

四自由度汽车迟滞非线性系统的混沌*

肖海斌 方明霞

(同济大学航空航天与力学学院,上海 200092)

摘要 考虑悬架系统的激励为有迟滞的路面输入正弦激励,建立了1/2四自由度汽车悬架系统的非线性动力学模型.用数值方法在Matlab平台上进行动力学仿真,绘制了Poincare图,研究了汽车悬架系统的混沌响应.发现在迟滞非线性系统中,悬架系统很容易产生混沌运动,给汽车行驶平顺性带来不利影响,对汽车产生较大的危害.

关键词 汽车悬架, 迟滞非线性, 正弦激励, 混沌

引言

滞后非线性是很常见的系统非线性特性,其主要特点是多值性和非光滑性,非常容易产生分岔、混沌等复杂的动力学行为.它广泛存在于实际工程振动系统中,并涉及多个领域.汽车可以作为一个复杂的多体动力系统模型.我们可以依照建模目的来确定汽车悬架系统的自由度,现阶段已经有针对不同动力学行为建立的多种汽车悬架模型.本文首先建立了四自由度1/2汽车悬架模型来研究汽车悬架的振动^[1],模型考虑簧载质量垂直运动和绕质心转动以及轮胎的变形^[4],这一研究对汽车设计有很大的作用.而后,在MATLAB平台上对动力响应进行模拟,包括响应曲线,分岔图和庞加雷图.结果表明,在汽车行进过程中可能存在混沌振动.

1 考虑非线性的四自由度悬架系统模型的建立

悬架的迟滞非线性特性可通过试验获得,一般在振动状态下,其应力—应变循环具有变刚度变阻尼的非光滑、强非线性特性,恢复力表现出与变形历史有关的迟滞性,恢复力表达式如下^[2]:

$$F(x, \dot{x}) = \sum_{i=1}^{(n_0+1)/2} a_{2i-1} x^{2i-1} + \sum_{i=0}^{(n_0-1)/2} a_{2i} x^{2i} \operatorname{sgn}(\dot{x}) = F_K(x) + F_C(x, \dot{x}) \quad (1)$$

把恢复力分为两部分,由(1)式第一部分可得到弹性恢复力的数学模型为:

$$F_K = \sum_{i=1}^{(n_0+1)/2} K_{2i-1} x^{2i-1} \quad (2)$$

取前三阶其展开形式为

$$F_K(x) = K_1 x + K_3 x^3 \quad (3)$$

式中 K_i 表示动刚度系数.

式(1)中第二部分为阻尼力部分,其数学模型较为复杂.因为产生阻尼的因素较多,并且在某一振动系统中常常存在多种阻尼成分,若仅用一种阻尼描述,与实际情况相差较远.仿照平方非线性阻尼的描述,本文引入阻尼因子的概念,它可以描述多种阻尼成分,且物理意义明确.现构造阻尼因子数学模型为:

$$F_C(x, \dot{x}) = C |\dot{x}|^n \operatorname{sgn}(\dot{x}) \quad (4)$$

式中, n 为阻尼因子, n 越大阻尼力对速度的变化越敏感. $n=0$ 时,系统中的阻尼呈现为干摩擦阻尼; $n=1$ 时,为粘性阻尼; $0 < n < 1$ 时,阻尼中既有粘性阻尼,又有干摩擦阻尼; $n > 1$ 时,表现为“高阶”阻尼.

2 整车考虑限位器的非线性动力学模型建立与仿真

2.1 整车迟滞非线性动力学模型建立

通常,在远离车轮固有频率的较低激振频率范围,轮胎动变形很小,忽略其弹性与车轮质量,得到分析车身垂直振动及簧载质量绕其质心转动的简单的四自由度非线性系统模型.

