

# 正交各向异性叠层板的非线性主共振分析

吕书锋 胡宇达

(燕山大学建筑工程与力学学院, 秦皇岛 066004)

**摘要** 研究了在四边简支的边界条件下, 正交各向异性矩形叠层板在横向简谐激励作用下的非线性主共振及其稳定性问题. 在给出了正交各向异性叠层板的振动微分方程的基础上, 利用伽辽金法导出了相应的达芬型非线性强迫振动方程. 应用平均法对主共振问题进行求解, 得到了系统在稳态运动下的幅频响应方程. 基于李雅普诺夫稳定性理论, 得到了解的稳定性判定条件. 作为算例, 分别给出了不同条件下, 系统运动的幅频响应曲线图、振幅-激励幅值响应曲线图和动相平面图, 并对解的稳定性进行了分析, 讨论了各参数对系统非线性振动特性的影响.

**关键词** 正交各向异性, 叠层板, 主共振, 稳定性, 平均法

## 引言

各向异性板的优势是具有较高的比强度、比刚度<sup>[1]</sup>, 还可以通过调整材料铺层数、材料的几何参数来适应不同的应用条件, 已经成为一类重要的工程结构元件. 此外, 由于叠层材料常由几种不同的材料构成, 且常被做成薄壁结构, 呈现几何非线性, 从而存在很多复杂的非线性动力学特性. 因此, 对复合材料叠层板进行非线性动力学分析十分必要. 近年来, 对于复合材料叠层板的非线性振动研究已经取得了一些成果. Chia<sup>[2]</sup>系统的研究了复合材料叠层板的非线性弯曲、后屈曲等问题; 杨桂通等<sup>[3]</sup>讨论了复合材料叠层板的非线性动力稳定性问题, 得到了不同铺设方法叠层板的突变失稳模型及其屈曲临界条件; 叶敏等<sup>[4,5]</sup>对复合材料板参数共振的分岔问题进行了研究; 王列东、周承倜等<sup>[6]</sup>研究了复合材料叠层板的初始缺陷和拉伸-弯曲耦合对于其振动、屈曲、和非线性动力稳定性的影响, Udar Ratnakar S. 等<sup>[7]</sup>研究了承受非均匀谐波边界载荷叠层板的组合共振特性; Y. S. Shih 等<sup>[8]</sup>研究了任意弹性基础上简支和固支叠层薄板的非线性振动; 卿光辉等<sup>[9]</sup>研究了压电热弹性体混合层合板的响应分析; 张伟等<sup>[10]</sup>对夹层板的非线性动力学特性进行了分析; 李银山等<sup>[11]</sup>研究了正交各向异性圆板非线性振动的亚谐分岔. 本文选取正交各向异性

矩形叠层板作为研究对象, 对其在横向简谐激励作用下的非线性主共振问题进行分析.

## 1 基本方程

考虑等厚度、同材质的正交各向异性矩形叠层板(材料主向与板轴一致), 略去纵向和转动惯性力项, 根据 Kirchhoff 假设, 应用虚功原理, 得到板的非线性运动方程为:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{1b}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial x} (N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (N_x \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}) + p_z = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial w}{\partial t} \tag{1c}$$

式中  $N_x, N_y, N_{xy}$  为相应的中面内力,  $M_x, M_y, M_{xy}$  为内力矩分量,  $p_z = p_0 \sin \omega t$  为横向简谐激励载荷,  $p_0$  为激励幅值,  $\omega$  为激励频率,  $\delta$  为阻尼系数.

