

# 带球形底的圆柱容器中液体小幅晃动的实验研究和有限元分析

夏恒新<sup>1</sup> 王为<sup>2</sup> 宝音贺西<sup>2</sup> 李俊峰<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学机械学院, 南京 210000) (2. 清华大学航天航空学院, 北京 100084)

**摘要** 晃动阻尼比的计算一直是航天器控制系统建模中很难把握的问题, 本文进行了带球形底的圆柱容器中液体小幅晃动模态的固有频率和阻尼的实验研究, 并将其与作者提出的有限元计算得到的结果进行了对比分析. 频率的计算值与实验值吻合得很好, 按洁净液面情况算得的阻尼值比实验值偏小. 如果将液面污染耗散带来的阻尼乘以一定的因子引入阻尼的计算, 则可得到与实验结果接近的阻尼计算值. 这种形状容器在卫星上常用, 本文结果对工程具有很好的指导意义.

**关键词** 晃动, 实验, 频率, 阻尼, 有限元

## 引言

液体晃动问题从上世纪五六十年代开始被航空航天工程师们广泛关注, 国内外的学者和工程师作了大量的分析与实验, 形成了以文献[1]为代表的一批文献资料<sup>[9,10]</sup>. 这些研究为航天工程中液体的晃动问题提供了基本的解决方案. 但随着充液航天器的不断发展, 航天器携带的燃料越来越多, 对液体晃动控制的技术要求不断提高, 因此有必要对液体的晃动问题进行更为细致地分析. 以充液卫星姿态控制为例, 计算晃动频率是为了在设计中设法避免液体晃动、姿态运动和弹性附件振动的共振, 而等效阻尼与章动发散时间直接相关. 在卫星入轨后, 姿态控制系统必须在一定时间内及时开启, 防止卫星章动发散失稳. 晃动频率和阻尼是工程上最为关心的两个参数, 其中各种贮箱晃动频率的计算能够做到接近实际情况, 但阻尼比一直是一个难以把握的参数, 很难得到准确的计算值. 针对计算阻尼比时应该考虑那些因素, 学者们也提出过很多建议<sup>[2,3,4]</sup>, 但一直没有好的解析方法. “十五”期间, 结合我国某型号航天器的控制系统建模, 在文献[5]中作者提出了一种有限元方法, 很好的解决了该航天器的阻尼计算问题. 此外, 液体晃动与柔性附件的耦合运动<sup>[6]</sup>和晃动本身的非线性特性<sup>[7]</sup>也是受到广泛关注的课题. 本文以其一般性和正确性的实验验证为出发点, 对航天器中经常采用的带球

形底的圆柱形容器中液体的小幅晃动的固有频率和阻尼进行了实验研究和有限元分析. 通过进行多种情况下的多种充液比的实验数据与有限元计算结果的对比验证了有限元分析方法的有效性, 证明了为该方法的普遍适用性, 为工程实际中的应用提供了有力的依据.

## 1 液体小幅晃动理论及有限元计算

一般来说刚性容器中的液体在小幅自由晃动的情况下, 液体的粘性仅对壁面附近的一薄层内的流动产生强烈的影响, 称这一层为 Stokes 边界层. 在这一层之外液体的流动可近似的看作无粘的理想流. 因此按照文献[2]的处理方法, 将流动分成两部分来描述, 一部分是内部理想流区域, 另一部分是固壁上的 Stokes 边界层.

### 1.1 理想流理论

设容器中液体占据的区域为  $\Omega$ , 固壁边界为  $S_w$ , 自由液面为  $S_f$ , 边界处的外法线方向为  $n$ ,  $h$  为自由液面波高. 由于一般情况下 Stokes 边界层的厚度很小, 因此可近似的用固壁边界代替理想流区域的边界. 设容器内液体速度为  $V$ , 速度势为  $\phi$ , 则有

$$V = \nabla \phi \quad (1)$$

在域  $\Omega$  内液体流动的控制方程是 Laplace 方程

$$\Delta \phi = 0 \quad (in \Omega) \quad (2)$$

固壁处的边界条件为不可渗透边界条件

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_w) \quad (3)$$

自由液面处线性化的动力学边界条件为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -gh \quad (\text{on } S_f) \quad (4)$$

