

结构振动的时滞输出反馈控制器设计*

陈敏¹ 金学松² 曹登庆¹

(1. 哈尔滨工业大学航天学院, 137 信箱, 哈尔滨 150001) (2. 西南交通大学牵引动力国家重点实验室, 成都 610031)

摘要 研究结构振动的时滞输出反馈控制, 通过部分可测输出量实现整个系统的主动振动控制. 首先将系统的运动微分方程改写成状态空间模型, 其控制输入中存在时滞. 再利用一个线性项加积分项的变换将原时滞输入系统转化成无时滞的形式. 在此基础上, 应用输出反馈原理和合理的性能指标设计出系统的控制律. 最后以一个三层建筑结构为例, 研究系统在地震载荷下的动态响应. 在数值计算中, 时滞量取为采样周期的整数倍, 积分步长取为采样周期. 仿真结果表明, 本文提出的时滞输出反馈控制律是有效且实用的.

关键词 主动控制, 时滞, 次最优控制, 输出反馈

引言

结构振动控制按照控制是否需要外界能量可以分为主动控制、被动控制和半主动控制. 主动控制是根据振动响应的信息向结构施加控制力来实现动态控制, 需要外部提供能量, 但它能有效地控制随机干扰, 给大型复杂工程带来很大益处. 随着科技的发展, 振动主动控制技术已成功应用于航空、航天结构振动控制、土木工程结构抗震、车辆结构隔振和其他机械设备的振动控制等领域^[1,2].

对于结构主动振动控制, 国内外学者提出了很多控制方法, 其中比较典型的方法如: 最优控制、模糊控制、自适应控制、滑模控制、神经网络控制等等, 并得到了很好的控制仿真效果. 对于主动控制的闭环系统, 传感器信号的采集和传输、控制器的计算以及作动器的作动过程等会导致最终作用于结构的控制力产生时间滞后. 在大多数情况下, 由于以上原因引起的时滞量比较小, 而且控制系统通常有较大的稳定裕度, 所以工程应用中常常忽略时滞的影响. 然而, 时滞是导致系统失稳的主要因素之一, 有些情况下, 即便是很小的时滞量也可能使系统失稳. 因此, 为了保证实际系统的安全运行, 在设计控制器时考虑时滞的影响是十分必要的.

近年来, 许多专家学者对时滞现象及控制方法做了很多研究^[3-12]. 蔡国平等^[5-10]采用不同的方法设计了时滞系统的控制律, 取得了一系列很有意

义的成果. 实际应用的结果显示, 所设计的最优控制律保证了系统的稳定性, 同时改进了时滞补偿的方法不适用于大时滞参数量情况的问题.

控制系统实现的另一个困难来自于状态信息的采集与传输, 尤其对于高维、复杂的系统, 要采集系统的全部状态几乎是不可能的. 就工程应用而言, 利用有限的输出信号进行输出反馈控制更具有实际意义. 唐功友等^[11]在构造能同时预估状态和扰动的降维观测器的基础上, 设计出动态输出反馈控制律. 应祖光^[12]基于随机平均法和随机动态规划原理提出一种非线性的随机最优时滞控制方法, 保证了系统的稳定.

基于上述考虑, 本文研究结构振动的时滞输出反馈控制, 所设计的控制器不仅可以克服控制输入中时滞的影响, 而且仅利用部分可测输出来进行反馈. 首先利用一个线性项加积分项的变换将原时滞输入系统转化成无时滞的形式. 在此基础上, 应用输出反馈原理和合理的性能指标设计出系统的控制律. 以一个三层建筑结构为例, 进行数值仿真的结果表明: 这里提出的时滞输出反馈控制律是有效且实用的.

