

索受外激励作用下索拱结构非线性动力学分析*

吕建根^{1,2} 赵跃宇³ 王荣辉²

(1. 仲恺农业工程学院城市建设学院, 广州 510225) (2. 华南理工大学土木与交通学院, 广州 510641)

(3. 湖南大学土木工程学院, 长沙 410082)

摘要 研究索拱结构中索受外激励作用下索拱之间非线性动力学问题. 利用已建立的索拱结构非线性动力学耦合面内运动微分方程, 采用 Galerkin 方法把索拱结构的面内运动方程进行离散, 然后利用多尺度法对离散的运动方程进行摄动得到索主共振情况下的平均方程, 研究在索受到外激励作用下索振动对拱的振动产生的影响, 同时对索拱结构内共振时的稳定、分叉及混沌情况进行了分析. 结果表明: 索某阶频率与拱某阶频率接近时可能出现内共振现象, 能量在索拱之间相互传递, 原本静止的拱也可能出现共振现象, 共振频段内索拱振动将出现跳跃、分叉及混沌等复杂的非线性动力学行为.

关键词 索拱结构, 非线性动力学, 分叉, 混沌

引言

大跨度索拱结构在土木工程中有广泛的应用, 如一些体育馆、展览馆和飞机库等建筑结构中的索拱结构、大跨度拱桥施工过程中的索拱结构等. 然而通常的索拱结构中索结构其基本特点是低阻尼、质量轻以及柔性好. 因此在外载的作用下, 索结构容易出现大幅的振动, 非线性现象非常明显. 关于大跨度拱桥施工中的索拱结构过去设计者们往往只进行强度、变形及稳定性分析^[1-6], 很少研究或讨论其动力学性能. 当前随着这类结构的跨径逐渐增大, 其非线性动力学问题日益突出, 并往往可能在设计中起着控制作用, 因此, 在土木工程领域对索拱结构非线性动力学问题的研究是一个很重要的课题.

许多学者对索结构的非线性动力学问题进行深入的研究^[7-8], 目前还没有看到对工程中索拱结构进行非线性动力学研究的报道. 本文主要从大跨度拱桥施工中的索拱结构工程背景中抽象出索拱力学模型开展索拱非线性动力学研究. 采用文献^[9]中已建立的索拱结构非线性动力学耦合面内运动微分方程, 利用多尺度摄动方法^[10], 分析索和拱可能出现的内共振模式, 研究索受到外激励而出现主共振情形下索拱之间的内共振, 分析索振动对拱振动产生的影响.

1 索拱结构面内运动基本方程

考虑大跨度拱桥缆索吊装施工中的索拱结构, 边界条件及坐标系如图 1 所示. 为了建模的方便, 将索的运动在坐标系 $o-xy$ 中描述, 拱的运动在 $\bar{o}-\bar{xy}$ 中描述. θ_c, θ_g 分别为索和拱的水平倾角, l_c, l_g 分别为在索和拱在相应坐标系中的跨度, d_c, d_g 分别为索的初始垂度和拱的矢高.

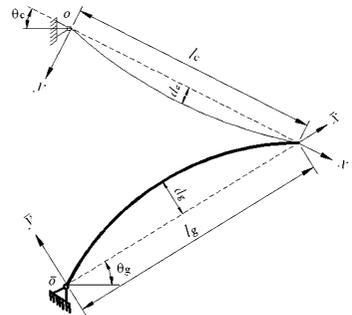


图 1 索拱结构力学分析模型

Fig. 1 Mechanical Model of Cable-stayed Arch

考虑斜拉索的抗拉强度、拱的轴向强度及拱的弯曲强度, 利用 Hamilton 变分原理可以得到索拱结构的非线性面内运动方程组^[9].

