

考虑热效应的复合材料多体系统动力学研究*

刘锦阳 潘科琪

(上海交通大学船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

摘要 研究离心力和温度变化引起的附加弯曲变形对复合材料柔性多体系统振动特性的影响. 从本构关系和非线性应变与位移关系式出发, 用虚功原理和有限单元法建立了复合材料柔性梁的动力学变分方程, 在此基础上建立了复合材料柔性多体系统的动力学方程. 对曲柄-连杆-滑块机构的数值仿真表明, 对于非对称的复合材料梁, 各层弹性模量和热膨胀系数的差异会引起附加弯曲变形, 从而影响系统的振动特性.

关键词 复合材料多体系统, 几何非线性, 附加弯曲变形, 动力学, 热效应

引言

由于复合材料具有材料重量轻, 强度和刚度大、耐高温和安全性好的特点, 在工程界被广泛使用. 复合材料具有明显的非均匀性和各向异性性质, 与各向同性材料不同, 复合材料的材料特性在铺层方向的不对称, 使复合材料结构在离心力作用或者均匀升温时会产生附加的弯曲变形, 影响弹性振动特性, 有必要对复合材料多体系统的动力学模型进行研究.

近十年来, 柔性多体系统的动力学建模理论研究取得了很大的进展. 传统的混合坐标法基于线性的应变-位移关系, 无法解释旋转梁的动力刚化现象, 为此, 国内外学者分别用附加初应力法、子结构法、一次近似混合坐标法和绝对节点坐标法^[1,2,3]建立了几何非线性动力学模型, 并通过实验验证了建模理论的正确性^[4], 在此基础上笔者^[5]建立了考虑热效应的柔性多体系统的几何非线性模型. 上述动力学模型基于各向同性假设, 仅适用于均质材料.

在各向同性材料动力学模型的基础上, Neto 和 Mechab^[6,7]基于线弹性理论, 建立了复合材料多体系统的动力学模型; Yoo^[8]将几何非线性动力学模型拓展到作旋转运动的平面梁, 研究了旋转角速度和复合材料参数对系统振动频率的影响, 考虑了各向异性和应变的非线性项, 但是在建模过程中基于小变形假设, 忽视了动力学方程中变形位移的高次

项, 是不完备的几何非线性模型.

根据各层纤维角分布可以分为对称和非对称两种情况, 本文研究离心力和温度变化引起的附加弯曲变形对于对称和非对称复合材料梁系统的振动特性的影响. 用虚功原理建立了复合材料柔性梁的有限元离散的动力学变分方程, 在建模过程中考虑了几何非线性和动力学方程中变形位移的高次项. 在此基础上根据运动学约束关系建立了复合材料柔性多体系统的几何非线性的完备的动力学模型. 通过对曲柄-连杆-滑块机构的数值仿真揭示了对称和非对称复合材料梁系统的振动特性的本质差异.

1 复合材料平面梁的动力学变分方程

如图 1 所示, \vec{e}_0 为惯性基, \vec{e}_i 为 B_i 的浮动基. B_i 中线上任意一点 k 关于 \vec{e}_0 的位移 \vec{r} 和 \vec{r} 在 \vec{e}_0 上的坐标阵分别可表示为

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}, \quad \vec{s} = \vec{s}_0 + \vec{u} \quad (1)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{A}\mathbf{s}', \quad \mathbf{s}' = \mathbf{s}'_0 + \mathbf{u}' \quad (2)$$

其中, \vec{r}_0 为 B_i 浮动基原点 O_i 关于 $\vec{e}_0 = [\vec{x}_0 \ \vec{y}_0]^T$ 的位移, \vec{s}_0 和 \vec{s} 分别为 k 点在变形前后关于 $\vec{e}_i = [\vec{x}_i \ \vec{y}_i]^T$ 的位置矢量, \vec{u} 为 k 点的变形位移矢量. \mathbf{r}_0 为 \vec{r}_0 在 \vec{e}_\perp 的坐标阵, \mathbf{s}' , \mathbf{s}'_0 , \mathbf{u}' 分别为 \vec{s} , \vec{s}_0 , \vec{u} 在 \vec{e}_i 上的坐标阵, \mathbf{A} 为方向余弦阵, 可表示为 $\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