1 动力学模型

考虑控制输入中含有时滞的多自由度结构振动模型, 运动微分方程如下:

$$M\ddot{x}(t) + D\dot{x}(t) + Kx(t) = H_1 e(t) + H_2 u(t-\tau) \quad (1)$$

式中, $x(t) \in R^n$ 为系统位移; $M, D, K \in R^{n \times n}$ 分别为系统质量、阻尼和刚度矩阵; $e(t) \in R^m$ 为外激励向量; $H_1(t) \in R^{n \times m}$ 为外激励位置矩阵; $u(t-\tau) \in R^r$ 为控制力向量, 其中 τ 为时滞参数; $H_2 \in R^{r \times r}$ 为控制力位置矩阵。

方程(1)是描述结构振动的二阶微分方程, 要设计比较合理的控制律需要将其转化为状态方程^[13], 其具体形式如下:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t-\tau) + \bar{e}(t) \\ y(t) = Cz(t) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $z(t) \in R^{2n}$ 是系统的状态向量, $A \in R^{2n \times 2n}$ 是系数矩阵, $B \in R^{2n \times r}$ 是控制矩阵, $C \in R^{r \times 2n}$ 是输出系数矩阵, $y(t) \in R^r$ 是输出向量, 且

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}H_2 \end{bmatrix}, \bar{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1}H_1e(t) \end{bmatrix}.$$

为了消除控制输入中的时滞参数, 采用一种等价变换的方法. 重新设置一个状态变量, 令其等于原状态变量与一个积分项相加^[14], 即:

$$\xi(t) = z(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A(\sigma+\tau)} Bu(t+\sigma) d\sigma \quad (3)$$

令 $t+\sigma$, 则 $t-\tau < s < t$, $d\sigma = ds$, 从而

$$\int_{-\tau}^0 e^{-A(\sigma+\tau)} Bu(t+\sigma) d\sigma = \int_{t-\tau}^t e^{-A(s+\tau-t)} Bu(s) ds.$$

将(3)式带入系统(2), 并定义矩阵函数 $B(A) = e^{-A\tau}B$, 则系统(2)可以写成

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A\xi(t) + B(A)u(t) + \bar{e}(t) \\ \eta(t) = C\xi(t) \end{cases} \quad (4)$$

式中 $B(A) \in R^{2n \times r}$ 是变换后的控制矩阵, $C \in R^{r \times 2n}$ 是输出系数矩阵; $\eta(t) \in R^r$ 为输出向量。

2 输出反馈与次最优控制设计

在实际工程问题中, 并非所有的状态变量都是可测的. 在这种情况下, 可以考虑利用输出变量组合形成控制变量, 也就是由维数较低的输出变量构成线性反馈系统. 根据状态方程和次最优控制理论可设计一阶次最优控制器^[13].

根据经典最优控制理论, 目标函数可取为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [\xi^T(t)Q\xi(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \quad (5)$$

式中, $Q \in R^{w \times w}$ 为半正定的权重系数数据阵, $R \in R^{r \times r}$

为正定的权重系数矩阵。

由于采用输出反馈, 控制力 $u(t)$ 在本文中设为

$$u(t) = -K_1\eta(t) = -K_1C\xi(t) \quad (6)$$

式中 K_1 为输出反馈系数矩阵. 采用输出反馈关键在于求输出反馈系数矩阵, 采用最小误差激励法(参见文献[15])可以得到:

$$K_1 = R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1} \quad (7)$$

式中, $B(A), C$ 是系统状态方程(4)的系数矩阵, P 为黎卡提(Riccatti)方程

$$P[A - B(A)K_1C]^T + [A - B(A)K_1C]^T P + C^T K_1^T R K_1 C + Q = 0 \quad (8)$$

的解, 式中 Q, R 为权重系数矩阵. (7)式中矩阵 W 满足方程

$$W[A - B(A)K_1C]^T + [A - B(A)K_1C]W + I = 0 \quad (9)$$

因此, 采用输出反馈的控制力为

$$u(t) = -R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}\eta(t) \quad (10)$$

注意到式(6), 则控制律(10)可以写为

$$u(t) = -R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}C[z(t) + \int_{-\lambda}^0 e^{-A(\sigma+\lambda)} Bu(t+\sigma) d\sigma] - R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}Cz(t) - R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}C \int_{-\tau}^0 e^{-A(\sigma+\tau)} Bu(t+\sigma) d\sigma = -R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}y(t) - R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}C \int_{-\tau}^0 e^{-A(\sigma+\tau)} Bu(t+\sigma) d\sigma$$

