

非线性弦振动方程的多辛算法

胡伟鹏^{1,2} 邓子辰^{1,3} 韩松迎⁴ 范玮²

(1. 西北工业大学力学与土木建筑学院, 西安 710072) (2. 西北工业大学动力与能源学院, 西安 710072)

(3. 大连理工大学工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116023) (4. 陕西理工学院材料科学与工程学院, 汉中 723003)

摘要 利用 Hamiltonian 空间体系下的多辛理论研究了非线性弦微小横向振动问题的数值解法. 基于 Bridges 意义下的多辛积分理论, 首先推导了非线性弦振动方程的一阶多辛偏微分方程组及其多种守恒律, 随后构造了一种等价于 Box 多辛格式的新隐式多辛格式, 最后, 运用该多辛格式对非线性弦振动方程进行了数值模拟, 并将模拟结果与吕克璞等人得到的解析解进行比较. 数值实验结果显示利用本文构造的多辛格式得到的数值解与吕克璞等人得到的解析解非常接近, 这说明该多辛格式能够较为精确地模拟非线性弦振动问题, 同时数值结果也反映出了多辛方法的两大优点: 精确的保持多种守恒律和良好的长时间数值行为.

关键词 多辛积分, 非线性弦, 守恒律

引言

弦振动方程是数学物理方程中的经典方程之一. 对于非线性弦的横向微小振动问题, 谷内俊弥和西原功修早已给出了相应的偏微分方程描述^[1], 如同其它非线性偏微分方程一样, 其解析解难以得到. 近来, 吕克璞等人首先利用变分原理推导出了非线性弦振动方程, 从能量角度赋予了该方程明确的物理意义, 并成功的运用减缩摄动方法将其转化为熟悉的 KdV 方程, 从而得到了其近似解析解; 随后, 吕克璞、石玉仁、张桂成等人提出了寻找某些非线性发展方程精确孤立波解的双曲函数法, 并成功的求得了非线性弦振动方程及其他非线性发展方程的一些孤波解^[2,3]; 然而, 非线性弦振动方程的数值解法却未见报道.

本文基于 Bridges 意义下的多辛积分理论^[4-6], 推出了非线性弦振动方程的一阶多辛偏微分方程组的形式, 并给出了多种守恒律, 随后构造了等价于 Box 格式的多辛格式, 最后利用该格式对非线性弦振动进行了数值模拟, 为非线性弦振动问题的研究提供了新的途径.

1 非线性弦振动方程的多辛形式及其守恒律

哈密顿系统的一系列几何特性, 如辛结构形

式, 近年来得到了广泛的研究. 为了将保结构理论应用于无穷维哈密顿体系求解, Bridges 等提出了多辛以及多辛积分方法理论^[4-6], 其基本思想是设计一种在每一步迭代中保持系统的某种固有的几何局部特性的数值方案. 基于此, 许多保守型的偏微分方程, 如 KdV 方程、膜自由振动方程等等, 都存在能够较好保持守恒律的多辛格式^[7-11].

考虑如下的非线性弦振动方程:

$$\partial_{tt}u - 2a^2 \partial_x u \partial_{xx}u - 2\mu \partial_{xxxx}u = 0 \quad (1)$$

引入正则动量: $\partial w = v, \partial_t u = \partial_x v, \partial_x u = q$, 并定义状态变量 $z = [u, v, w, p]^T$, 方程(1)就转化为以下多辛结构

$$M \partial_t z + K \partial_x z = \nabla_z S(z) \quad (2)$$

式中, $S(z)$ 为 Hamiltonian 函数:

$$S(z) = a^2 \iint (\partial_x u)^2 dx du - \frac{1}{2} v^2 + \mu p^2 \quad (3)$$

M, K 为反对称矩阵:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2\mu \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2\mu & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

多辛结构(2)的多种守恒律一直是数学家和力学工作者关注的焦点是因为这些守恒律的存在标志着基于多辛结构的多辛算法能够精确地保持

原系统的诸多几何性质. 以下将详细给出三种常见的守恒律^[4].

