

复杂网络的脉冲同步*

张刚^{1,2} 张伟¹

(1. 北京工业大学机电学院, 北京 100022) (2. 石家庄学院数学系, 石家庄 050035)

摘要 研究了具有有界耦合函数的不确定复杂动态网络的脉冲同步问题. 根据脉冲控制的概念和脉冲微分方程的稳定性理论, 我们利用一个灵活有效的脉冲控制实现了复杂动态网络的脉冲同步. 最后, 通过对混沌系统做网络节点的动态网络的数字模拟, 验证了我们提出的脉冲控制方案的有效性和实用性.

关键词 复杂网络, 同步, 脉冲控制

引言

网络中所有节点的同步是复杂动态网络中最有意义和最引人关注的现象之一. 复杂动态网络中的同步可以解释很多自然现象, 是在复杂动态网络中创造秩序的重要机理之一, 网络的同步问题已经成为非线性科学领域的一个重要的研究课题. 最近, 很多科学家投身到对网络同步的研究中, 得到了很多重要的结果^[1-7]. 然而, 大多数工作只是针对网络结构和耦合函数已知的情况. 在实际工作中, 预知网络的结构或节点间的耦合作用是很困难的, 有时甚至是不可能做到的. 很多时候我们必须面对网络结构或耦合关系不确定的动态网络, 以下简称不确定的动态网络. 为了克服这一障碍, 适应性控制方法被提出来同步不确定的动态网络^[8,9]. 尽管适应性同步方法很有效, 但是对于复杂动态网络适应性控制项通常要设计的非常复杂, 不易实践.

我们将利用脉冲控制的方法研究复杂动态网络的同步. 脉冲控制的主要思想是在某些条件满足时通过加入适当的控制项达到改变系统状态的目的. 脉冲控制项一般具有简单的结构, 易于实践. 最近, 脉冲同步方法开始被应用到动态网络上, 被证明具有很大的应用潜力^[10-12]. 根据脉冲控制的概念和脉冲微分方程的稳定性理论, 设计并分析了一个简单有效的脉冲控制, 实现了具有有界耦合函数的不确定复杂动态网络的脉冲同步. 在这个同步方案中, 我们充分考虑了不同节点在网络中的权重, 通过对少数权重较大的节点的控制实现了复杂动

态网络的同步. 因此, 我们的方法在实用上是很有效果的. 通过对 Chua 系统做网络节点的动态网络的数字模拟, 验证了我们提出的脉冲控制方案是有效果的.

1 模型的描述和主要结果

我们考虑一个由 N 个相同节点构成的复杂动态网络, 其中每个节点是一个 n 维动态系统. 这个复杂动态网络可以描述为

$$\dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g_i(x_1, \dots, x_N) + \sum_{k=1}^{\infty} U_i(t; x_1, \dots, x_N) \delta(t - t_k) \quad (1)$$

其中, $i = 1, 2, \dots, N, x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})^T \in R^n$ 是节点 i 的状态向量, $f: R^n \rightarrow R^n$ 是反映单个节点动力学行为的连续可微函数, $g: R^{nN} \rightarrow R^n$ 是不确定的线性或非线性的函数描述了网络中其它节点对节点 i 的耦合作用, 脉冲时刻序列 $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$, $\delta(\cdot)$ 是 Dirac 脉冲函数,

$$\delta(t - t_k) = \begin{cases} 1, & t = t_k \\ 0, & t \neq t_k \end{cases} \quad (2)$$

$U_i: R \times R^{nN} \rightarrow R^n$ 是控制项.

为了得到动态网络(1)的同步, 我们设计脉冲控制项为

$$U_i(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k [x_i(t) - \sum_{j=1}^N \xi_j x_j(t)] \quad (3)$$

其中 $B_k \in R^{n \times n}$ 指脉冲强度, $\xi_j \in R$ 代表第 j 个节点在网络控制中的权重且满足 $\sum_{j=1}^N \xi_j = 1$. 那么, 网络(1)可以被描述为下面的脉冲微分方程:

2008-07-28 收到第 1 稿, 2008-12-12 收到修改稿.