忽略车身弹性变形,得整车系统四自由度非线

性运动微分方程如下:

$$\begin{aligned}
& m \ddot{Z}_0 + k_{11}(Z_0 - aZ_3 - Z_1) + k_{13}(Z_0 - aZ_3 - Z_1)^3 + C_1(\dot{Z}_0 - a\dot{Z}_3 - \dot{Z}_1)^{n_1} \text{sgn}(\dot{Z}_0 - a\dot{Z}_3 - \dot{Z}_1) + k_{21}(Z_0 + bZ_3 - Z_2) + k_{23}(Z_0 + bZ_3 - Z_2)^3 + C_2(\dot{Z}_0 + b\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2)^{n_2} \text{sgn}(\dot{Z}_0 + b\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2) = 0 \\
& J \ddot{Z}_3 - k_{11}a(Z_0 - aZ_3 - Z_1) - k_{13}a(Z_0 - aZ_3 - Z_1)^3 - C_1a(\dot{Z}_0 - a\dot{Z}_3 - \dot{Z}_1)^{n_1} \text{sgn}(Z_0 - aZ_3 - Z_1) + k_{21}b(Z_0 + bZ_3 - Z_2) + k_{23}b(Z_0 + bZ_3 - Z_2)^3 + C_2b(\dot{Z}_0 + b\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2)^{n_2} \text{sgn}(Z_0 + bZ_3 - Z_2) = 0 \\
& m \ddot{Z}_1 - k_{11}(Z_0 - aZ_3 - Z_1) - k_{13}(Z_0 - aZ_3 - Z_1)^3 - C_1(\dot{Z}_0 - a\dot{Z}_3 - \dot{Z}_1)^{n_1} \text{sgn}(\dot{Z}_0 - a\dot{Z}_3 - \dot{Z}_1) + k_{t1}(Z_1 - q_1) = 0 \\
& m_2 \ddot{Z}_2 - k_{21}(Z_0 + bZ_3 - Z_2) - k_{23}(Z_0 + bZ_3 - Z_2)^3 - C_2(\dot{Z}_0 + b\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2)^{n_2} \text{sgn}(\dot{Z}_0 + b\dot{Z}_3 - \dot{Z}_2) + k_{t2}(Z_2 - q_2) = 0
\end{aligned} \tag{5}$$

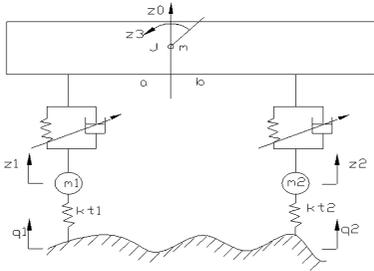


图1 汽车四自由度非线性振动模型
Fig. 1 4-degree Automobile System

式中:

- m_1, m_2 —前、后轴非簧载质量 (Kg)
- m —汽车簧载质量 (Kg)
- J —簧载质量绕其质心的转动惯量 (Kg·m²)
- 前悬架动刚度系数 (N/m)
- 前悬架动阻尼系数 (N·s/m) 和阻尼因子
- 后悬架动刚度系数 (N/m)
- 后悬架动阻尼系数 (N·s/m) 和阻尼因子
- k_{t1}, k_{t2} —前、后轮胎等效刚度 (N/m)
- a, b —前、后车轮中心到簧载质量质心的水平距离 (m)
- q_1, q_2 —路面不平度对前、后车轮的激励 (m)
- z_0 —簧载质量质心的垂直位移 (m)

- z_1, z_2 —前、后车轮的垂直位移 (m)
- z_3 —簧载质量绕其质心的角位移 (rad)

2.2 路面正弦激励

由路面产生的激励采用正弦激励. 因此, 路面粗糙度可近似的由以下方程来描述:

$$q_1 = A \sin(2\pi ft) \tag{6}$$

其中 A 和 f 分别是路面正弦扰动的振幅和频率.

后轮的激励可表示为如下:

$$q_2 = A \sin(2\pi ft + \alpha) \tag{7}$$

α 是前后轮激励的时间差.

3 仿真结果

利用数值方法在 Matlab 平台上采用 4 阶 Runge - Kutta 算法对系统具有迟滞特性的非线性方程进行求解. 由于数值计算结果会因为相对较大的时间步长而产生与混沌有关的错误值, 这里采用变化步长来杜绝因时间离散化产生类似结果.