从而, 原系统的控制输入为

$$u(t-\tau) = -R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}C[z(t-\tau) + \int_{-\lambda}^0 e^{-A(\sigma+\lambda)} Bu(t-\tau+\sigma) d\sigma] \quad (11)$$

$$\Delta z(t-\tau) = \int_{-\tau}^0 e^{-A(\sigma+\tau)} Bu(t-\tau+\sigma) d\sigma, \quad (12)$$

则

$$u(t-\tau) = -R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}C(z(t-\tau) + \Delta z(t-\tau)) = -R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}y(t-\tau) - R^{-1}B(A)^T PWC^T(CWC^T)^{-1}C\Delta z(t-\tau) \quad (13)$$

式中, $y(t-\tau)$ 可以通过测量得到。

3 控制实现

在控制律(13)中包含明显的积分项, 它不能进行实时的在线计算. 为保证实际情况中的控制实

现需要设计一种合理的数值算法.

对于任何的时滞参数 τ 都可以写成与采样周期有关的表达式

$$\tau = l\bar{T} - \bar{m} \quad (14)$$

式中 \bar{T} 为数据采样周期, \bar{m} 为调节参数, 且 $0 \leq \bar{m} < \bar{T}$, $l > 0$ 为正整数, 当 $\bar{m} = 0$ 时, 时滞项为采样周期的整数倍; 当 $\bar{m} \neq 0$ 时, 时滞量就为采样周期的非整数倍. 将积分区间离散, 则

$$\begin{aligned} \Delta z(t - \tau) &= \int_{-\tau}^0 e^{-A(\sigma + \tau)} Bu(t - \tau + \sigma) d\sigma = \\ &= \int_{-(l\bar{T} - \bar{m})}^0 e^{-A(l\bar{T} - \bar{m})} e^{-A\sigma} Bu(t - \tau + \sigma) d\sigma = \\ &= e^{-A(l\bar{T} - \bar{m})} \left[\int_{-(l\bar{T} - \bar{m})}^{-(l-1)\bar{T}} e^{-A\sigma} Bu(t - \tau + \sigma) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. \int_{-(l-1)\bar{T}}^{-(l-2)\bar{T}} e^{-A\sigma} Bu(t - \tau + \sigma) d\sigma + \dots \int_{-\bar{T}}^0 e^{-A\sigma} Bu(t - \right. \\ &\quad \left. \tau + \sigma) d\sigma \right] = e^{-A(l\bar{T} - \bar{m})} \times \\ &\quad \left[e^{A(l\bar{T} - \bar{m})} \int_0^{\bar{T} - \bar{m}} e^{-A\sigma_1} d\sigma_1 Bu(t - \tau - l\bar{T}) + \right. \\ &\quad \left. e^{A(l-1)\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} e^{-A\sigma_2} d\sigma_2 Bu(t - \tau - (l-1)\bar{T}) + \right. \\ &\quad \left. \dots e^{A\bar{T}} \int_0^{\bar{T}} e^{-A\sigma_l} d\sigma_l Bu(t - \tau - \bar{T}) \right] \quad (15) \end{aligned}$$

定义函数:

$$F(\delta) = e^{A\delta} \quad (16)$$

$$N(\delta) = \int_0^\delta e^{-A\theta} d\theta \quad (17)$$

将其代入(15)式可以得到两种表达式. 当 $\bar{m} \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta z(t - \tau) &= I_{2n \times 2n} N(\bar{T} - \bar{m}) Bu(t - \tau - l\bar{T}) + \\ &\quad F(\bar{m} - \bar{T}) N(\bar{T}) Bu[t - \tau - (l-1)\bar{T}] + F(\bar{m} - \\ &\quad 2\bar{T}) N(\bar{T}) Bu[t - \tau - (l-2)\bar{T}] + \dots + \\ &\quad F[\bar{m} - (l-1)\bar{T}] N(\bar{T}) Bu(t - \tau - \bar{T}) \quad (18) \end{aligned}$$