* 国家杰出青年基金项目(10425209), 国家自然科学基金项目(10732020), 中国博士后科学基金资助项目(20080430295)

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = f(x_i(t)) + g_i(x_1, \dots, x_N), & t \neq t_k \\ \Delta x_i(t_k) = B_k [x_i(t_k) - \sum_{j=1}^N \xi_j x_j(t_k)] \end{cases} \quad (4)$$

其中 $i=1, 2, \dots, N, k=1, 2, \dots, \Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-)$ 是状态向量在时刻 t_k 发生的突变, $x_i(t_k^+) = \lim_{t \rightarrow t_k^+} x_i(t), x_i(t_k^-) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} x_i(t)$. 不失一般性, 假设 $x_i(t_k^-) = x_i(t_k)$, 即 $x_i(t)$ 是左连续的.

假设 1 对于任意的 $x, y \in R^n$, 存在一个正数 L , 使得

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\| \quad (5)$$

对于任意的 $i, j=1, 2, \dots, N$, 节点 i 和节点 j 的同步误差定义为 $e_{ij}(t) = x_i(t) - x_j(t)$, 则

当 $t \in (t_{k-1}, t_k]$ 时, $\dot{e}_{ij}(t) = \dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t) = \tilde{f}(e_{ij}(t)) + g_i - g_j$, 其中 $\tilde{f}(e_{ij}(t)) = f(x_j(t) + e_{ij}(t)) - f(x_j(t))$. 按照假设 1, 我们很容易得到 $\|\tilde{f}(e_{ij}(t))\| \leq L \|e_{ij}(t)\|$.

当 $t = t_k$ 时, $e_{ij}(t_k^+) = x_i(t_k^+) - x_j(t_k^+) = (I_n + B_k) e_{ij}(t_k)$, 其中 I_n 是单位矩阵. 因此, 误差动力系统可以描述为

$$\begin{cases} \dot{e}_{ij}(t) = \tilde{f}(e_{ij}(t)) + g_i - g_j, & t \neq t_k \\ e_{ij}(t_k^+) = (I_n + B_k) e_{ij}(t_k) \end{cases} \quad (6)$$

其中, $i, j=1, 2, \dots, N, k=1, 2, \dots$. 显然, 动态网络(1)达到同步等价于误差系统(6)的零解渐近稳定.

假设 2 存在一组整数 $d_{ij} > 0, i, j=1, 2, \dots, N$ 使得对于任意的 $i=1, 2, \dots, N$,

$$\|g_i(x_1, \dots, x_N)\| \leq \sum_{j=1}^N d_{ij} \|x_j(t) - x_i(t)\|. \quad (7)$$

注: 由假设 2 可知, 耦合函数 $g_i(x_1, \dots, x_N)$ 是有界的不确定函数.

定理 1 $p_{ij}, i, j=1, 2, \dots, N$ 为一组正定矩阵, 如果存在常数 $\xi > 1$ 使得下面的条件成立:

$$\ln \xi \gamma \lambda_k + \alpha \delta_{\max} \leq 0, \forall k=1, 2, \dots \quad (8)$$

其中 $\gamma = \max_{i,j=1,2,\dots,N} \left\{ \frac{\lambda_{\max}(p_{ij})}{\lambda_{\min}(p_{ij})} \right\}$, $\lambda_{\max}(p_{ij})$ 和 $\lambda_{\min}(p_{ij})$ 分别为矩阵 p_{ij} 的最大、最小特征值, λ_k 是矩阵 $(I_n + B_k)^T (I_n + B_k)$ 的最大特征值,

$$\alpha = \max_{i,j=1,2,\dots,N} \left\{ \frac{\beta_{ij}}{\lambda_{\min}(p_{ij})} + \lambda_{\max}(p_{ij}) \right\},$$

$$\beta = L^2 + \lambda_{\max}(p_{ij}) \sum_{k=1}^N d_{ik} + d_{ij} \sum_{k=1}^N \lambda_{\max}(p_{ik}) +$$

$$\lambda_{\max}(p_{ij}) \sum_{k=1}^N d_{jk} + d_{ji} \sum_{k=1}^N \lambda_{\max}(p_{kj}),$$

$$\delta_{\max} = \max_{k=1,2,\dots} \{t_{k+1} - t_k\},$$

则误差系统(6)的零解渐近稳定, 即动态网络(1)得到同步.