此外在小幅晃动的情况下,自由液面处有近似的几何学关系

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} (\text{on } S_w) (\text{on } S_f) \quad (5)$$

对于自由晃动的情况,将速度势写成时空分离的形式

$$\Phi = \phi e^{i\omega t} \quad (6)$$

则控制方程(2)和边界条件(3)(4)(5)可写成

$$\Delta \phi = 0 \quad (\text{in } \Omega) \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{on } S_w) \quad (8)$$

$$\text{Re}(i\omega \phi e^{i\omega t}) = gh \quad (\text{on } S_f) \quad (9)$$

$$\text{Re}(e^{i\omega t} \frac{\partial \phi}{\partial n}) = \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{on } S_f) \quad (10)$$

由(9)(10)消去  $h$  得

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\omega^2}{g} \phi \quad (\text{on } S_f) \quad (11)$$

以上便是刚性容器内液体小幅自由晃动的理想流区域的方程和边界条件,它是一个关于 **Laplace** 方程的边值问题,通过它可以近似地求得晃动的频率和短时间内液体流动的情况.但它没有描述阻尼,不能表征振幅减小的现象.

## 1.2 Stokes 边界层

由于 **Stokes** 边界层在一般的情况下非常薄,因此考虑壁面某一点附近边界层内的流动时可将该点处的壁面看作无限大平板,在边界层内液体的速度可近似处理成与壁面平行,流动由下面的方程决定

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (12)$$

其中  $V$  的意义与前面相同, $z$  为壁面法向坐标, $\nu$  为液体的运动粘性系数.在固壁处的边界条件为粘附边界条件

$$V = 0 \quad (z = 0) \quad (13)$$

在边界层外缘流体的速度可近似处理成等于理想流区域壁面处的速度,即

$$V = V_0 \quad (z \rightarrow \infty) \quad (14)$$

在自由晃动的情形下, $V_0$  可写成  $V_0 = U e^{i\omega t}$  的时空分离的形式.解方程得到边界层内的液体流动速度为

$$V = U e^{i\omega t} \{1 - \exp[-(i\omega/\nu)^{1/2} z]\} \quad (15)$$

## 1.3 液体晃动线性阻尼

液体晃动过程中的能量耗散因素比较复杂,文献[1]指出在不考虑接触线滞后效应和液面污染的情况下液体晃动的阻尼主要来自两个部分,一部分是壁面 **Stokes** 边界层内的粘性能量耗散带来的阻尼,另一部分是理想流区域对应的那部分流动带来的粘性耗散阻尼.而对于液面受到严重污染的情况,文献[2]采用的处理方法是将液面看作覆盖了一层不可伸展的膜,因此同样用 **Stokes** 边界层理论来计算液面污染带来的阻尼.

### 1.3.1 Stokes 边界层能量耗散

对于液面没有受到污染的情况仅在壁面上有 **Stoke** 边界层,在一个晃动周期内的平均能量耗散率为

$$D_1 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{2} \nu \omega\right)^{1/2} \iint_{S_w} |U|^2 dS \quad (16)$$

对于液面受到严重污染的情况则还要加上自由液面处的 **Stokes** 边界层能量耗散

$$D_1 = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{1}{2} \nu \omega\right)^{1/2} \iint_{S_w + S_f} |U|^2 dS \quad (17)$$

### 1.3.2 内部流体能量耗散

对于流体的粘性耗散有如下的耗散函数

$$F = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} H(V) d\Omega \quad (18)$$

其中  $\mu$  为动力粘性系数, $V$  为流体速度

$$V = [V_x \quad V_y \quad V_z]^T$$

$$H(V) = 2\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}\right)^2$$

理想流体是不存在耗散的,但作为一阶近似计算可以对理想流写出耗散函数,对于理想流有  $V = \nabla \Phi$ ,因此(18)式可写成

$$F = \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} R(\Phi) d\Omega \quad (19)$$

其中

$$R(\Phi) = 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z \partial x}\right)^2$$

进而可得到一个周期内液体内部的平均能量耗散率为

$$D_2 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2F dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mu \int_{\Omega} R(\phi) d\Omega \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \mu \int_{\Omega} R(\phi) d\Omega \quad (20)$$