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ H \frac{\partial v_c}{\partial x} + E_c A_c \left(\frac{\partial y_0}{\partial x} + \frac{\partial v_c}{\partial x} \right) \left\{ \frac{v_g(l_g, t) - v_c(l_c, t) \cos(\theta_g + \theta_c)}{l_c \sin(\theta_g + \theta_c)} \right. \right.$$

$$\frac{1}{l_c} \int_0^l \left[\frac{dy_0}{dx} \frac{dv_c}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dv_c}{dx} \right)^2 \right] dx \} = m_c \frac{\partial^2 v_c}{\partial t^2} + c_c \frac{\partial v_c}{\partial t} \quad (1a)$$

$$N \frac{\partial^2 v_g}{\partial \bar{x}} + E_g A_g \left(\frac{\partial^2 \bar{y}_0}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 v_g}{\partial \bar{x}^2} \right) \left\{ \frac{v_g(l_g, t) - v_c(l_c, t) \cos(\theta_g + \theta_c)}{l_c \sin(\theta_g + \theta_c)} + \frac{1}{2l_g} \int_0^l \left[\left(\frac{\partial v_g}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \bar{x}} \right) - \left(\frac{\partial \bar{y}_0}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right] dx \right\} - E_g I_g \frac{\partial^4 v_g}{\partial \bar{x}^4} = m_g \frac{\partial^2 v_g}{\partial t^2} + c_g \frac{\partial v_g}{\partial t} \quad (1b)$$

其中, u_c, u_g 分别表示索和拱在长度方向的纵向位移, v_c, v_g 分别表示索和拱的横向振动位移, H, N 分别为索和拱的初始轴向力, $E_c A_c, E_g A_g$ 分别为索的抗拉刚度和拱的拉压刚度, $E_g I_g$ 为拱的面内抗弯刚度, m_c, m_g 分别为索和拱单位长度质量, c_c, c_g 分别为索和拱的结构阻尼系数, y_0, \bar{y}_0 分别为索和拱在各自局部坐标系中的初始构形方程。

2 运动方程的摄动分析

在索拱结构中, 索的自振频率通常比同阶弹性拱的自振频率低很多, 因此, 索拱之间相互激励而产生的内共振往往在索的高阶振动与弹性拱的低阶振动之间。从而, 在对索拱组合结构相互作用的内共振分析过程中, 必须包括索拱的高阶模态, 下面对索拱面内运动方程做 Galerkin 无穷阶离散, 可以假设

$$\begin{cases} v_c(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \\ v_g(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\bar{x}) \bar{q}_n(t) \end{cases} \quad (2)$$

将上式代入式(1)中, 在式(1a)两边同乘以 $\phi_i(x)$ 在 $[0, l_c]$ 内积分, 在式(1b)式两边同乘以 $\varphi_i(\bar{x})$ 然后在 $[0, l_g]$ 内积分, 在索运动方程中增加外激励项, 并利用振型函数的正交性, 为了使阻尼效应、非线性和激励项全部出现在同阶中, 需引入任意数 ε , 得到索拱结构无穷阶离散动力学方程

$$\ddot{q}_n + 2\varepsilon\mu_{1,n}\dot{q}_n + \omega_{1,n}^2 q_n + \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \varepsilon\alpha_{1,mn} q_m + \sum_{m,p,q=1}^{\infty} \varepsilon(\alpha_{3,mn} \bar{q}_m + \beta_{1,mpn} q_m \bar{q}_p + \beta_{3,mpn} q_m q_p + \gamma_{1,mpqn} q_m q_p q_q) = 0 \quad (3a)$$

$$\ddot{\bar{q}}_n + 2\varepsilon\mu_{2,n}\dot{\bar{q}}_n + \omega_{2,n}^2 \bar{q}_n + \sum_{m=1, m \neq n}^{\infty} \varepsilon\alpha_{2,mn} \bar{q}_m +$$

$$\sum_{m,p,q=1}^{\infty} \varepsilon(\alpha_{3,mn} \bar{q}_m + \beta_{1,mpn} q_m \bar{q}_p + \beta_{3,mpn} q_m q_p + \gamma_{1,mpqn} q_m q_p q_q) = 0 \quad (3b)$$