考虑四边简支的正交各向异性矩形叠层板, 边长为  $a \times b$ , 厚度为  $h$ . 其内力-应变的关系式为:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{2a}$$

$$\begin{cases} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (2b)$$

式中,  $A_{ij}$ 、 $D_{ij}$  分别为拉伸和弯曲刚度。

取满足四边简支边界条件的位移函数为:

$$w = f(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (3)$$

这样,将式(2)、(3)代入(1)中,并采用伽辽金法进行积分,可得到矩形板无量纲化的达芬型非线性振动微分方程:

$$\ddot{g} + g = -\eta_1 \dot{g} - \eta_2 g^3 + \eta_3 \sin \Omega \tau \quad (4)$$

式中,  $\eta_1 = \delta / (m\omega_0)$ ,  $\eta_2 = \gamma h^2 / \omega_0^2$ ,  $\eta_3 = kp_0 / (h\omega_0^2)$ ,

$$\tau = \omega_0 t, m = \rho h, \alpha = a/b, \omega_0^2 = \frac{\pi^4}{ma^4} [D_{11} + \alpha^4 D_{22} + 2\alpha^2$$

$$(D_{12} + 2D_{66})], \gamma = \frac{\pi^4}{16ma^4} \left[ \frac{3(A_{11} + A_{22}\alpha^4)}{2} + (3A_{12} -$$

$2A_{66})\alpha^2 \right]$ ,  $\Omega = \omega / \omega_0$ ,  $\dot{g}$ 、 $\ddot{g}$  分别表示  $g$  对  $\tau$  的一阶和二阶导数。

## 2 求解主共振问题

系统在振动过程中,当激励频率接近固有频率 ( $\omega \approx \omega_0$ ) 时,将发生主共振,并伴随较为复杂的非线性动力学现象。下面对叠层板在横向简谐载荷作用下的主共振问题进行求解分析。

引入小参数  $\varepsilon$ ,则方程(4)可进一步化为:

$$\ddot{g} + g = \varepsilon f \quad (5)$$

式中,  $f = -\eta_1 \dot{g} - \eta_2 g^3 + \eta_3 \sin \Omega \tau$ 。

用平均法<sup>[12]</sup>进行一阶近似求解,令  $\Omega = 1 + \varepsilon \sigma$  ( $\sigma$  为调谐参数),并取:

$$g = a \cos(\Omega \tau - \theta) = a \cos \phi \quad (6a)$$

$$\dot{g} = -a \sin(\Omega \tau - \theta) = a \sin \phi \quad (6b)$$

其中,  $\phi = \Omega \tau - \theta$ 。

分别对(6a)(6b)进行微分,代入(5)式,得:

$$\dot{a} = -\varepsilon f \sin \phi \quad (7a)$$

$$\dot{\theta} = \varepsilon \sigma + \frac{\varepsilon}{a} f \cos \phi \quad (7b)$$

其中,  $\dot{a}$ 、 $\dot{\theta}$  分别表示  $a$ 、 $\theta$  对时间  $\tau$  的一阶导数。

得到的平均化方程为:

$$\dot{a} = -\frac{\varepsilon}{2} (a \eta_1' - \eta_3' \sin \theta) \quad (8a)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\varepsilon}{2a} (2\varepsilon \sigma - \frac{3}{4} a^2 \eta_2' + \eta_3' \cos \theta) \quad (8b)$$

对于系统的稳态运动,有  $\dot{a} = \dot{\theta} = 0$ ,从而消去  $\theta$ ,得到幅频方程为:

$$[\eta_1'^2 + (2\varepsilon \sigma - \frac{3}{4} a^2 \eta_2')^2] a^2 = \eta_3'^2 \quad (9)$$

## 3 稳定性分析

根据李雅普诺夫稳定性理论,研究系统稳态运动中解的稳定性。引入扰动变量  $\xi_1 = a - a_s$ ,  $\xi_2 = \theta - \theta_s$ ,列出方程组(8)在奇点  $(a_s, \theta_s)$  附近的近似系统:

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{\varepsilon}{2} [\eta_1' \xi_1 - (\eta_3' \cos \theta_s) \xi_2] \quad (10a)$$

$$\dot{\xi}_2 = \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \frac{1}{a_s} \left[ (2\sigma - \frac{9}{4} \eta_2' a_s^2) - \frac{1}{a_s^2} (2\sigma a_s - \frac{3}{4} a_s^2 \eta_2' + \eta_3' \cos \theta_s) \right] \xi_1 - (\eta_3' \sin \theta_s) \xi_2 \right\} \quad (10b)$$