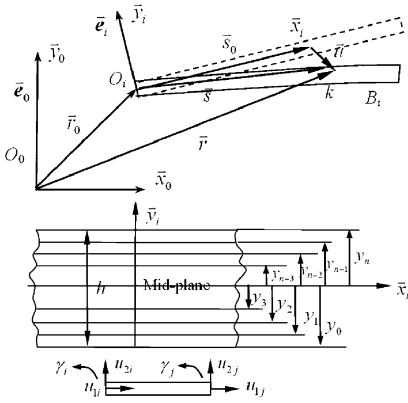


图1 复合材料平面梁和梁单元

Fig.1 A composite planar beam and beam element

用有限单元法离散,纵向和横向变形位移 u_1 和 u_2 可表示为 $u_1 = N_1 \mathbf{p}$, $u_2 = N_2 \mathbf{p}$, 变形位移阵可写成

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{p}, \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

其中, \mathbf{N} 为形函数阵, \mathbf{p} 为节点变形位移坐标阵. 对(2)关于时间求导, 得到任意一点 k 的速度和加速度在 $\bar{\mathbf{e}}_0$ 上的坐标阵为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_0 + \dot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{s}' + \mathbf{A} \mathbf{N} \dot{\mathbf{p}}, \\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_0 + \ddot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{s}' + \mathbf{A} \mathbf{N} \ddot{\mathbf{p}} - \dot{\theta} \mathbf{A} \mathbf{s}' + 2 \dot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{N} \mathbf{s}' \dot{\mathbf{p}} \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 于是, 惯性力和体力作的虚功和为

$$\delta W = \int_V \delta \mathbf{r}^T (\mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{r}}) dV = \delta \mathbf{q}^T (-\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_f) \quad (5)$$

其中, ρ 为体密度, \mathbf{f} 为体力在 $\bar{\mathbf{e}}_0$ 上的坐标阵, $\mathbf{q} = [\mathbf{r}_0^T \quad \theta \quad \mathbf{p}^T]^T$ 为广义坐标阵. 设 S 为横截面积, 广义质量阵 \mathbf{M} , 广义惯性力阵 \mathbf{Q}_i 和广义体力阵 \mathbf{Q}_f 的表达式为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho V I & \int_0^L \rho S \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{s}' dx & \int_0^L \rho S \mathbf{A} \mathbf{N} dx \\ -\int_0^L \rho S \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A}^T dx & \int_0^L \rho S \mathbf{s}^T \mathbf{s}' dx & -\int_0^L \rho S \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{N} dx \\ \int_0^L \rho S \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T dx & \int_0^L \rho S \mathbf{N}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{s}' dx & \int_0^L \rho S \mathbf{N}^T \mathbf{N} dx \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \int_0^L \rho S (\dot{\theta}^2 \mathbf{A} \mathbf{s}' - 2 \dot{\theta} \mathbf{A} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{N} \dot{\mathbf{p}}) dx \\ -\int_0^L 2 \rho S \dot{\theta} \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{N} \dot{\mathbf{p}} dx \\ \int_0^L \rho S \mathbf{N}^T (\dot{\theta}^2 \mathbf{s}' - 2 \dot{\theta} \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{N} \dot{\mathbf{p}}) dx \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_f = \begin{bmatrix} V f \\ -\int_0^L S \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{I}} \mathbf{A}^T f dx \\ \int_0^L S \mathbf{N}^T \mathbf{A}^T f dx \end{bmatrix} \quad (7)$$