当 $\bar{m} = 0$ 时,

$$\begin{aligned} \Delta z(t - \tau) &= I_{2n \times 2n} N(\bar{T}) Bu(t - \tau - l\bar{T}) + \\ &\quad F(-\bar{T}) N(\bar{T}) Bu[t - \tau - (l-1)\bar{T}] + \\ &\quad F(-2\bar{T}) N(\bar{T}) Bu[t - \tau - (l-2)\bar{T}] + \dots + \\ &\quad F[-(l-1)\bar{T}] N(\bar{T}) Bu(t - \tau - \bar{T}) \quad (19) \end{aligned}$$

为简单起见, 这里只考虑时滞参数为采样周期整数倍的特殊情况. 采用四阶龙格库塔法求解方程(2), 选步长等于采样周期 \bar{T} .

含积分项函数(17)可以被定义为如下方程:

$$N(\delta) = \int_0^\delta e^{-A\theta} d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-A)^{n-1} \delta^n}{n!} \quad (20)$$

当参数 δ 给定时, $N(\delta)$ 将收敛于一个常数矩阵.

4 应用实例与数值结果分析

采用与文献[16, 17]相同的三自由度线性结构模型, 其等效的物理参数列于表 1.

表 1 结构模型参数

Table 1 Parameters of structural model		
Mass (ton)	Stiffness(kN/m)	Damping coefficient(kN·s/m)
$m_1 = 1000$	$k_1 = 980$	$c_1 = 1.407$
$m_2 = 1000$	$k_2 = 980$	$c_2 = 1.407$
$m_3 = 1000$	$k_3 = 980$	$c_3 = 1.407$

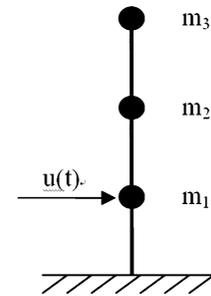


图 1 建筑结构模型

Fig.1 Building structural model

建筑模型如图 1 所示, 根据牛顿第二定律容易得到系统的运动微分方程为:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -k_1 x_1 - c_1 \dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + \\ \quad c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + u(t - \tau) - m_1 \ddot{x}_g(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \\ \quad k_3(x_3 - x_2) + c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - m_2 \ddot{x}_g(t) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -k_3(x_3 - x_2) - c_3(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - m_3 \ddot{x}_g(t) \end{cases} \quad (21)$$

写成系统(1)描述的矩阵形式, 则其系数矩阵分别为:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad H_1 = - \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{Bmatrix}, \\ K &= \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_1 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \{1, 0, 0\}^T \\ D &= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_1 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad e(t) = \ddot{x}_g(t). \end{aligned}$$

取采样周期 $\bar{T} = 0.01s$, 定义时滞量为 τ , 并假定只在结构第一层施加主动控制力. 每一层的绝对位移值分别为 x_1, x_2, x_3 , 每层的绝对加速度分别为

$\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$, 采用主动控制算法的两种情况(一种是控制输入中存在时滞, 采用这里提出的时滞输出反馈控制律; 另一种是无时滞的情况), 权重矩阵取相同的值, 即: $Q = \text{diag}[10^6, 10^6, 10^3, 10^3, 10^3]$, $R = 7 \times 10^{-6}$. 这里的时滞参数量取为 10 倍的采样周期, 即为 0.1s.

外激励采用 El-Centro 地震波, 地震加速度的时间历程如图 2 所示.