### 1.3.3 阻尼比

在一个周期内晃动的平均总机械能为

$$E = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 d\Omega \quad (21)$$

于是得到阻尼比为

$$\gamma = \frac{D_1 + D_2}{2\omega E} \quad (22)$$

### 1.4 有限元分析

文献[5]建立了刚性容器中液体小幅晃动的有限元计算方法,本文将采用该方法来计算带球底的圆柱形容器中液体小幅晃动的固有频率和阻尼.这里对该有限元方法作一个简单的介绍,要进行有限元分析首先要建立变分原理,方程(7)和边界条件(8)、(11)的变分形式的提法为

$$\delta \Pi = 0 \quad (23)$$

其中

$$\Pi = \int_{\Omega} \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\Omega - \int_{S_f} \frac{\omega^2}{g} \phi^2 dS \quad (24)$$

对上面的变分原理进行有限远离散之后可得到特征值问题

$$(K - \frac{\omega^2}{g} B) \phi^0 = 0 \quad (25)$$

求解该问题可得到液体小幅晃动的频率和模态,将其代入如带入式(16)、(17)、(20)、(21)、(22)可进一步得到模态阻尼比.

## 2 实验装置和过程

我们测量了带球底的圆柱形容器中不同液深情况下液体第一阶晃动模态的固有频率和阻尼比.整个实验装置由有机玻璃容器、振动试验机和激光位移传感器组成,如图1所示.柱段和球底的半径为  $\alpha = 7.0 \pm 0.1 \text{ cm}$ . 实验中液深分别取了  $h = 1.4 \pm 0.05 \text{ cm}, 2.8 \pm 0.05 \text{ cm}, 4.2 \pm 0.05 \text{ cm}, 5.6 \pm 0.05 \text{ cm}, 7.0 \pm 0.05 \text{ cm}, 8.4 \pm 0.05 \text{ cm}, 9.8 \pm 0.05 \text{ cm}, 11.2 \pm 0.05 \text{ cm}, 12.6 \pm 0.05 \text{ cm}, 14.0 \pm 0.05 \text{ cm}$  的10种情况.实验采用的液体为水,为了方便激光位移传感器的测量,其中加入了微量的白色染料.实验中采用的振动装置为 LD-1F 型调频调幅振动试验机,它能提供水平方向的振动激励,其频率范围

为 1-400Hz,频率精度为 0.1Hz.

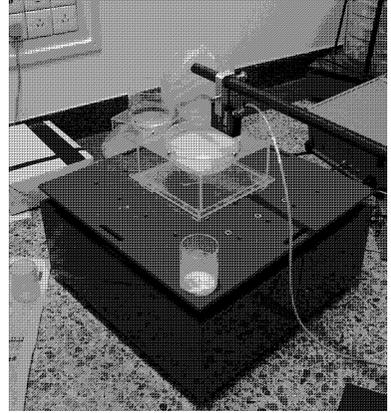


图1a 实验装置

Fig. 1a Experiment device

其中有机玻璃容器如图1b所示:

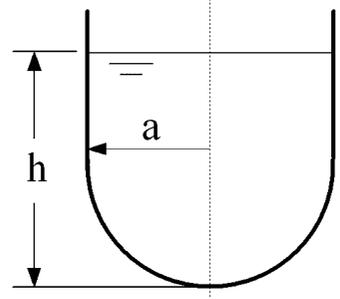


图1b 实验储箱示意图

Fig. 1b Diagram of the tank

实验中采用的测量装置是 ILD1401-20 CCD 激光位移传感器,其线性量程为 20mm,精度为 0.04mm. 传感器用来测量液面上某一点的高度随时间的变化情况,测得的数据信号通过 PC1401-3/L/RS232 供电及信号输出电缆与电脑相连接,通过传感器配套的软件可在电脑上直接得到数字形式的测量数据.