注: 在实践中, 为了达到脉冲控制的目的, 脉冲间隔是有界的且存在最大的时间间隔, 即 δ_{\max} 存在.

2 数值模拟

本节, 通过数字模拟以 Chua 系统做网络节点的动态网络, 来验证上面提到的脉冲控制方案的有效性. Chua 系统可以描述为非线性的 ODE,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha [x_2 - x_1 - \varphi(x_1)], \\ \dot{x}_2(t) = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3(t) = -\beta x_2 \end{cases} \quad (9)$$

其中 α, β 是参数, $\varphi(x)$ 为分段线性函数刻画了 Chua 电路中的二极管, $\varphi(x_1) = bx + 0.5(a-b)(|x_1+1| - |x_1-1|)$, 其中 $a < b < 0$ 是两个常数. 众所周知, 当 $\alpha = 9.22, \beta = 15.99, a = -1.25, b = -0.76$ 时, Chua 系统是混沌的.

例 1 考虑由 100 个 Chua 系统构成的动态网络:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}(t) = 9.22 [x_{i2} - x_{i1} - \varphi(x_{i1})] + \sum_{j=1}^{100} a_{ij} g_{ij}, \\ \dot{x}_2(t) = x_{i1} - x_{i2} + x_{i3}, \\ \dot{x}_3(t) = -15.99 x_{i2} \end{cases} \quad t \neq t_k \quad (10)$$

$$\Delta x_i(t_k) = B_k [x_i(t_k) - \sum_{j=1}^N \xi_j x_j(t_k)], k=1, 2, \dots \quad (11)$$

其中, $x_i^T = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})$ 为节点 i 的状态变量, $i=1, 2, \dots, 100, g_{ij} = \sin(x_{j1} - x_{i1})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

注意, 这里的矩阵 A 是非扩散的.

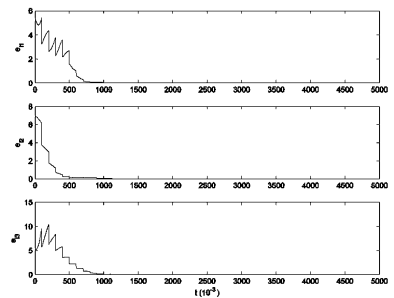


图 1 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 1/100$ 时的误差图

Fig. 1 The errors with $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 1/100$

设脉冲是等距的,脉冲区间为 $\delta = 0.1$, $B_k = \text{diag}\{-0.4, -0.4, -0.4\}$, $k = 1, 2, \dots$. 每个系统的初始值随机的在实数区间 $[-20, 20]$ 上选取. 利用 Matlab 对几组不同权重分布情况所做的模拟分别

展示在图 1-图 4 中,其中 $e_{i1} = \frac{\sum_{i=2}^{100} |x_{i1} - x_{i1}|}{99}$, $e_{i2} = \frac{\sum_{i=2}^{100} |x_{i2} - x_{i2}|}{99}$, $e_{i3} = \frac{\sum_{i=2}^{100} |x_{i3} - x_{i3}|}{99}$.

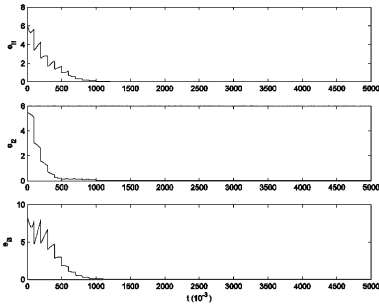


图 2 $\xi_1 = 0.5, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = 0.2, \xi_4 = \dots = \xi_{100} = 0$ 时的误差图

Fig. 2 The errors with $\xi_1 = 0.5, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = 0.2, \xi_4 = \dots = \xi_{100} = 0$