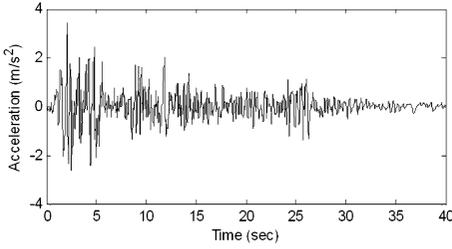


图 2 地震波激励时间历程

Fig.2 Time history of El-Centro earthquake

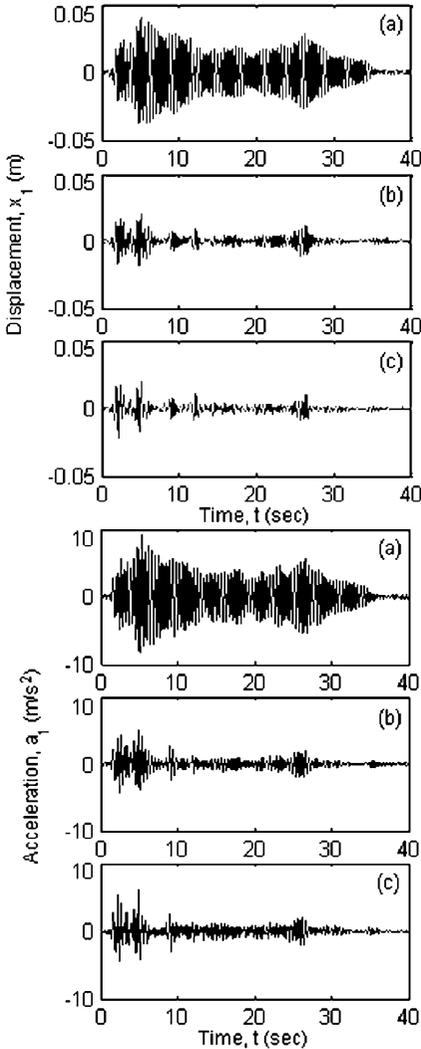


图 3 第一层位移和加速度响应

Fig.3 Displacement and acceleration responses of the first floor

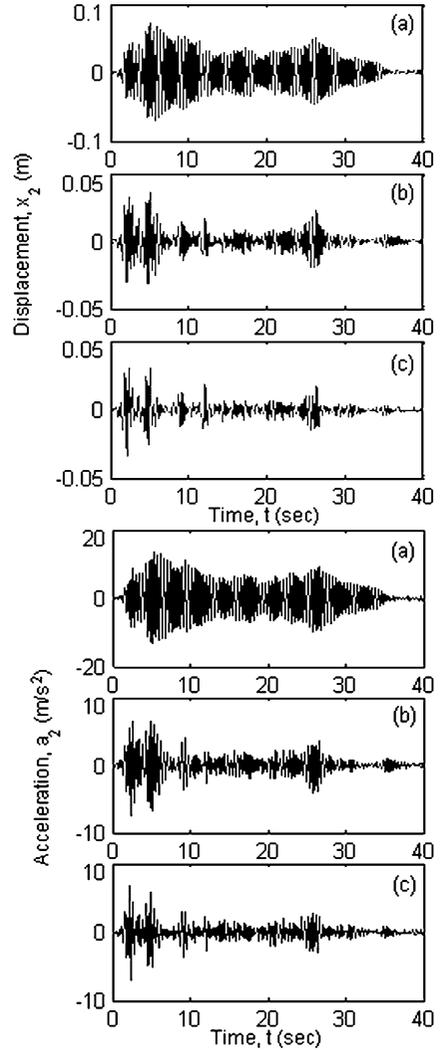


图 4 第二层位移和加速度响应

Fig.4 Displacement and acceleration responses of the second floor

图 3 至图 5 给出了系统的位移响应(左侧)和加速度响应(右侧), (a)、(b)和(c)分别对应于不施加控制力, 加入没有考虑时滞参数的控制力和加入考虑时滞参数的控制力的情况.

为了能够更清楚地看出时滞控制律的控制效果, 两种情况下的位移峰值对比见表 2.

表 2 位移峰值对比

i th floor	Maximum displacement under El-Centro earthquake		Reduction (%)
	max x_i (m) (Without control)	max x_i (m) (Time delay control)	
1	0.0416	0.0220	47.12
2	0.0734	0.0341	53.54
3	0.0903	0.0404	55.26

当系统控制的时滞参数为外激励采样周期 10 倍时, 依据时滞输出反馈控制律对建筑结构施加控制力, 1, 2, 3 层绝对位移的峰值分别降低 47.12%,

53.54% ,55.26% . 从图 3-5 容易看出,施加控制力后,加速度的幅值均有明显的降低,且时滞控制几乎可以达到没有时滞存在的主动控制的效果.