对应于多辛结构(2), 利用变分原理可以得到其多辛守恒律:

$$\partial_t \omega + \partial_x k = 0 \quad (4)$$

其中, ω 和 k 是预辛形式:

$$\omega = dz \Lambda M dz / 2, \quad k = dz \Lambda K dz / 2$$

将其展开, 得到非线性弦振动方程的多辛守恒律:

$$\partial_t (du \Lambda dv) + \partial_x (2\mu dp \Lambda du + dw \Lambda dv) = 0 \quad (5)$$

式(2)两端对 $\partial_t z$ 做内积, 得:

$$\begin{aligned} & \langle \partial_t z, M \partial_t z \rangle + \langle \partial_t z, K \partial_x z \rangle = \\ & \langle \partial_t z, \nabla_z S(z) \rangle \end{aligned} \quad (6)$$

由矩阵 M 的反对称性可得: $\langle \partial_t z, M \partial_t z \rangle = 0$, 同时注意到:

$$\begin{aligned} \langle \partial_t z, K \partial_x z \rangle &= \frac{1}{2} \partial_t \langle z, K \partial_x z \rangle + \\ & \frac{1}{2} \partial_x \langle \partial_t z, K z \rangle, \quad \langle \partial_t z, \nabla_z S(z) \rangle = \partial_t S(z) \end{aligned}$$

将其代入(6)式, 得到多辛结构(2)的局部能量守恒律:

$$\partial_t e + \partial_x f = 0 \quad (7)$$

式中: 能量密度 $e = S(z) - z^T K \partial_x z / 2$ 以及能流量 $f = z^T K \partial_t z / 2$. 将其展开, 得到方程(1)的局部能量守恒律:

$$\begin{aligned} \partial_t [a^2 \iint (\partial_x u)^2 dx du - v^2 / 2 + \mu p^2 - \mu p \partial_x u - \\ (w \partial_x v - v \partial_x w) / 2 + \mu u \partial_x p] + \partial_x [\mu p \partial_t u + \\ (w \partial_t v - v \partial_t w) / 2 - \mu u \partial_t p] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式(2)两端对 $\partial_x z$ 做内积, 同理可以得到多辛结构(2)的局部动量守恒律:

$$\partial_t h + \partial_x g = 0 \quad (9)$$

其中: $h = z^T M \partial_x z / 2, g = S(z) - z^T M \partial_t z / 2$. 将其展开, 得到方程(1)的局部动量守恒律:

$$\begin{aligned} \partial_t (-w \partial_x u + u \partial_x w) / 2 + \partial_x [a^2 \iint (\partial_x u)^2 dx du - \\ v^2 / 2 + \mu p^2 - (-w \partial_t u + u \partial_t w) / 2] = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

2 Box 多辛格式及其等价形式

众所周知, 对于常微分方程组, 中点格式是构造其隐式差分辛格式的最简单的方法, 它也是最低阶的 Gauss - Legendre 离散格式^[4]. 因此, 本文采用源自于中点格式的 Box 多辛格式来模拟非线性弦

振动方程更能表现出多辛算法的优点, 同时其计算量也是最小的.

首先, 取 t 方向的步长 Δt , x 方向的步长 Δx , 对区域进行均匀剖分, 状态函数 $z(x, t)$ 在网格点 (x_i, t_j) 处的近似值表示为 z_i^j ; 随后, 利用隐式中点公式分别在 t 方向和 x 方向对多辛方程组(2)进行离散; 最后, 联立这两个方向的离散结果得到 Box 多辛格式:

$$\begin{aligned} M(z_{i+1/2}^{j+1} - z_{i+1/2}^j) / \Delta t + K(z_{i+1}^{j+1/2} - z_{i+1}^{j-1/2}) / \Delta x = \\ \nabla_z S(z_{i+1/2}^{j+1/2}) \end{aligned} \quad (11)$$

式中: $z_i^{j+1/2} = (z_i^{j+1} + z_i^j) / 2, z_{i+1/2}^j = (z_{i+1}^j + z_i^j) / 2, z_{i+1/2}^{j+1/2} = (z_{i+1}^{j+1} + z_{i+1}^j + z_i^{j+1} + z_i^j) / 4$ 等.

将 $M, K, z, S(z)$ 代入格式(11)并削去中间变量 v, w 和 p , 得到格式(11)的等价多辛格式:

$$\begin{aligned} \frac{\delta_x^2}{2\Delta t^2} (u_{i+2}^{j+1} + u_{i+2}^j + 4u_{i+1}^{j+1} + 4u_{i+1}^j + 6u_i^{j+1} + 6u_i^j + \\ 4u_{i-1}^{j+1} + 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^{j+1} + u_{i-2}^j) - \frac{\mu \delta_x^4}{4\Delta x^4} (u_{i+2}^{j+1} + \\ u_{i+2}^j - 4u_{i+1}^{j+1} - 4u_{i+1}^j - 10u_i^{j+1} - 10u_i^j - 4u_{i-1}^{j+1} - \\ 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^{j+1} + u_{i-2}^j) = a^2 [(\delta \bar{u}_{i+1}^{j+1})^2 - \\ (\delta \bar{u}_{i+1}^j)^2 - (\delta \bar{u}_i^{j+1})^2 + (\delta \bar{u}_i^j)^2]_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (12)$$

式中: $\bar{u}_i^j = (u_i^j + u_i^{j+1} + u_{i+1}^j + u_{i+1}^{j+1}) / 4, (\bar{u}_i^j)_{\bar{x}} = \delta_x u_i^j / \Delta x$ 及中心差商算子: $\delta_x^4 u_i^j = u_{i+2}^j - 4u_{i+1}^j + 6u_i^j - 4u_{i-1}^j + u_{i-2}^j, \delta_x^2 u_i^j = u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j$ 等.