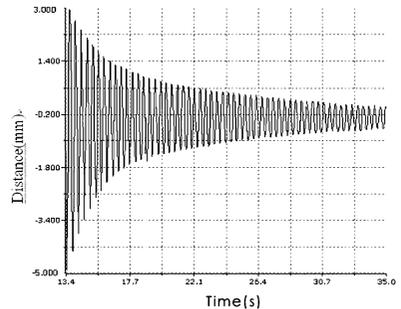


图2 自由晃动时液面上一点高度的时间历程

Fig. 2 The variation of wave height at a point on free surface during sloshing

进行实验时我们首先通过振动试验机激起容器内液体的第一阶侧向晃动,然后停止激励让晃动自由

衰减,同时通过激光位移传感器记录液面上一点高度随时间的变化历程. 上图是测得的晃动自由衰减过程中液面高度的一个时间序列,通过对该时间序列进行数据的处理便可得到晃动的固有频率和阻尼比.

### 3 结果分析

下面我们将对实验结果与有限元计算的结果进行比较以及分析. 在有限元计算中水的运动学粘性系数取,密度取. 单元为 10 结点四面体单元,计算的规模为 4000 个单元左右. 表 1 给出了不同液深情况下—阶晃动频率的实验值和计算值. 从表中可以看到计算和试验值吻合得较好,但大多数液深情况下实验值比计算值要偏大一点. 造成这一误差的一个可能原因是有限元计算中没有考虑表面张力的作用,由于表面张力也是晃动过程中的恢复力,因此不考虑它的话会使固有频率降低. 需要指出的是  $h/a$  取 0.2 时计算值反而比实验只要大,这

表 1 第一阶晃动固有频率的实验值和计算值

Table 1 Experimental values and numerical values of the fundamental eigenfrequency

$h/a$	Experimental values (Hz)	Numerical values (Hz)
0.2	1.90	1.95
0.2	1.90	1.95
0.4	2.08	2.03
0.6	2.15	2.12
0.8	2.30	2.22
1.0	2.41	2.35
1.2	2.54	2.46
1.4	2.55	2.50
1.6	2.63	2.53
1.8	2.62	2.54
2.0	2.64	2.55

可能是由于该情况下液面很浅,有限元计算采用的理想流模型近似程度不高照成的. 表 2 给出了不同液深情况下—阶晃动阻尼比的实验值和计算值. 其中计算值一栏中洁净液面下的数据是指不考虑液面污染和接触线滞后算得的阻尼比. 液面污染下的数据是指将液面看作不可伸展的膜,通过 Stokes 边界层理论算得的液面处的耗散对应的阻尼比. 最后一列的因子是通过将实验值减去洁净液面的值后再除以液面污染的值得到的. 从表 2 中的数据可以看到实验值普遍比洁净液面的值要大很多. 这说明在本实验的情况下,液面污染的耗散和接触线处的

耗散引起的阻尼是很大的. 接触线处的耗散本文不做讨论,而对于液面处的耗散,文献 [8] 指出它的最大取值可以达到将液面看作不可伸展的膜的情况下计算值的 2 倍,也就是说因子的取值应该在 0-2 之间,表 2 中的满足这一取值范围. 如我们将表 2 中的值取平均,得到平均值,然后将的值与实验值进行对比,如图 3 所示. 从图 3 可以看到这样的到的计算值与实验值较为吻合.

表 2 第一阶晃动阻尼比的实验值和计算值

Table 2 Experimental values and numerical values of the fundamental mode damping rate

$h/a$	Experimental values $\gamma_m$	Numerical values		$\alpha = \frac{\gamma_m - \gamma_1}{\gamma_2}$
		Clean surface $\gamma_1$	Contaminated surface $\gamma_2$	
0.2	0.041	0.0143	0.0143	1.9
0.4	0.014	0.00699	0.00703	1.0
0.6	0.0086	0.00455	0.00464	0.87
0.8	0.0061	0.00335	0.00349	0.79
1.0	0.0043	0.00263	0.00286	0.58
1.2	0.0051	0.00239	0.00256	1.1
1.4	0.0051	0.00234	0.00244	1.1
1.6	0.0042	0.00236	0.00237	0.78
1.8	0.0054	0.00238	0.00235	1.3
2.0	0.0046	0.00238	0.00234	0.95