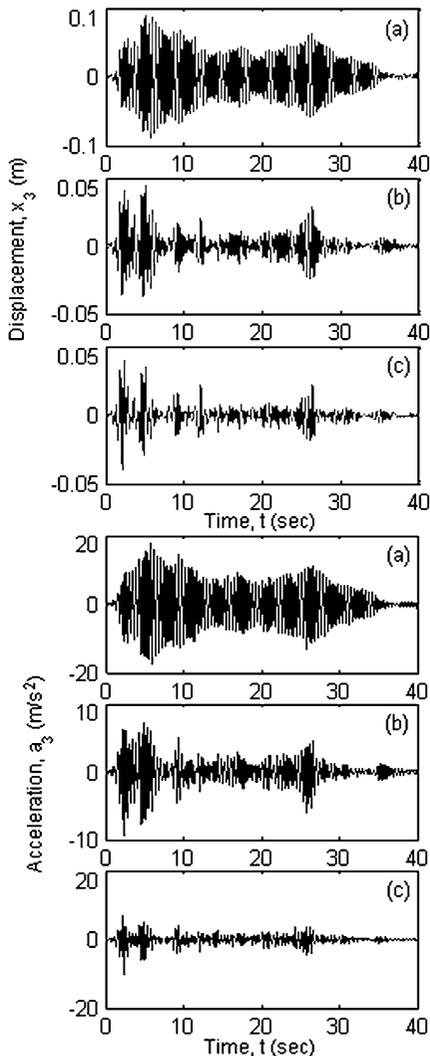


图 5 第三层位移和加速度响应

Fig. 5 Displacement and acceleration responses of the third floor

5 结论

针对传感器信号的采集和传输、控制器的计算以及作动器的作动过程等产生的时间滞后,本文研究了结构振动系统的时滞输出反馈控制问题. 利用线性项加积分项的变换将原时滞输入系统转化成无时滞的形式. 再应用输出反馈原理和合理的性能指标设计出系统的时滞输出反馈控制律. 这里设计的控制器不仅考虑了实际系统中存在的不可避免的时间滞后,而且仅才用了测量输出的信息,易于工程应用. 以一个三层建筑结构为应用实例,数值仿真的结果表明:本文提出的时滞输出反馈控制律对于建筑结构抗震有很好的控制效果.

参 考 文 献

- 1 孙国春,史文库,田彦涛. 振动主动控制技术的研究与发展. 机床与液压,2004,(13): 1~6 (Sun Guochun, Shi Wenku, Tian Yantao. Research and development in active vibration control technology. *Machine Tool & Hydraulics*, 2004,(13): 1~6 (in Chinese))
- 2 陈丽萍. 振动主动控制技术的研究进展. 现代机械,2005,(2): 52~55 (Chen Liping. Research status and developing trend of active vibration control. *Modern Machinery*, 2005,(2): 52~55 (in Chinese))
- 3 严艳,杨玉华,魏晓燕,卢占会. 带有时滞的区间动力系统的鲁棒稳定性研究. 动力学与控制学报,2008,9:1~4 (Yan Yan, Yang Yuhua, Wei Xiaoyan, Lu Zhanhui. Study on robust stability of interval system with time-delay. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,9:1~4 (in Chinese))
- 4 王京祥,王在华. 时滞状态反馈控制系统的稳定性增益区域. 动力学与控制学报,2008,6(4):301~306 (Wang Jingxiang, Wang Zaihua. Stable region of the feedback gains in a controlled system with delay feedback. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,6(4): 301~306 (in Chinese))
- 5 潘颖,王超,蔡国平. 线性时滞系统的离散最优控制. 计算力学学报,2004,21(2): 177~184 (Pan Ying, Wang Chao, Cai Guoping. Discrete-time optimal control method for linear time-delay systems. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2004,21(2): 177~184 (in Chinese))
- 6 蔡国平,黄金枝. 时滞线性系统振动主动控制的最优化方法. 上海交通大学学报,2002,36(11): 1596~1599 (Cai Guoping, Huang Jinzhi. Optimal control method for linear vibration systems with time delay in control. *Journal of Shanghai Jiaotong University*, 2002, 36(11): 1596~1599 (in Chinese))
- 7 G P Cai, J Z Huang, S X Yang. An optimal control method for linear systems with time delay. *Computers and Structures*, 2003, 81: 1539~1546
- 8 G P Cai, J Z Huang. Optimal control method for seismically excited building structures with time-delay in control. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(6): 602~612
- 9 G P Cai, J Z Huang. Instantaneous optimal method for vibration control of linear sampled-data systems with time delay in control. *Journal of Sound and Vibration*, 2003, 262: 1057~1071
- 10 G P Cai, F Sun. Sub-optimal control of structures. *Earthquake Engineering and Structures*, 2003, 32: 127~2142