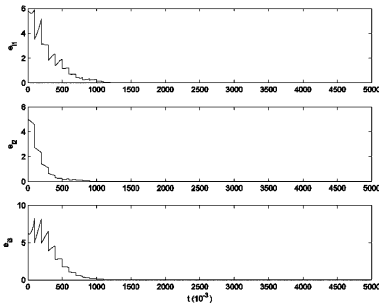


图 3 $\xi_1 = 1, \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$ 时的误差图

Fig. 3 The errors with $\xi_1 = 1, \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$

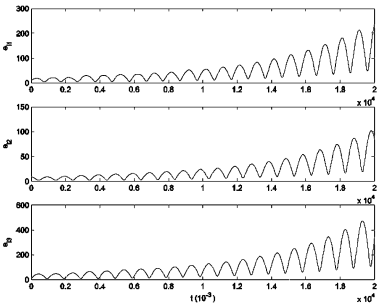


图 4 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$ 时的误差图

Fig. 4 The errors with $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$

在图 1 中, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 1/100$. 节点 1 与节点 i 的状态误差随着时间的演化渐近趋向零,即动态网络(1)达到同步. 在图 2 中, $\xi_1 = 0.5, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = 0.2, \xi_4 = \dots = \xi_{100} = 0$, 动态网络(1)达到同步. 在图 3 中, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$, 动态网络(1)达到同步. 当时,即脉冲控制项不起作用时,网络

(1)不能同步,模拟结果由图 4 显示.

例 2 在下面的模拟中,我们假设 $N = 100$,节点之间不存在连续时刻的耦合,即

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 100.$$

脉冲是等距的,脉冲区间为 $\delta = 0.05$, $B_k = \text{diag}\{-0.1, -0.1, -0.1\}$, $K = 1, 2, \dots$,这 100 个系统的初始值分别随机的在实数区间 $[0, 20]$ 上. 利用 Matlab 所作的模拟结果展示在图 5-7 中,其中 $e_{i1} = \frac{\sum_{i=2}^{100} |x_{i1} - x_{i1}|}{99}$, $e_{i2} = \frac{\sum_{i=2}^{100} |x_{i2} - x_{i2}|}{99}$, $e_{i3} = \frac{\sum_{i=2}^{100} |x_{i3} - x_{i3}|}{99}$.

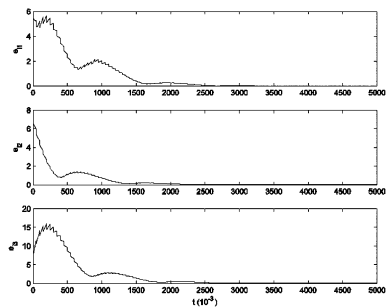


图 5 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 1/100$ 时的误差图

Fig. 5 The errors with $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 1/100$

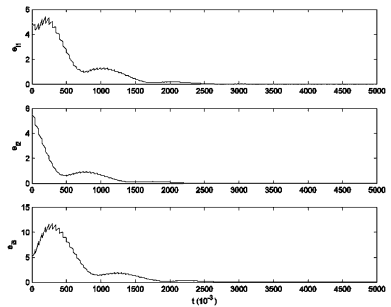


图 6 $\xi_1 = 0.7, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = \dots = \xi_{100} = 0$ 时的误差图

Fig. 6 The errors with $\xi_1 = 0.7, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = \dots = \xi_{100} = 0$

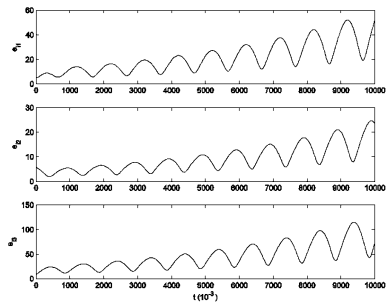


图 7 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$ 时的误差图

Fig. 7 The errors with $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 0$

在图 5 中, $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{100} = 1/100$. 节点 1 与节点 i 的状态误差随着时间的演化渐近趋向零,即

动态网络(1)达到同步. 在图6中, $\xi_1 = 0.7, \xi_2 = 0.3, \xi_3 = \dots = \xi_{100} = 0$, 动态网络(1)达到同步. 在图7中, 此时脉冲控制消失, 网络(1)不能同步.