则此线性扰动方程组的本征方程为:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (11)$$

式中,  $a_1 = \varepsilon \eta_1'$ ,  $a_2 = a_s \eta_1'^2 + (2\sigma - \frac{9}{4} a_s^2 \eta_2') (2\sigma a_s - \frac{3}{4} a_s^3 \eta_2')$

依据 Routh-Hurwitz 判据,可得情形下系统稳态解稳定的充要条件为:

$$a_s \eta_1'^2 + (2\sigma \varepsilon - \frac{9}{4} a_s^2 \eta_2') (2\sigma \varepsilon a_s - \frac{3}{4} a_s^3 \eta_2') > 0 \quad (12)$$

## 4 算例分析

对于横向简谐激励作用下的正交各向异性叠层薄板,选取复合材料石墨环氧<sup>[2]</sup>作为研究对象,通过得到的幅频响应方程和稳态解的判定条件,编程计算,得到一系列反映主共振特性的图形。

图1给出了正交各向异性叠层板在不同条件下的幅频曲线图,选取的叠层板材料为三层的石墨环氧。实线代表稳定部分,虚线代表不稳定部分。由图可见,当激励频率接近固有频率时系统的幅值急剧增大,呈现出硬特性,而且存在多值和跳跃现象。随着激励幅值的增大(图1a)和板厚度的减小(图1b),共振区域将逐渐变宽,而对应相同的频率,且共振都被激发的条件下,稳定解的数值随激励幅值的增大或板厚度的减小而有明显的增加。随着线性阻尼系数的增大(图1c),共振区域逐渐变窄,而对应相同的频率,且共振都被激发的条件下,稳定解

的数值随阻尼系数的增大有所下降. 图 1d 给出了叠层板的层数对系统共振幅值的影响, 由图可见, 在板的总厚度值固定的情况下, 随着层数的增加, 系统的共振幅值曲线出现交叉现象.

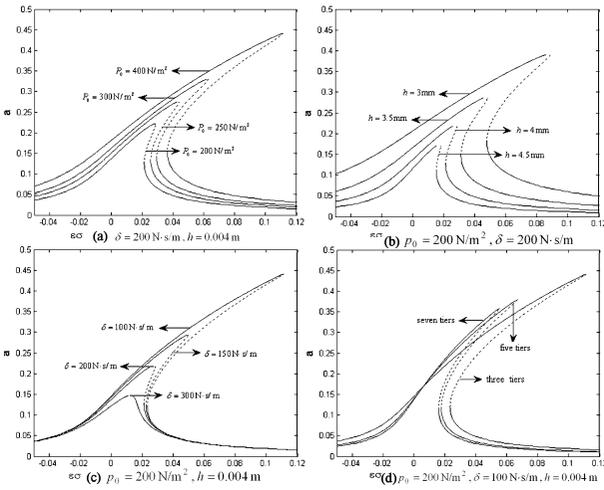


图 1 幅频曲线图

Fig. 1 Amplitude-detuning parameter curves

与图 1 对应, 图 2 绘制了动相平面的相轨迹图, 选取的叠层板材料为三层的石墨环氧. 图 2(a) 描述的是其它条件相同的情况下, 通过改变初始位置而得到的相轨迹, 对应图 1(a) 中  $p_0 = 200 \text{ N/m}^2, \varepsilon\sigma = 0.025$  的情况,  $S_1 (a = 0.08)$  和  $S_3 (a = 0.21)$  为稳定焦点,  $S_2 (a = 0.18)$  为鞍点. 图 2(b) 对应于图 1(b) 的情况, 它反映了当其它条件不变而改变板厚度的时候, 系统稳定位置的改变情况, 初始位置为  $a = 0.1, \gamma = 1.5$ . 由图 2(b) 可以看出,  $S_1 (a = 0.048), S_2 (a = 0.08)$  和  $S_3 (a = 0.26)$  均为稳定的焦点, 分析可知, 即使从相同的初始位置出发, 系统将伴随着某一参数的改变而处于不同的稳定状态. 两幅图形都能与幅频曲线很好的吻合, 同时都能够体现出过鞍点的分隔线为边界所划分的奇点  $S_1$  和  $S_3$  的吸引域(图 2a).