对于平面细长梁, 基于 Euler-Bernoulli 假设, 不计剪切变形和应变, 弹性力做的虚功为

$$\delta W_e = - \sum_{k=1}^n \int_0^L \int_0^b \int_{y_{k-1}}^{y_k} \delta \varepsilon_x \sigma_x dy dz dx \quad (8)$$

其中, y_k 为第 k 层到中面的距离, 如图 1 所示. 轴向应力为^[7]

$$\sigma_x = \bar{Q}_{11}^{(k)} (\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) \quad (9)$$

其中, 各参数的表达式为^[10]

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11}^{(k)} &= Q_{11} \cos^4 \Gamma_k + Q_{22} \sin^4 \Gamma_k + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \Gamma_k \cos^2 \Gamma_k \\ \bar{\alpha}_x^{(k)} &= \alpha_1 \cos^2 \Gamma_k + \alpha_2 \sin^2 \Gamma_k, \quad Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \end{aligned}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\gamma_{12} E_2}{1 - \gamma_{12} \gamma_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

上式中, Γ_k 为第 k 层的纤维角, E_1 和 E_2 为各方向的弹性模量, G_{12} 为剪切弹性模量. 设梁上任意各点的温度均为 T , 参考温度为 T_r , 则任意一点的温度变化为

$$\Delta T = T - T_r \quad (10)$$

格林应变的表达式为^[9]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 \right] - y \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \\ &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p} - y \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} \mathbf{p} \end{aligned} \quad (11)$$

将(9)-(11)代入(8),

$$\delta W_e = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{Q}_T + \delta \mathbf{p}^T \mathbf{Q}_e, \quad \mathbf{Q}_e = -(\mathbf{K}_L + \mathbf{K}_N) \mathbf{p} \quad (12)$$

其中, \mathbf{K}_L 和 \mathbf{K}_N 分别为线性和非线性刚度阵, \mathbf{Q}_T 为与热效应相关的广义力阵, 可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_L &= \int_0^L A_{11} N_1^T N_1 dx + \int_0^L D_{11} N_2^T N_2 dx - \\ &= \int_0^L B_{11} \delta \mathbf{p}^T (N_1^T N_2'' + N_1'' N_1^T) \mathbf{p} dx - \\ &= \Delta T \int_0^L N_{11} N_1^T N_1 dx \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_N &= \frac{1}{2} \int_0^L A_{11} N_1^T (\mathbf{p}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{p}) N_1 dx + \\ &= \int_0^L (A_{11} N_1^T \mathbf{p} - B_{11} N_2'' \mathbf{p}) N_1^T N_1 dx \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{Q}_T = \Delta T \int_0^L N_{11} N_1^T dx - \Delta T \int_0^L M_{11} N_2'' dx -$$

$$\frac{1}{2} \int_0^L (\mathbf{p}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{p}) (A_{11} \mathbf{N}_1'^T - B_{11} \mathbf{N}_1''^T) dx \quad (15)$$

其中

$$A_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} dy = b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} (y_k - y_{k-1})$$

$$B_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} y dy = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} (y_k^2 - y_{k-1}^2) \quad (16)$$

$$D_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} y^2 dy = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} (y_k^3 - y_{k-1}^3)$$

$$N_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha_x^{(k)} dy =$$

$$b \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha_x^{(k)} (y_k - y_{k-1})$$

$$M_{11} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha_x^{(k)} y dy =$$

$$\frac{b}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha_x^{(k)} (y_k^2 - y_{k-1}^2) \quad (17)$$

2 柔性多体系统的动力学方程

设柔性多体系统是由 N 个梁组成的系统, 动力学变分方程为 $\sum_{i=1}^N (\delta W^{(i)} + \delta W_e^{(i)}) = 0$, 即

$$\sum_{i=1}^N \delta \mathbf{q}^{(i)T} (\mathbf{Q}_i^{(i)} + \mathbf{Q}_f^{(i)} + \mathbf{Q}_T^{(i)} + \mathbf{Q}_e^{(i)} - \mathbf{M}^{(i)} \ddot{\mathbf{q}}^{(i)}) =$$