由于 Box 格式是多辛的^[4], 因此, 其等价多辛格式(12)满足离散的多辛守恒律:

$$\begin{aligned} (du_{i+1/2}^{j+1} \Lambda dw_{i+1/2}^{j+1} - du_{i+1/2}^j \Lambda dw_{i+1/2}^j) / \Delta t + \\ (2\mu dp_{i+1}^{j+1/2} \Lambda du_{i+1}^{j+1/2} - 2\mu dp_i^{j+1/2} \Lambda du_i^{j+1/2} + \\ dw_i^{j+1/2}) \end{aligned} \quad (13)$$

类似地可以写出局部能量守恒律和局部动量守恒律的离散形式.

3 数值实验

为了验证格式(12)的有效性, 考虑如下非线性弦振动方程的初值问题:

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - 2\partial_x u \partial_{xx} u - \partial_{xxxx} u = 0 \\ u(0, x) = 12 \tanh(2x) \quad -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (14)$$

该初值问题存在如下的孤立波解^[2,3]:

$$u(t, x) = 12 \tanh(2x - 8t) \quad (15)$$

在 $[-20, 20]$ 内, 取时间步长 $\Delta t = 0.005$, 空间步长 $\Delta x = 0.002$ 模拟该孤子解, 模拟过程中, 第一

层和第二层采用精确解. 图1给出了该孤子解模拟的结果 $(x, t) \in [-20, 20] \times [0, 100]$.

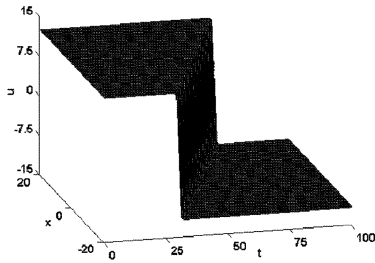


图1 孤立波解数值波形图

Fig. 1 Numerical wave form of the soliton

为了表现多辛算法的保结构性质,我们依据参考文献[5]的方法得到了局部能量误差和局部动量误差如图2和图3;同时,为了反映多辛算法的高精度特点,表1给出了 $t=30$ 时刻和时刻的部分数值解与精确解.

表1 精确解与数值解结果比较

Table 1 Comparison between the numerical solution and exact solution

Nod	$t=30$		$t=60$	
	exact solution	numerical solution	exact solution	numerical solution
1	12	12	12	12.0000003
2	10.9919516	10.9919518	8.2573591	8.2573590
3	8.8366743	8.8366743	5.0372350	5.0372354
4	4.2263195	4.2263195	0	0
5	0	-0.0000002	-3.1000483	-3.1000483
6	-7.4378247	-7.4378245	-8.8639611	-8.8639610
7	-9.9516448	-9.9516448	-11.2744131	-11.2744135
8	-12	-11.9999999	-12	-12

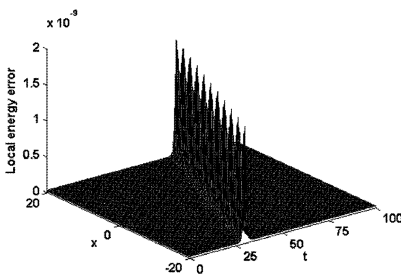


图2 局部能量误差($t \in [0, 100]$)

Fig. 2 Local energy error ($t \in [0, 100]$)

从图1和表1可以看出,利用格式(12)能够精确地模拟原孤立波解的波形,并保持原孤波解的波形和波速不变.由图2和图3可以看出,多辛格式(12)不仅能够很好地模拟原孤立波解的波形,保持原孤波解的波形保持不变,而且能够很好的长时间保持系统的局部性质(局部能量和局部动量),

这正是多辛积分算法的优点所在.