其中系数表达式见文献[9]。同时为了利用多尺度法求二次近似解, 引入时间尺度 $T_i = \varepsilon^i t (i = 1, 2, \dots)$, 并为了定量描述 Ω_n 与 ω 、以及 $\omega_{1,n}$ 与 $\omega_{2,m}$ 的接近程度, 引进参数 σ_1 和 σ_2

$$\Omega_n = \omega_{1,n} + \varepsilon\sigma_1; \omega_{1,n} = \omega_{2,m} + \varepsilon\sigma_2 \quad (4)$$

按照多尺度法摄动步骤, 消除久期项得到以下可解性的条件

$$\begin{cases} 2i\omega_{1,n} D_1 A_n + 2i\omega_{1,n} \mu_{1,n} A_n + 2\gamma_{1,nnnn} A_n^2 \bar{A}_n + \alpha_{3,mn} B_m e^{-i\sigma_2 T_1} - \frac{1}{2} f_n e^{i\sigma_1 T_1} = 0 \\ 2i\omega_{2,m} D_1 B_m + 2i\omega_{2,m} \mu_{2,m} B_m + 2\gamma_{2,mmmm} B_m^2 \bar{B}_m + \alpha_{4,nnm} A_n e^{i\sigma_2 T_1} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

从(4)~(5)式可以得知, 除了 A_n 和 B_m 之外, 所有的其它阶索拱的振幅在阻尼的作用下都衰减。但是索拱非线性响应中存在直接激发的索模态以及通过内共振而激发的拱模态。因此可解性条件可以转化成为一个二维系统。假设 $A_n = a_n(T_1) e^{i\theta_n(T_1)}/2; B_m = b_m(T_1) e^{i\theta_m(T_1)}/2$, 其中 a_n 和 b_m 都是实函数, 代入可解性条件(5)式, 并将结果分成实部和虚部, 整理之后可以得到平均方程的极坐标形式

$$a_n' = -\mu_{1,n} a_n - \frac{\alpha_{3,mn}}{2\omega_{1,n}} b_m \sin\gamma_1 + \frac{f_n}{2\omega_{1,n}} \sin\gamma_2 \quad (6a)$$

$$a_n \theta_n' = \frac{\gamma_{1,nnnn}}{4\omega_{1,n}} a_n^3 + \frac{\alpha_{3,mn}}{2\omega_{1,n}} b_m \cos\gamma_1 - \frac{f_n}{2\omega_{1,n}} \cos\gamma_2 \quad (6b)$$

$$b_m' = -\mu_{2,m} b_m + \frac{\alpha_{4,nnm}}{2\omega_{2,m}} a_n \sin\gamma_1 \quad (6c)$$

$$b_m \theta_m' = \frac{\gamma_{2,mmmm}}{4\omega_{2,m}} b_m^3 + \frac{\alpha_{4,nnm}}{2\omega_{2,m}} a_n \cos\gamma_1 \quad (6d)$$

其中: $\gamma_1 = \bar{\theta}_m - \theta_n - \sigma_2 T_1, \gamma_2 = \sigma_1 T_1 - \theta_n$ 。通过坐标变换, 可以得到平均方程的直角坐标形式如下:

$$u_n' = \sigma_1 v_n - \mu_{1,n} u_n - \frac{\gamma_{1,nnnn}}{4\omega_{1,n}} (u_n^2 + v_n^2) v_n - \frac{\alpha_{3,mn}}{2\omega_{1,n}} v_m \quad (7a)$$

$$v_n' = -\sigma_1 u_n - \mu_{1,n} v_n + \frac{\gamma_{1,nnnn}}{4\omega_{1,n}} (u_n^2 + v_n^2) u_n + \frac{\alpha_{3,mn}}{2\omega_{1,n}} u_m - \frac{f_n}{2\omega_{1,n}} \quad (7b)$$

$$u_m' = (\sigma_1 + \sigma_2) v_m - \mu_{2,m} u_m - \frac{\gamma_{2,mmmm}}{4\omega_{2,m}} (u_m^2 + v_m^2) v_m - \frac{\alpha_{4,nnm}}{2\omega_{2,m}} v_n \quad (7c)$$

$$v_m' = -(\sigma_1 + \sigma_2) v_m - \mu_{2,m} v_m + \frac{\gamma_{2,mmmm}}{4\omega_{2,m}} (u_m^2 + v_m^2) u_m + \frac{\alpha_{4,nnm}}{2\omega_{2,m}} u_n \quad (7d)$$

