\bar{C}$  和  $\bar{K}$  都是对角矩阵,它们的对角线元素分别为:  $\bar{m}_i = \varphi_i^T M \varphi_i$ ,  $\bar{c}_i = \varphi_i^T C \varphi_i$  和  $k_i = \varphi_i^T K \varphi_i$ . 广义力  $\bar{f} = \varphi_i^T(\Xi \xi, t)$ . 类似于方程(2), (11)式还可以写成如下形式:

$$\bar{M}_m \ddot{\phi} + \bar{C}_m \dot{\phi} + \bar{K}_m \phi = \bar{f}_m(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \quad (12a)$$

$$\bar{M}_p \ddot{\psi} + \bar{C}_p \dot{\psi} + \bar{K}_p \psi = \bar{f}_p(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \quad (12b)$$

$$\bar{M}_q \ddot{\zeta} + \bar{C}_q \dot{\zeta} + \bar{K}_q \zeta = \bar{f}_q(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \quad (12c)$$

其中:

$$\bar{M} = \begin{bmatrix} \bar{M}_m & 0 & 0 \\ 0 & \bar{M}_p & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_q \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_m & 0 & 0 \\ 0 & \bar{C}_p & 0 \\ 0 & 0 & \bar{C}_q \end{bmatrix}$$

$$\bar{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_m & 0 & 0 \\ 0 & \bar{K}_p & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K}_q \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = \begin{bmatrix} \bar{f}_m \\ \bar{f}_p \\ \bar{f}_q \end{bmatrix}$$

参考(4)式令  $\dot{\xi} = \ddot{\xi} = \dot{\psi} = \ddot{\psi} = 0$ , 我们可以得到二阶振动方程的准稳态近似惯性流形:

$$\begin{aligned} \bar{K}_p \psi &= \bar{f}_p(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \\ \bar{K}_q \zeta &= \bar{f}_q(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \end{aligned} \quad (13)$$

这样处理完的系统可写成如下的微分代数方程组:

$$\begin{cases} \bar{M}_m \ddot{\phi} + \bar{C}_m \dot{\phi} + \bar{K}_m \phi = \bar{f}_m(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \\ \bar{K}_p \psi = \bar{f}_p(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \\ \bar{K}_q \zeta = \bar{f}_q(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi + Z_q \zeta, t) \end{cases} \quad (14)$$

方程(14)虽然比原系统计算容易且快速,但是它仍然是个高维系统,微分方程和代数方程的个数相加仍然是  $n$ . 在求解(14)的微分方程过程中,每一步都要迭代计算(14)的两个超越方程.用上节叙

述的方法改进这个过程,令  $\zeta = 0$ , 完全忽略“快子系统”的影响,得到如下系统

$$\begin{cases} \bar{M}_m \ddot{\phi} + \bar{C}_m \dot{\phi} + \bar{K}_m \phi = \bar{f}_m(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi, t) \\ \bar{K}_p \psi = \bar{f}_p(\Phi_m \phi + \Psi_p \psi, t) \end{cases} \quad (15)$$

方程(15)中的代数方程可以得到  $m$  个低频模态和  $p$  个相对高频模态之间的关系,我们将二者的关系代入微分方程中就可以得到一个考虑相对高频模态振动影响的  $m$  维低维系统.

### 3 非线性 Galerkin 方法二次降维应用算例

考虑图1所示的质量-弹簧系统,其中质量块  $m_1$  和  $m_2$  之间、 $m_4$  和  $m_5$  之间由非线性弹簧联结,其余为线性弹簧,质量块  $m_2$  和  $m_4$  分别受到简谐激振力  $F_0 \cos(\omega t + \pi/6)$  和  $F_0 \cos(\omega t - \pi/6)$  的作用.系统的运动微分方程可写为:

$$M \ddot{x} + C \dot{x} + Kx = f(x, t) \quad (16)$$

采用比例阻尼,即,  $C = \alpha M + \beta K$ .

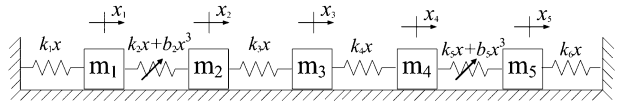


图1 五自由度的非线性弹簧-质量系统

Fig. 1 5-DoF nonlinear spring-mass system

系统参数选取如下:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_5 = 400 \text{ kg}, m_2 = 160 \text{ kg}, m_3 = 100 \text{ kg}, m_4 = 200 \text{ kg} \\ k_1 &= k_6 = 10500 \text{ N/m}, k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 2500 \text{ N/m} \\ b_2 &= b_5 = 2000 \text{ N/m}^3. F_0 = 120 \text{ N}. \end{aligned}$$

振动方程(16)是一个5自由度的非线性动力学模型,它有5阶固有频率.为了采用改进的 Galerkin 方法进行降维处理,这里取  $m = 1, p = 2, q = 2$ , 将原系统降维至1个自由度,即保留一阶模态,研究一阶共振情况.