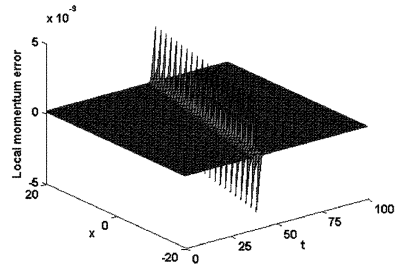


图3 局部动量误差($t \in [0, 100]$)

Fig. 3 Local momentum error ($t \in [0, 100]$)

4 结论

本文基于 Hamiltonian 空间体系的多辛理论导出了非线性弦振动方程的多辛形式及其多种守恒律,并构造了其 Box 多辛离散格式的等价形式.孤立波解数值模拟的结果表明:本文构造的多辛格式能够精确地模拟该孤立波解,具有良好的长时间数值行为及稳定性,同时能较好的保持系统的局部能量和局部动量特性,为进一步研究非线性弦的振动特征研究提供了新的途径.

参考文献

- 谷内俊弥,西原功修.非线性波.徐福元,张家泰,丁启明(译).北京:原子能出版社,1981(Taniuti T, Nishihara. Nonlinear Wave Propagation. Xu Fuyuan, Zhang Jiatai, Ding Qiming (transl). Beijing: Atomic Energy Press, 1981 (in Chinese))
- 张桂戎,李志斌,段一士.非线性波方程的精确孤立波解.中国科学(A辑),2000,30(12):1103~1108(Zhang G X, Li Z B, Duan Y S. Exact solitary wave solutions for nonlinear wave equations. Science in China (series A), 2000, 30(12):1103~1108(in Chinese))
- 吕克璞,石玉仁,段文山等. KdV - Burgers 方程的孤波解.物理学报,2001,50(11):2074~2076(Lü K P, Shi Y R, Duan W S et al. The solitary wave solutions to KdV - Burgers equation. Acta Physica Sinica, 2001, 50(11):2074~2076 (in Chinese))
- T J Bridges. Multi - symplectic structures and wave propagation. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1997, 121(1):147~190
- T J Bridge, S Reich. Multi - symplectic Integrators: numerical schemes for Hamiltonian PDEs that conserve symplecticity. Physical Letter A, 2001, 284:184~193

- 6 B E Moore, S Reich. Multi – symplectic integration methods for Hamiltonian PDEs. *Future Generation Computer Systems*, 2003, 19: 395 ~ 402
- 7 W P Hu, Z C Deng. Multi – symplectic Method for Generalized Boussinesq Equation. *Applied Mathematics and Mechanics – English Edition*, 2008, 29(7): 927 ~ 932
- 8 W P Hu, Z C Deng, W C Li. Multi – symplectic methods for membrane free vibration equation. *Applied Mathematics and Mechanics – English Edition*, 2007, 28(9): 1181 ~ 1191
- 9 W P Hu, Z C Deng. Multi – symplectic Method for the Generalized Fifth Order KdV Equation. *Chinese Physics B*, 2008, 17(11): 3923 ~ 3929
- 10 W P Hu, Z C Deng. Multi – symplectic Method to Analyze the Mixed State of II – Superconductors. *Science in China, Ser. G*, 2008, 51(12): 1835 ~ 1844
- 11 胡伟鹏, 邓子辰, 李文成. 膜受迫振动方程的多辛格式及其守恒律. *动力学与控制学报*, 2008, 6(4): 289 ~ 293 (Hu W P, Deng Z C, Li W C. Multi – symplectic methods for membrane forced vibration equation. *Journal of Dynamics and control*, 2008, 6(4): 289 ~ 293 (in Chinese))

MULTI-SYMPLECTIC METHOD FOR THE NONLINEAR VIBRATING STRING EQUATION*

Hu Weipeng^{1,2} Deng Zichen^{1,3} Han Songying⁴ Fan Wei²

(1. School of Mechanics, Civil Engineering and Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

(2. School of Power and Energy, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, Shaanxi 710072, China)

(3. State Key Laboratory of Structural Analysis of Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116023, China)

(4. School of Materials Science and Engineering; Shaanxi University of Technology; Hanzhong, Shaanxi 723003, China)

Abstract Based on the Bridges' multi-symplectic theory in Hamiltonian space, the longitudinal oscillation in a nonlinear elastic string was investigated. Firstly, the multi-symplectic formulations and several conservation laws of the longitudinal oscillation equation were presented. Then, a new equivalent formula of the multi-symplectic Box scheme was constructed. Finally, the numerical experiments on the longitudinal oscillation equation were also reported. The results are in good agreement with the exact solution obtained by Lu et al, which implies that the scheme can simulate the nonlinear elastic string vibration problem accurately. In addition, from the results, we can conclude that the multi-symplectic method is an efficient algorithm with excellent long-time numerical behaviors.

Key words Multi-symplectic integrator, Nonlinear elastic string, Conservation law