3 算例分析

3.1 平均方程系数及其求解

经对某索拱结构的计算分析得知, $\omega_{1,6} = 4.352$, $\omega_{2,1} = 4.415$ ($n=6, m=1$), 即索的第6阶模态和拱的第1阶模态之间可能出现1:1内共振, 此时则索和拱的其它模态之间不发生内共振, 索拱的其它模态在阻尼的作用下逐渐衰减, 因此, 索拱无穷维稳态响应完全等同于为索拱两自由度的 Galerkin 离散模型的稳态响应, 在索受到外激励作用下的内共振分析中, 假设索和拱的阻尼比 $\mu_{1,6} = \mu_{2,1} = 0.01$, 平均方程(6)中各个系数数值见表1.

表1 平均方程的各个系数值

Table 1 The coefficients of averaging equation

σ_2	$\omega_{1,6}$	$\omega_{2,1}$	$\alpha_{3,16}$	$\alpha_{4,61}$	$\gamma_{1,6666}$	$\gamma_{2,1111}$
-0.63	4.352	4.415	-109.89	-2.797	4004.6	586.65

索发生主共振情形下, 系统的稳态解可以通过令平均方程极坐标形式中的 $a'_6 = b'_1 = \gamma'_1 = \gamma'_2 = 0$ 求得, 也可通过令平均方程直角坐标形式中的 $u'_6 = v'_1 = u'_1 = v'_2 = 0$, 两者是等效的. 在计算幅频响应曲线或振幅与激励幅值关系曲线时, 将参数先取一个较小或较大的值, 然后利用 Newton-Raphson 方法来确定一组稳态解. 在确定一组初始值后, 利用基于延续原理的拟弧长算法^[11]向前或向后追踪整条解曲线. 在下面幅频关系曲线或振幅与激励幅值关系曲线中, 实线代表稳定解, 虚线代表不稳定解, SNB 代表鞍结分叉点, HB 代表 Hopf 分叉点.

3.2 索拱结构 1:1 内共振稳态解

图2和图3分别给出在索的第十阶模态受到周期性激励而产生主共振情形下索和拱的幅频响应曲线, 其索的外激励幅值 $f = 2.0$ ($F_6 = 2.18 \text{ kN/m}$). 从两幅图中可以看出, 索和拱幅频曲线都有两个共振峰值, 都表现硬弹簧特性, 索拱的共振点滞后于确切共振点; 不同之处在于, 索表现出明显的非线性特性, 而拱的非线性特性不明显, 索的共振频域较宽, 相比较而言, 拱的共振频域狭小很多, 说明索更容易产生共振.

在索拱的幅频响应曲线中, 当调谐参数 $\sigma_1 < 0.21$ 时, 平均方程的稳态解呈单值性, 而且随着 σ_1 的增大, 索拱的振幅单调增大; 在 $\sigma_1 \approx 0.21$ 处, 索拱的稳态解曲线出现了第一个鞍结分叉点(SNB1), 从该

点分支出两条解曲线, 从而出现了三条解曲线, 两条稳定, 一条不稳定, 最大的稳定解曲线与较大的不稳定解曲线最终终止于第三个鞍结分叉点 SNB3 ($\sigma_1 \approx 6.0$); 在调谐参数处 $\sigma_1 \approx 5.25$, 解曲线出现了第二个鞍结分叉点(SNB2), 同样从该鞍结点出发, 随着 σ_1 的增大, 分支出两条解曲线, 较大的一条不稳定, 较小的一条是稳定的, 因此, 在频域区间 $5.25 < \sigma_1 < 6.0$, 索拱的振幅存在五个值, 三个稳定, 两个不稳定. 特别值得注意的是, 在较大的一支解曲线上, 当 $\sigma_1 \approx 1.02$ 时, 此时平均方程的 Jacobian 矩阵的一组共轭特征值实部由负数变为正数, 而虚部不等于零, 即存在一对共轭纯虚根, 根据 Hopf 定理可以判定在该点邻域内发生了 Hopf 分叉(HB1), 该条解曲线由稳定变得不稳定, 随着的 σ_1 增大, 在 $\sigma_1 \approx 6.08$ 邻域内, 该条解曲线通过另一个 Hopf 分叉(HB2)重新获得了稳定性. 从发生共振的振幅上看, 索的振幅比拱的振幅高一个数量级, 说明了索的振动对拱的振动影响很小.