首先用 Rouge-Kutta 法直接求解原系统(16)的稳态解,将其作为精确解.然后利用相同的数值算法求解降维得到的单自由度系统的动态响应,并与数值解比较.

幅频曲线可以直观的反映振动系统的动力学特性,而且物理概念清晰,因此本文通过比较原系统和降维系统的幅频曲线来评价降维效果.选取第4个质量块的位移作为分析对象,图2是考虑激振力的频率不断增加时的幅频曲线,图3是考虑激振力频率不断降低时的幅频曲线.在图2和图3中我们发现激振

力频率低于  $2.75 \text{ (rad/s)}$  也就是一阶固有频率  $0.9$  倍时原系统的幅值大小和各种降维系统的幅值都很接近,但是当外激励的频率继续增加的时候,标准 Galerkin 方法所得幅频曲线开始偏离原系统幅频曲线,而非线性 Galerkin 方法和改进的非线性 Galerkin 所得的幅频曲线仍与原系统保持一致,而且一直到原系统的共振峰。由于降维带来的误差,或多或少会造成共振点的飘移,从图 2 看出,标准 Galerkin 方法飘移最明显,其次是改进的非线性 Galerkin 方法,非线性 Galerkin 方法飘移最小。改进的非线性 Galerkin 方法的飘移虽然比非线性 Galerkin 方法稍大,但是二者的差异不明显,特别是在频率降低的时候,如图 3 所示。

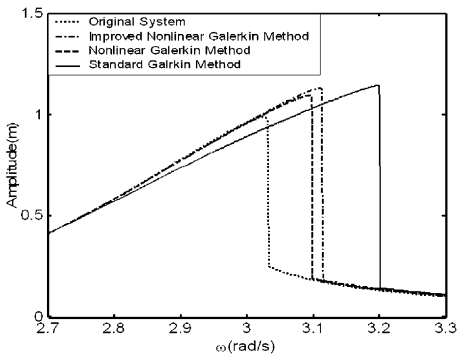


图 2 激振力频率缓慢增加时的频率响应曲线  
Fig. 2 Frequency - response curves when the frequency of the excitation slowly varied up

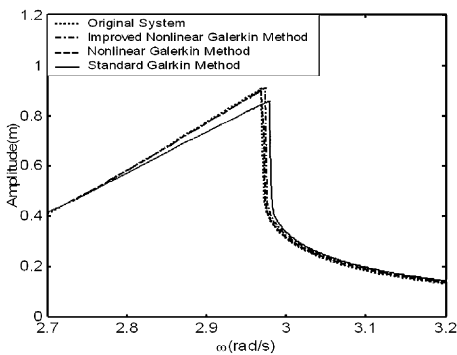


图 3 激振力频率缓慢减小时的频率响应曲线  
Fig. 3 Frequency - response curves when the frequency of the excitation slowly varied down

在非线性系统中由于对初值的敏感性会造成升降频率所对应的幅频特性曲线在共振区形成滞回环,图 4 给出不同方法所得的滞回环并和原系统(点划线)的滞回环进行了对比,其中图 4(a) 将后处理 Galerkin 方法和标准 Galerkin 方法放在一起比较。从图 4 可以看出,标准 Galerkin 方法和后处理 Galerkin 方法的滞回环最大最明显(图 4(a)),

非线性 Galerkin 方法(图 4(b))和改进的非线性 Galerkin 方法(图 4(a))的滞回环与标准的非线性 Galerkin 方法相比较有明显的改进。

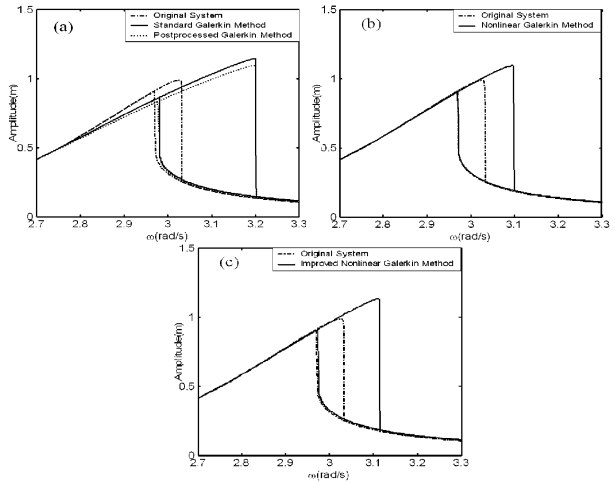


图 4 频率响应曲线滞回环对比

Fig. 4 The comparison of the hysteresis loops in frequency response curves

值得注意的是,后处理 Galerkin 方法得到的滞回环和标准 Galerkin 方法得到的滞回环基本一致,说明后处理 Galerkin 方法在系统共振区的误差没有明显改善,其频率飘移的幅度和标准 Galerkin 方法一样,而且经过后处理以后幅值误差有所放大,因此后处理 Galerkin 方法在该算例中失效。