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{Q} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}) = 0 \quad (18)$$

其中, $\mathbf{q} = [\mathbf{q}^{(1)T} \dots \mathbf{q}^{(N)T}]^T$ 为系统的广义坐标阵, 广义质量和广义力阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{(1)} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \mathbf{M}^{(N)} & \\ & & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i^{(1)} + \mathbf{Q}_f^{(1)} + \mathbf{Q}_T^{(1)} + \mathbf{Q}_e^{(1)} & & & \\ & \vdots & & \\ \mathbf{Q}_i^{(N)} + \mathbf{Q}_f^{(N)} + \mathbf{Q}_T^{(N)} + \mathbf{Q}_e^{(N)} & & & \end{bmatrix} \quad (19)$$

设柔性多体系统的约束方程为, 系统封闭的动力学方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \Phi_q^T \\ \Phi_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ -(\Phi_q \dot{\mathbf{q}})_q \dot{\mathbf{q}} - 2\Phi_{qt} \dot{\mathbf{q}} - \Phi_{tt} \end{bmatrix} \quad (20)$$

其中, Φ_q 为雅可比阵, λ 为拉格朗日乘子列阵.

3 曲柄-滑块机构的数值仿真

曲柄-滑块机构如图 2 所示. 曲柄角速度的变

化规律为

$$\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{t_s} (t - \frac{t_s}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{t_s} t) & \text{rad/s, } t \leq t_s \\ \pi & \text{rad/s, } t > t_s \end{cases} \quad (21)$$

其中, $t_s = 0.2s$. 环境温度变化规律为

$$\Delta T = \frac{\Delta T_m t}{t_m} \quad (22)$$

其中, $t_m = 1s$.

曲柄和连杆均为复合材料的矩形梁, 长度分别为 $1m$ 和 $2m$, 横截面的宽和高均为 $b = h = 0.02m$. 曲柄和连杆的材料特性相同, 体密度均为 $\rho = 2750kg/m^3$, 各方向的弹性模量均为 $E_1 = 14.5 \times 10^{10} N/m^2$, $E_2 = 0.96 \times 10^{10} N/m^2$, $G_{12} = 0.41 \times 10^{10} N/m^2$, 泊松比均为 $\gamma_{12} = 0.3$, $\gamma_{21} = 0.02$, 热膨胀系数均为 $\alpha_1 = 0.3 \times 10^{-6} 1/K$, $\alpha_2 = 28.11 \times 10^{-6} 1/K$.

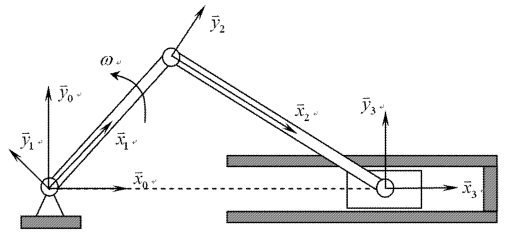


图 2 复合材料柔性多体系

Fig. 2 Flexible multi-body system made of composite material

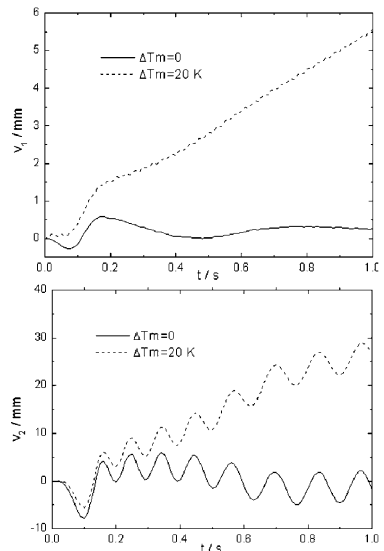


图 3 温度变化对非对称复合材料梁中点挠度的影响

Fig. 3 Influence of temperature on the mid-deflection of the non-symmetric composite beam