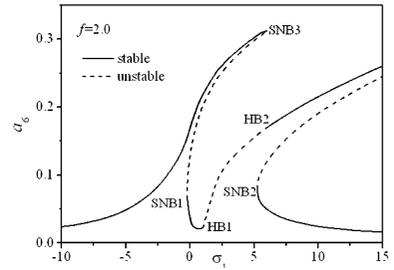


图2 索的幅频响应曲线: $\Omega_6 \approx \omega_{1,6}$

Fig. 2 Frequency-response curves of cables: $\Omega_6 \approx \omega_{1,6}$

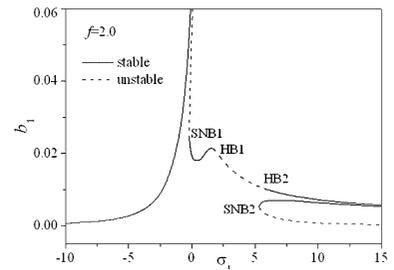


图3 拱的幅频响应曲线: $\Omega_6 \approx \omega_{1,6}$

Fig. 3 Frequency-response curves of arch: $\Omega_6 \approx \omega_{1,6}$

在给定三种不同调谐参数 σ_1 情况下, 图4给出了索拱振幅与激励幅值的关系曲线. 在调谐参数 σ_1 较小时, 索拱的振幅呈单值性, 只有在调谐参数大于某个临界值时, 索拱的幅值逐渐出现多值、跳跃现象及分叉等复杂的非线性动力学行为. 随着激励幅值 f 的增大, 模态的幅值越来越大. 下面以 σ_1

$= 0$ 说明模态幅值的跳跃现象,随着 f 的增大,当 $f = 3.1 (F_6 = 3.19\text{KN/m})$ 时,幅值经过一个鞍结分叉 (SNB2) 后,发生跳跃现象,幅值沿着最大的一支解曲线继续增大,若激励幅值 f 由一个较大值逐渐减小,模态的幅值越来越小,当 $f = 0.2 (F_6 = 0.218\text{KN/m})$ 时,幅值经过另一个鞍结分叉点 (SNB1) 后,发生跳跃现象,幅值跳到最小的解曲线上继续减小. 以 $\sigma_1 = 2.0$ 说明模态幅值的 Hopf 分叉现象,随着 f 的增大,当 $f \approx 0.2 (F_6 = 0.218\text{KN/m})$ 时,最小的解曲线出现了 Hopf 分叉,从而解失去了稳定性,当 $f \approx 3.1 (F_6 = 3.19\text{KN/m})$ 时,解曲线经过另一个 Hopf 分叉又重新获得了稳定性.

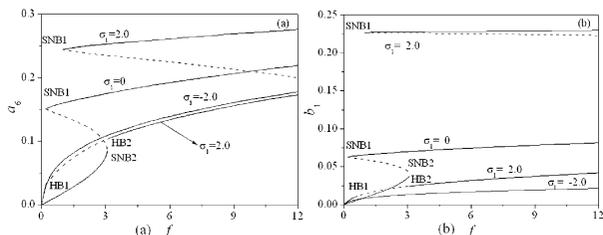


图 4 索和拱的振幅与激励幅值关系曲线: $\Omega_6 \approx \omega_{1,6}$ (a) 索; (b) 拱
Fig. 4 The relationship between excitation amplitude and amplitude of cables and arch: $\Omega_6 \approx \omega_{1,6}$ (a) cables; (b) arch