## 4 结论

本文将大型动力系统分解成三个子系统,即“慢子系统”、“适速子系统”和“快子系统”。在此基础上提出了改进的非线性 Galerkin 方法,即在数值积分过程中将适速子系统的贡献导入慢子系统。文中以一个 5 自由度的非线性强迫振动系统为例比较了传统的 Galerkin 截断方法、非线性 Galerkin 方法和改进的非线性 Galerkin 方法的精度和有效性。结果表明:

(a) 与标准的 Galerkin 方法相比较,新方法极大地提高了精度,且不需要增加大量的计算时间;

(b) 与非线性 Galerkin 方法相比较,新方法不但可以达到几乎同样的精度,而且可以节省大量的计算时间。尤其对于现代工程问题中用有限元方法建立的大规模非线性动力系统,快子系统的自由度将比慢子系统和适速子系统的自由度大得多,改进的 Galerkin 方法的优越性将更为明显。

(c) 利用改进的 Galerkin 方法,有可能得到计入适速子系统的影响的适合于定性分析的慢子系统,从而实现利用低维系统揭示高维非线性动力系统的分岔和各种非线性动力学现象的目的。

## 参 考 文 献

- 1 章敏,蔡国平. 柔性板的模态价值降阶及其主动控制研究. 动力学与控制学报, 2008, 6(4): 348 ~ 352 (Zhang Min, Cai Guoping. Modal cost reduction and active control of a flexible plate. *Journal of dynamics and control*, 2008, 6(4): 348 ~ 352 (in Chinese))
- 2 Foias C, Sell G R, Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equation. *Journal of Differential Equations*, 1988, 73(3): 309 ~ 353
- 3 Foias C, Manley O, Temam R. Iterated approximate inertial manifolds for Navier-Stokes equations in 2-D. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1993, 178: 567 ~ 583
- 4 Sthindl A and Troger H. Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics. *International journal of solids and structures*, 2001, 38: 2131 ~ 2147
- 5 Sansour C, Wriggers P, and Sansour J. A finite element post-processed Galerkin method for dimensional reduction in the non-linear dynamics of solids: Applications to shells. *Computational Mechanics*, 2003, 32: 104 ~ 114
- 6 Garcia-Archilla B, Novo J, Titi E S. Postprocessing the Galerkin method: a novel approach, to approximate inertial manifolds. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1998, 35: 941 ~ 972
- 7 Garcia-Archilla B, Novo J, Titi E S. An approximate inertial manifolds approach to postprocessing the Galerkin method for the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, 1999, 68: 893 ~ 911
- 8 Rega G and Troger H. Dimension reduction of dynamical systems: methods, models, applications. *Nonlinear Dynamics*, 2005, 41: 1 ~ 15
- 9 Matthies H G. and Meyer M. Nonlinear Galerkin methods for the model reduction of nonlinear dynamical systems. *Computers and Structures*, 2003, 81: 1277 ~ 1286
- 10 Titi E S. On approximate inertial manifolds to the Navier-Stokes equations. *Journal of mathematical analysis and applications*, 1990, 149: 540 ~ 570

# DIMENSIONAL REDUCTION OF LARGE DYNAMICAL SYSTEMS: AN NONLINEAR GALERKIN METHOD BASED ON MODEL TRUNCTION\*

Wang Jinlin Cao Dengqing Song Mitao

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

**Abstract** In order to solve the large dynamical system effectively, various model reduction methods have been proposed. By analogy with the nonlinear Galerkin methods, a large dynamical system was split into a 'slowly' subsystem, a 'moderately' subsystem, and a 'quickly' subsystem. Accordingly, an improved nonlinear Galerkin method was developed by slaving the contribution of the moderate subsystem to the slow subsystem during numerical integration. Then, a typical 5 - degree - of - freedom system with cubically nonlinear stiffness was given to show the accuracy of the new method.

**Key words** Galerkin method, nonlinear systems, dimension reduction, post - processing method, model truncation