图 3 为考虑和不计温度变化时非对称复合材料梁中点挠度的时变规律, 其中和分别表示曲柄和

连杆的中点挠度.可以看出,当 $\Delta T_m = 20K$ 时,非对称复合材料梁各层热膨胀系数和弹性模量不同引起附加弯曲变形,使梁中点的弯曲挠度随时间变化逐渐递增.图4为考虑和不计温度变化时对称复合材料梁中点挠度的时变规律.可以看出,当 $\Delta T_m = 20K$ 时,由于复合材料梁 $y \leq 0$ 和 $y \geq 0$ 部分的热膨胀系数和弹性模量不同引起的弯曲变形相互抵消,因此温度变化对上下对称的复合材料梁中点挠度没有影响.

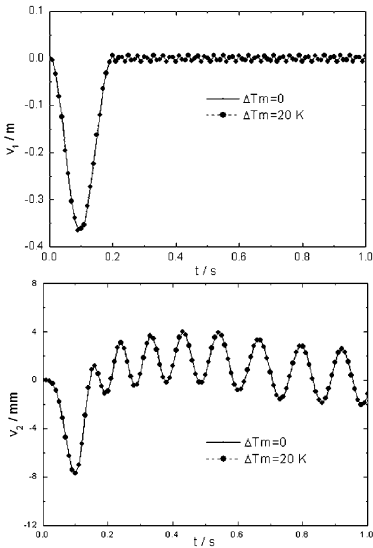


图4 温度变化对上下对称复合材料梁中点挠度的影响

Fig. 4 Influence of temperature on the mid-deflection of the symmetric composite beam

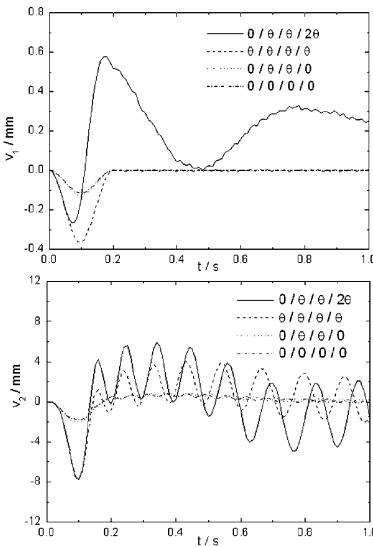


图5 各层纤维角的差异对复合材料梁中点挠度的影响

Fig. 5 Influence of difference of fiber layer angle on the mid-deflection of the composite beam

图5为各层纤维角分布不同的情况下复合材料梁中点挠度的时变曲线.设 $\theta = \pi/4$,上下对称的

复合材料梁的纤维角的分布为 $0/0/0/0, 0/\theta/\theta/0$ 和 $\theta/\theta/\theta/\theta$,可以看出,对于上下对称的复合材料梁,挠度曲线在加速阶段为对称曲线,在恒速阶段微幅振动,而纤维角 θ 的差异只影响加速阶段($t \leq t_s$)的最大挠度和恒速阶段($t > t_s$)的振动频率;而对于非对称的复合材料梁,设纤维角的分布为 $0/\theta/\theta/2\theta$,动力学特性出现明显的差异,由于各层弹性模量的差异,离心力引起附加弯曲变形,在加速阶段和恒速阶段,挠度曲线的特性与上下对称的复合材料梁的差异显著.由此可见,非对称的复合材料梁在离心力或者热载荷的作用下会产生附加弯曲变形,影响柔性梁的振动特性,需要引起重视.