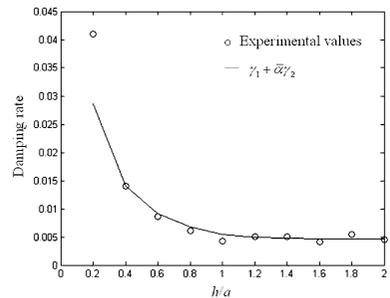


图 3 的值与实验值对比图

Fig. 3 Comparison of values of and the experimental results

### 4 结论

本文测量了航天工程中常用的带球形底的圆柱容器中液体小幅晃动第一阶固有频率和阻尼比,并将其与有限元计算的结果进行了对比分析. 频率的计算值与实验值吻合得很好,而阻尼比的实验值要比液面洁净情况的计算值大很多. 如果进一步考虑液面污染带来的耗散的话,计算值可以较好的逼近实验值. 但由于液面污染的物理机制比较复杂,目前还不能事先对液面污染的大小进行精确的估计. 在进一步的研究中有必要进行更为精确的实验,对表面张力、液面污染以及接触线滞后等因素

进行深入地分析.

## 参 考 文 献

- 1 H N Abramson. The dynamic behavior of liquids in moving containers. *NASA SP*, 1966; 106
- 2 D M Henderson, J W Miles. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line. *Journal of Fluid Mechanics*, 1994, 275: 285 ~ 299
- 3 C Martel, J A Nicolas, J M Vega. Surface-wave damping in a brimful circular cylinder. *Journal Fluid Mechanics*, 1998, 360: 213 ~ 228
- 4 J W Miles, D M Henderson. A note on interior vs. boundary-layer damping of surface waves in a circular cylinder. *Journal Fluid Mechanics*, 1998, 364: 319 ~ 323
- 5 W Wang, J F Li, T S Wang. Damping computation of liquid sloshing with small amplitude in rigid container using FEM. *Acta Mechanica Sinica*, 2006, 22(1): 93 ~ 98
- 6 吕敬, 李俊峰, 王天舒等. 充液箱位置对航天器耦合特性影响分析. *动力学与控制学报*, 2007, 5(2): 159 ~ 164 (Lv Jing, Li Junfeng, Wang Tianshu et al. Analysis on effects of fuel position on the attitude of spacecraft with elastic appendages. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(2): 159 ~ 164 (in Chinese))
- 7 贺元军, 王萍萍, 王本利等. 谐波平衡法求解俯仰运动矩形贮箱中液体非线性晃动. *动力学与控制学报*, 2007, 2, (4): 29 ~ 34 (He Yuanjun, Wang Pingping, Wang Benli et al. Nonlinear sloshing of liquid in rectangular container under pitching excitation by harmonic balance method. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 2, (4): 29 ~ 34 (in Chinese))
- 8 J W Miles. Surface wave damping in closed basins. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Volume, 297, Issue 1451: 459 ~ 475
- 9 H Baoyin, J F Li, Y Gao et al. Damping computation of liquid sloshing in containers aboard spacecraft. *Acta Mechanica Sinica*, 2003, 19(2): 189 ~ 192
- 10 R A Ibrahim, V N Pilipchuk, T Ikeda. Recent advances in liquid sloshing dynamics. *Applied Mechanics Reviews*, 2001, 54(2): 133 ~ 199

# EXPERIMENT AND FEM ANALYSIS OF LIQUID SLOSHING WITH SMALL AMPLITUDE IN A CIRCULAR CYLINDRICAL TANK WITH A SPHERICAL BOTTOM

Xia Hengxin<sup>1</sup> Wang Wei<sup>2</sup> Baoyin Hexi<sup>2</sup> Li Junfeng<sup>2</sup>

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210000, China)

(2. School of Aerospace, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

**Abstract** Getting the accurate damping rates has long been an intractable problem for spacecraft control system modeling. In the present paper, the fundamental eigenfrequencies and damping rates of liquid sloshing with small amplitude in a circular cylindrical tank with a spherical bottom were studied in the experimental way. And the results were compared with the numerical values of FEM obtained by the authors in the previous research. The numerical values of frequencies are close to the experimental results, and the numerical values of damping rates in the case of clean surface are smaller than the experimental value. If the damping of contaminated free surface is introduced to the FEM computation by a factor, then the numerical values of damping rates can approximate to the experimental results. This kind of fuel tank is popular in some satellite series, so the results of the paper could be referenced for a practical engineering task.

**Key words** sloshing, experiment, frequency, damping, FEM