- 11 唐功友,赵翀,雷靖. 含有时滞控制系统的输出反馈扰动抑制. 中国海洋大学学报,2007,37(4): 667 ~ 670 (Tang Gongyou, Zhao Chong, Lei Jing. Disturbance rejection for linear systems with control delay via output feedback. *Periodical of Ocean University of China*, 2007, 37(4): 667 ~ 670 (in Chinese))
- 12 应祖光,洪沁. 一种基于随机平均的最优时滞控制方法. 动力学与控制学报,2008,6(3):260 ~ 263 (Ying zuguang, Hong Qin. An optimal time-delay control method based on the stochastic averaging. *Journal of Dynamics and Control*, 2008,6(3):260 ~ 263 (in Chinese))
- 13 刘豹. 现代控制理论(第二版). 北京:机械工业出版社,2004 (Liu Bao. *Modern Control Theory* (2nd edition). Beijing: China Machine Press,2004 (in Chinese))
- 14 W H Kwon, K E Pearson. Feedback stabilization of linear systems with delayed control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1980,25(2): 266 ~ 269
- 15 顾仲权,马扣根,陈卫东. 振动主动控制. 北京:国防工业出版社(第1版),1997,31-94 (Gu Zhongquan, Ma Kougen, Chen Weidong. *Active vibration control*. Beijing: National defense industry Press (1st edition), 1997 (in Chinese))
- 16 J N Yang. Application of optimal control theory to civil engineering structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 1975,101: 818 ~ 838
- 17 蔡国平,黄金枝. 控制存在延时的建筑结构地震作用下的最优控制方法. 应用力学学报,2001,18(4): 42 ~ 49 (Cai Guoping, Huang Jinzhi. Optimal control method for seismic-excited building structures with time delay in control. *Chinese Journal of Application Mechanics*, 2001,18(4): 42 ~ 49 (in Chinese))

DESIGN OF TIME-DELAY OUTPUT FEEDBACK CONTROLLERS FOR STRUCTURAL VIBRATIONS *

Chen Min¹ Jin Xuesong² Cao Dengqing¹

(1. *The School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, PO Box 137, Harbin 150001, China*)

(2. *State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

Abstract Time delay control of structural vibration was investigated in terms of output feedback, i. e., utilizing the measurable output to realize an active vibration control of the entire system. The differential equation of motion of the system was first transformed to a state-space model with time-delay control input. Then, a transformation with a linear term and an integral term was employed to transform the original time-delay system into a form without time-delays. Accordingly, the principle of output feedback was used to design a control law for the system in terms of a reasonable performance index. Finally, as an example, the dynamical responses of a three-story model under earthquake loadings was investigated by numerical calculation, where the value of the time delay is integer times the sampling period and the integration time step is chosen to be identical to the sampling period. The numerical results show that the time delay control algorithm by output feedback proposed is valid and practically applicable.

Key words active control, time delay, sub-optimal control, output feedback