4 结论

本文用几何非线性模型建立了考虑热效应的复合材料平面梁的动力学变分方程,在此基础上建立了复合材料多体系统的动力学方程,通过对曲柄-滑块机构的数值仿真得到了以下结论:

1. 对于纤维角分布非对称的复合材料平面梁,温度变化引起的附加弯曲变形影响柔性多体系统振动特性;而对于纤维角分布对称的复合材料平面梁,温度变化对振动特性的影响可以不计.
2. 对于作旋转运动的纤维角分布非对称的复合材料多体系统,离心力也会引起梁的附加弯曲变形,表现在加速和恒速阶段挠度曲线变化的无规律性;而对于纤维角分布对称的复合材料平面梁,纤维角的差异只影响加速阶段的最大挠度和恒速阶段的振动频率,但不影响挠度曲线变化的规律性.

参 考 文 献

- 1 Wallrapp O, Schwertassek R. Representation of geometric stiffening in multibody system simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1991, 32: 1833 ~ 1850
- 2 Wu S C, Haug E. Geometric non-Linear substructuring for dynamics of flexible mechanical systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1988, 26: 2211 ~ 2226
- 3 Liu J Y, Hong J Z. Geometric stiffening effect on rigid-flexible coupling dynamics of an elastic beam. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 278 (4): 1147 ~ 1162
- 4 杨辉. 刚-柔耦合动力学系统的建模理论与实验研究. 上

- 海:上海交通大学博士学位论文,2002 (Yang Hui. Study on Dynamic Modeling Theory and Experiments for Rigid-flexible Coupling Systems (in Chinese). Ph. D. dissertation, Shanghai Jiao Tong University, 2002 (in Chinese))
- 5 刘锦阳,李彬,陆皓. 计及热应变的空间曲梁的刚-柔耦合动力学. 固体力学学报,2007,28 (1):30~36 (Liu Jinyang, Li Bin, Lu Hao. Rigid-flexible coupling dynamics for a curvic beam considering thermal strain. *Acta Mechanica Sinica*, 2007, 28 (1):30~36 (in Chinese))
 - 6 Neto M A, Ambrosio J A C, Leal R P. Flexible multibody systems models using composite materials components. *Multibody System Dynamics*, 2004, 12 (4):385~405
 - 7 Mechab I, Tounsi A, Benatta M A, Adda bedia E A. Deformation of short composite beam using refined theories. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2008, 346:468~479
 - 8 Yoo H H, Lee S H, Shin S H. Flapwise bending vibration analysis of rotating multi-layered composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 2005, 286:745~761
 - 9 刘正兴,孙雁,王国庆. 计算固体力学. 上海:上海交通大学出版社,2000 (Liu Zhengxing, Sui Yan, Wang Guoqing. *Computational solid mechanics*. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University Press, 2000 (in Chinese))
 - 10 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学. 北京:机械工业出版社,1991 (Wang Zhenming. *Composite material mechanics and Composite material structural mechanics*. Beijing: China Machine Press, 1991 (in Chinese))
 - 10 王震鸣. 复合材料力学和复合材料结构力学. 北京:机械工业出版社,1991 (Wang Zhenming. *Composite material mechanics and Composite material structural mechanics*. Beijing: China Machine Press, 1991 (in Chinese))

DYNAMIC INVESTIGATION ON COMPOSITE FLEXIBLE MULTI-BODY SYSTEM CONSIDERING TERMAL EFFECT *

Liu Jinyang Pan Keqi

(School of Naval architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract The influence of the additional bending deformation caused by centrifugal force and temperature variation on the dynamic performance of composite flexible multi-body system was investigated. Based on the constitutive and nonlinear strain-displacement relation, the variational dynamic equation for each composite planar beam was established by using virtual work principle and finite element method, and then the dynamic equations for composite flexible multi-body system were derived. Simulation of the crank-slider system shows that for non-symmetric composite beams, the difference of the elastic modulus and thermal expansion coefficient may lead to additional bending deformation, which would significantly influence the dynamic performance of the system.

Key words composite flexible multi-body system, geometric nonlinearity, additional bending deformation, dynamics, thermal effect