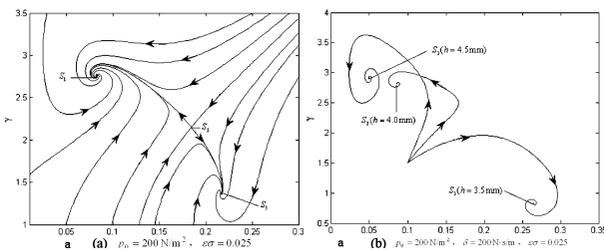


图 2 动相平面相轨迹图

Fig. 2 Phase trajectories in moving phase plane

图 3 选取的材料为石墨环氧. 分别表示不同条件下的振幅随激励幅值变化的曲线图, 从中可以看

出当激励幅值为零时, 振幅亦为零, 符合基本规律. 随着激励幅值的增大, 振幅呈逐渐增大趋势, 由于非线性项的作用, 将伴有多值或跳跃现象的发生, 并且反映出在共振被激发区域内, 振幅将随着板厚度(图 3a)的增大或者阻尼(图 3d)的增大而逐渐衰减的特性. 而随着层数(图 3b)或频率(图 3c)的变化, 幅值的变化较为复杂, 曲线有相交的现象.

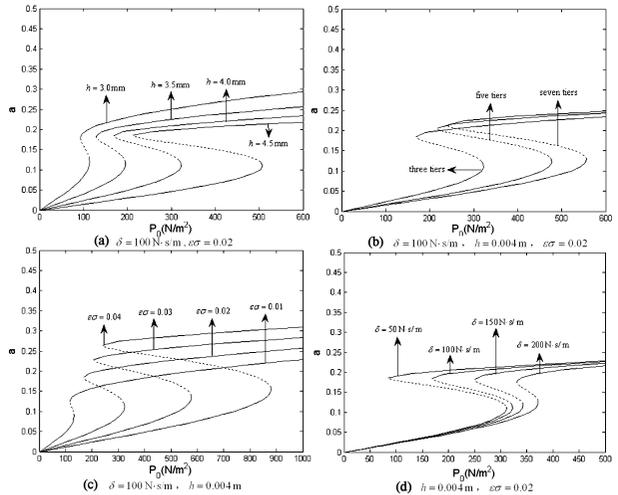


图 3 振幅-激励幅值响应曲线

Fig. 3 Amplitude-excitation amplitude curves

### 5 结论

研究了横向简谐激励作用下的正交各向异性叠层板的非线性主共振问题, 得到了稳态运动下的幅频响应, 绘制了不同参数影响下振幅随不同参数的变化规律曲线图及相轨迹图. 结果表明, 板厚度、阻尼系数以及激励力等参数均会对共振幅值产生不同程度的影响, 系统表现为较复杂的运动行为.

### 参 考 文 献

- 1 蒋咏秋, 陆逢升, 顾志建. 复合材料力学. 西安: 西安交通大学出版社, 1990 (Jiang Yongqiu, Lu Fengsheng, Gu Zhijian. Mechanics of Composite Materials. Xi'an: Xi'an Jiao-Tong University Press, 1990 (in Chinese))
- 2 Chia CY. Nonlinear Analysis of Plates. New York: McGraw-Hill, 1980
- 3 Wei Demin, Yang Guitong. Nonlinear dynamic stability of composite laminated plates. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2004, 25(11): 1215 ~ 1219
- 4 Min Ye, Jing Lu, Wei Zhang, Qian Ding. Local and global nonlinear dynamics of a parametrically excited rectangular