3.3 索拱结构 1:1 内共振周期解及混沌解

根据 Hopf 定理,系统经过 Hopf 分叉后,相空间将产生稳定的极限环,平均方程的稳态解转变为

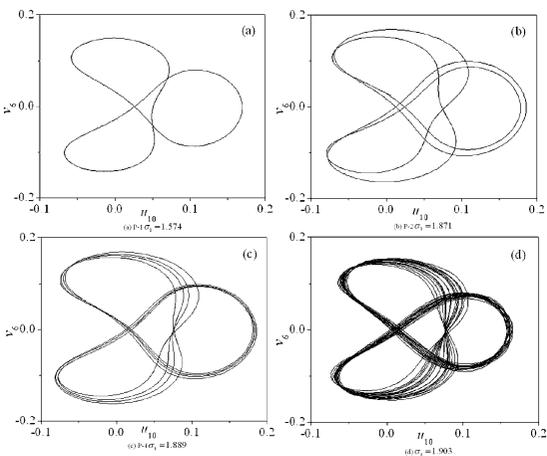


图 5 索的相图

Fig. 5 Phase plane of cables

周期解,系统由周期运动转变为拟周期运动. 利用四阶 Runge-Kutta 法对直角坐标形式的平均方程直接进行数值积分,主要分析系统产生 Hopf 分叉期间解的变化. 在 Hopf 分叉点附近,图 5 和图 6 给出了平均方程的周期解,调谐参数 σ_1 从 1.574 增加

到 1.903 的过程中,观察到 Hopf 分叉的极限环经过一系列倍周期分叉进入混沌状态的过程,从图中可以看出,混沌运动是无序的、不可重复的.

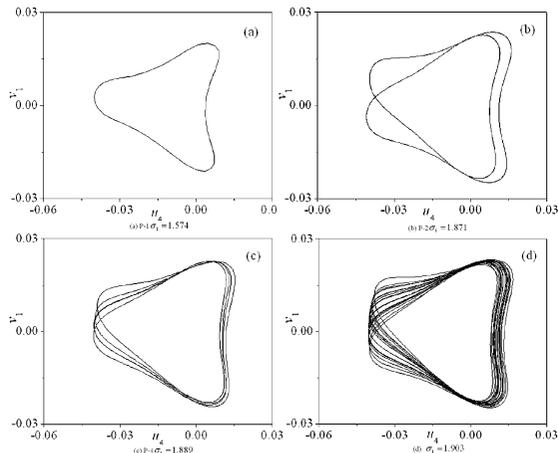


图 6 拱的相图

Fig. 6 Phase plane of arch

4 结语

通过对索拱结构在索受到外激励而产生主共振情形下的索拱 1:1 内共振分析,可以得到以下几点结论:

(1) 在索拱结构中,当索的某高阶模态频率与拱的某低阶模态频率大小接近时,若索受外激励作用而出现主共振情形下,索拱之间可能出现内共振现象,即索对拱产生激励,能量在索拱之间相互传递,原本静止的拱也可能出现共振现象.

(2) 索拱内共振存在不止一个共振点,由于索对拱激励而产生的拱振幅很小,拱共振幅值的大小与索外激励振幅大小有关.

(3) 通过数值分析发现,随着有关参数细微的变化,索拱内共振下稳态振动将出现不稳定,产生稳定的极限环,随着参数的继续变化,导致倍周期分叉并最终产生跳跃及混沌现象.

参 考 文 献

- 1 赵雷,杜正国. 大跨度钢筋混凝土拱桥钢管混凝土劲性骨架施工阶段稳定性分析. 西南交通大学学报, 1994, 29 (4): 446 ~ 452 (Zhao Lei, Du Zhenguo. Analysis of stability during construction of the steel-tube concrete stiff skeleton of long-span RC arch bridge. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 1994, 29 (4): 446 ~ 452 (in Chinese))
- 2 陈宝春,孙潮. 石潭溪大桥施工受力分析. 中国公路学