3 结论

研究了复杂动态网络的脉冲同步. 根据脉冲控制的概念和脉冲微分方程的稳定性理论, 设计并分析了一个简单实用的脉冲控制. 对于具有有界的耦合函数的不确定动态网络, 实现了脉冲同步. 通过对 Chua 系统做网络节点的动态网络的数字模拟, 证明了我们提出的脉冲控制方案是有效的.

与其它结论相比, 本文考虑了网络中所有节点对网络的同步状态可能的影响. 理论上, 每个节点对网络同步的影响大小由节点在网络中的权重来决定. 实际上, 我们可以选择绝大多数节点的权重为零, 而通过少数节点的有意义的控制来实现网络同步. 另一方面, 数值结果也表明我们的方法在具有非零权重的节点的选择上有很大的自由度. 因而, 我们的方法在实际应用上是非常有意义的.

参 考 文 献

- X Wang, G Chen. Synchronization in small-world dynamical network. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 2002, 12: 187 ~ 192
- T Nishikawa, A E Motter, Y Lai, F C Hoppensteadt. Heterogeneity in oscillator networks: are smaller worlds easier to synchronize. *Phys. Rev. Lett.*, 2003, 91: 014101
- V N Belykh, I Belykh, M Hasler. Connection graph stability method for synchronized coupled chaotic systems. *Phy. D*, 2004, 195: 159 ~ 187
- J Lü, X Yu, G Chen. Chaos synchronization of general complex dynamical networks. *Phy. A*, 2004, 334: 281 ~ 302
- Juan G Restrepoa, Edward Otta, Brian R Hunt. Emergence of synchronization in complex networks of interacting dynamical systems. *Phy. D*, 2006, 224: 114 ~ 122
- J Zhou, T Chen. Synchronization in general complex delayed dynamical networks. *IEEE Trans. Circuits Syst-1. Regular Paper*, 2006, 53: 733 ~ 744
- 唐新华, 陆君安, 张伟伟. 基于反步法的混沌系统函数投影同步. *动力学与控制学报*, 2007, 5(3): 216 ~ 219 (Tang Xinhua, Lu Jun-an, Zhang Weiwei. The function projective synchronization of chaotic system using backstepping design. *Journal of Dynamics and Control*, 2007, 5(3): 216 ~ 219 (in Chinese))
- Z Li, G Chen. Robust adaptive synchronization of uncertain dynamical networks. *Phy. Let. A*, 2004, 324: 166 ~ 178
- M Chen, D Zhou. Synchronization in uncertain complex networks. *Chaos*, 2006, 16: 013101
- T Yang, L O Chua. Impulsive stability for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 1997, 44(10): 976 ~ 988
- C Li, X Liao, and X Yang. Impulsive synchronization of chaotic systems. *Chaos*, 2005, 15: 023104
- B Liu, X Liu, G Chen and H Wang. Robust impulsive synchronization of uncertain dynamical networks. *IEEE Trans. Circuits systems*, 2005, 52(7): 1431 ~ 1441

IMPULSIVE SYNCHRONIZATION OF COMPLEX NETWORK*

Zhang Gang^{1,2} Zhang Wei¹

(1. College of Mechanical Engineering and Applied Electronics Technology, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China)

(2. Department of Mathematics, Shijiazhuang College, Shijiazhuang 050035, China)

Abstract The problem of impulsive synchronization of complex dynamical networks with uncertain bounded coupling was investigated. Based on the theory of impulsive control and the stability for impulsive differential equations, an significative impulsive synchronization criterion for complex dynamical networks was derived. Using the chaotic Chua system as nodes of the dynamical networks, numerical simulations were performed to illustrate and verify the theoretical results.

Key words complex dynamical network, synchronization, impulsive control

Received 28 July 2008, revised 12 December 2008.

* The project supported by the National Science Foundation for Distinguished Young Scholars of China (10425209), the National Natural Science Foundation of China (10732020) and the China Postdoctoral Science Foundation funded project (20080430295)