- symmetric cross-ply laminated composite plate. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 26(1):195 ~ 213
- 5 Min Ye, Yanhong Sun, Wei Zhang, Xueping Zhan, Qian Ding. Nonlinear oscillations and chaotic dynamics an anti-symmetric cross-ply laminated composite rectangular thin plate under parametric excitation. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 287(4-5):723 ~ 758
  - 6 王列东, 刘正宁, 周承倜. 初始缺陷和拉伸-弯曲耦合对于叠层板的振动、屈曲、和非线性动力稳定性的影响. 应用数学和力学. 1999, 20(5):477 ~ 485 (Wang Liedong, Zhou Chengti. Influence of initial imperfection and coupling between bending and extension on vibration, bucking and nonlinear dynamic stability of laminated plates. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, 20(5):477 ~ 485 (in Chinese))
  - 7 Udar Ratnakar S, Datta PK. Combination resonance characteristics of laminated composite plates subjected to non-uniform harmonic edge loading. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 2006, 78(2):107 ~ 119
  - 8 Shih YS, Bloter PT. Nonlinear vibration analysis of arbitrarily laminated thin rectangular plates on the elastic foundation. *Journal of Sound and Vibration*, 1993, 167(3):433 ~ 459
  - 9 贾立斌, 卿光辉, 刘艳红, 杜洪增. 压电热弹性体混合层合板的响应分析. 动力学与控制学报, 2007, 5(3):260 ~ 266 (Jia Libin, Qing Guanghui, Liu Yanhong, Du Hongzeng. Resonance analysis of hybrid laminated piezothermoelastic plate. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(3):260 ~ 266 (in Chinese))
  - 10 孙佳, 张伟, 陈丽华, 姚明辉. 蜂窝夹层板的非线性动力学研究. 动力学与控制学报, 2008, 6(2):150 ~ 155 (Sun Jia, Zhang Wei, Chen Lihua, Yao Minghui. Nonlinear dynamics of the honeycomb sandwich plates. *Journal of Dynamics and Control*, 2008, 6(2):150 ~ 155 (in Chinese))
  - 11 李银山, 陈予恕, 吴志强. 正交各向异性圆板非线性振动的亚谐分析. 机械强度, 2001, 23(2):148 ~ 151 (Li Yinshan, Chen Yushu, Wu Zhiqiang. Subharmonic bifurcation of the nonlinear forced flexural vibration of elastic circular plates exhibiting rectilinear orthotropy. *Journal of Mechanical Strength*, 2001, 23(2):148 ~ 151 (in Chinese))
  - 12 刘延柱, 陈立群编著. 非线性振动. 北京: 高等教育出版社, 2001 (Liu Yanzhu, Chen Liqun. *Nonlinear Vibrations*. Beijing: Higher Education Press, 2001 (in Chinese))

## NONLINEAR PRINCIPAL RESONANCE OF ORTHOTROPIC LAMINATED PLATES

Lu Shufeng Hu Yuda

(School of Civil Engineering and Mechanics, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

**Abstract** The stability and nonlinear principal resonance of rectangular orthotropic thin plate excited by a harmonic force were studied in this paper, under the condition of four sides simply supported. Based on the vibration differential equation of orthotropic laminated plates, the nondimensional Duffing nonlinear forced vibration equation was deduced by using Galerkin method. The amplitude frequency response equation of system steady motion under principal resonance was obtained by means of averaging method. Based on Lyapunov stable theory, the critical conditions of steady-state solutions' stability were got. By some examples, the amplitude-frequency curves, amplitude-excitation amplitude curves and phase trajectories in moving phase plane were derived under different situations. The stability of solution and the influence of different parameters on nonlinear resonance properties of system were analyzed.

**Key words** orthotropic, laminated plate, principal resonance, stability, averaged method