- 报,1998,11(4):51~56(Chen Baochun, Shun Cao. Mechanic analysis of the construction phase of shitanxi bridge. *China Journal of Highway and Transport*,1998,11(4):51~56(in Chinese))
- 3 剧锦三,郭彦林.索-拱结构的平面内稳定性研究.建筑学报,2001,22(2):84~87(Ju Jinsan,Guo Yanlin. Instability behavior in the plane of cable-arch structure. *Journal of Building Structures*,2001,22(2):84~87(in Chinese))
- 4 丁建国.索-拱结构受跨中集中力作用时的稳定性分析.南京理工大学学报,2003,27(2):214~217(Ding Jianguo. The analysis of stability on cable-arch structure acted by a concentrated load at the middle point of a span. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*,2003,27(2):214~217(in Chinese))
- 5 赵跃宇,康厚军,王连华,等.索-拱结构面内稳定性研究.湖南大学学报:自然科学版,2006,33(3):1~5(Zhao Yueyu,Kang Houjun,Wang Lianhua,etal. Instability behavior in the plane of cable-arch structure. *Journal of Hunan University: Natural Science*,2006,33(3):1~5(in Chinese))
- 6 赵跃宇,康厚军,蒋丽忠等.考虑双重非线性的索-拱结构力学性能.中南大学学报,2007,38(1):148~153(Zhao Yueyu,Kang Houjun,Jiang Lizhong. Mechanical behavior of cable-arch structure with geometric and material nonlinear. *Journal of Center South University*,2007,38(1):148~153(In Chinese))
- 7 周海兵,刘伟长.基于延拓方法的悬索非线性振动分析.动力学与控制学报,2008,6(1):73~77(Zhou Haibing,Liu Weichang. Nonlinear oscillations of suspended cables using the continuation method. *Journal of Dynamics and control*,2008,6(1):73~77(In Chinese))
- 8 赵跃宇,王涛,康厚军.斜拉索主参数共振的稳定性分析.动力学与控制学报,2008,6(2):112~117(Zhao Yueyu,Wang Tao,Kang Houjun. Analysis of the stability of principal parametric resonance of stayed-cable. *Journal of Dynamics and control*,2008,6(2):112~117(In Chinese))
- 9 吕建根.大跨度索拱组合体系非线性静动力性能研究.湖南大学博士学位论文,2007(Lü Jiagen. The research on nonlinear static-dynamic mechanics performance of long-span cable-stayed arch system. Doctoral dissertation of Hunan University,2007(in Chinese))
- 10 Navfeh A H. Perturbation Methods. Wiley- Interscience. New York,1981
- 11 Nayfeh A H,Balachandran B. Applied Nonlinear Dynamics, Wiley-Interscience. New York,1994

NONLINEAR DYNAMICS OF CABLE-STAYED ARCH UNDER CABLES SUBJECTED TO EXTERNAL EXCITATION*

Lü Jiagen^{1,2} Zhao Yueyu³ Wang Ronghui²

(1. School of Urban construction, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China)

(2. School of Civil Engineering and Transportation, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China)

(3. School of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

Abstract The nonlinear dynamics of the cable-stayed arch under cables subjected to external excitation was investigated. The coupling nonlinear dynamics equations of the cable-stayed arch derived by using Hamilton principle were used. First, the Galerkin method was used to discrete the nonlinear equation of planar motion. Then the method of multiple scales was applied to perturb the discrete equations of motion, and the averaged equation under the primary resonances of cables was obtained. The impact of the vibration of cables over the vibration of arch under cables subjected to external excitation was studied, and the equilibrium solution, the period solution and chaotic solution of averaging equations were examined. The analysis results indicate that the internal resonance of the cable-stayed arch possibly appears when the frequency of cables approaches close to the frequency of arch, the energy is transferred mutually between cables and arch, and the cable-stayed arch presents complicated nonlinear dynamics behavior such as leap, bifurcation and chaos within the resonance frequency region.

Key words cable-stayed arch, nonlinear dynamics, bifurcation, chaos

Received 16 November 2008, revised 20 December 2008.

* The project supported by the National Science Foundation of China (50378040) and the Natural Science Foundation of Zhongkai University of Agriculture and Engineering (G2360273)