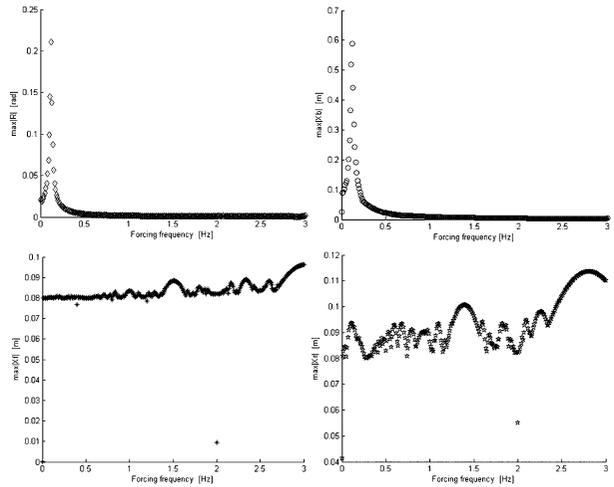


图2 频域内的振动响应

Fig. 2 The vibration response in frequency domain

通常, 我们通过以振动系统的振幅相对于激励频率变化的频响图来分析系统动力学响应^[5]. 对于给定的系统模型. 振幅以位移绝对值的最大值计, 控制参数为来自路面激励的频率. 对于本文研究系统, 振幅定义为位移绝对值的最大值, 而控制参数定义为路面激励频率. 图 2 是在频率 f 逐渐变化情况下模型的频响图激励函数在振幅 $A = 0.08m$, 激励时滞值 $\alpha = \pi/9, 0 < f < 3\text{Hz}$, 并以频率变化步长为 0.01Hz 作为振动控制参数时簧载质量的垂直位移、簧载质量绕其质心旋转的角度、前轮垂直位移以及后轮垂直位移图. 显然, 在假定激励下前后轮

非簧载质量的频率响应图相似;而簧载质量的垂直位移以及绕质心旋转的角度图像很相似,都在 0.15Hz 处有峰值,随后峰值下降到接近零值(但非零值),即趋于稳定值.表明在这一区域内振动响应有突变的迹象,值得在此频率下的时域内深入研究.而在图(c)、(d)中,前后轮的垂直位移响应基本在小范围内(0.08-0.09Hz)发生变化,不过很明显,我们在图中观察到,一些不连续点,如在 0Hz、2Hz 处响应值明显低于大趋势.

在动力学系统中,常用分岔图来校验在某个参数变化下的模型的响应图像.在本文的研究中,我们通过得到位移的 Poincare 点来描述混沌状态.

图 3 表示的是 $\theta(t)$ 随着参数 α 从 0 到 2π 的转角变化图. α 的增量是 $\pi/180$. 计算的时间跨度是 $[0, 400s]$, 初始状态设置为静止状态. 研究了振动转角的响应随着相位角的变化关系,描述了相位角在振动响应中的作用.

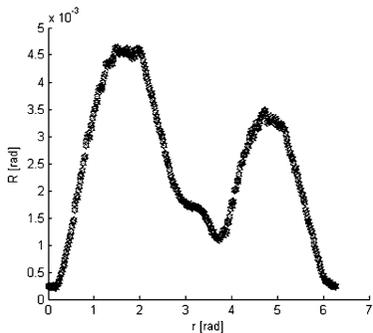


图 3 发动机转角与输入相位角的关系

Fig. 3 Relationship between the phase angle and engine corner

图 4 中所示为 $x_b(t), \theta(t), x_r(t), x_l(t)$ 的时间历程图. 初始的 1600 个激励环的时间历程数据不显示在途中, 这样是为了保证我们采用的数据是在振动的稳定状态. 我们从选取时段 t 来选取时间历程 $x_b(t), \theta(t), x_r(t), x_l(t)$ 四个物理量, 并且每个时间数据都有的 10^5 长度.

为了在计算过程中产生时间嵌入式向量, 我们以平均共有信息来计算时滞值^[3]. 图 4 中对应的 Poincare 图的时间历程的系统响应被显示在图 5 中, 每个 Poincare 图包括所选的 4000 个点. 图 5 可以观察到存在陌生的吸引因子存在. 结果表明系统的响应是混沌的. 在图 5 随时地模拟结果中显示我们得到的 Poincare 图很显然, 在簧载质量的振动过程中如(a)、(b)所示, 得到的是混沌图, 而在(c)、

(d) 图中得到的是极限环形状的点集, 我们分析它的原因, 对于簧载质量下的车架的运动, 由于考虑了橡胶迟滞非线性的影响, 迟滞非线性恢复力对车架产生作用, 而在非簧载质量下, 直接受到路面的正弦激励, 进行比较之后, 我们可以下结论, 橡胶的迟滞非线性特性将使汽车在稳定行驶过程中, 在车架部位产生混沌振动, 给汽车行驶平顺性带来不利影响.

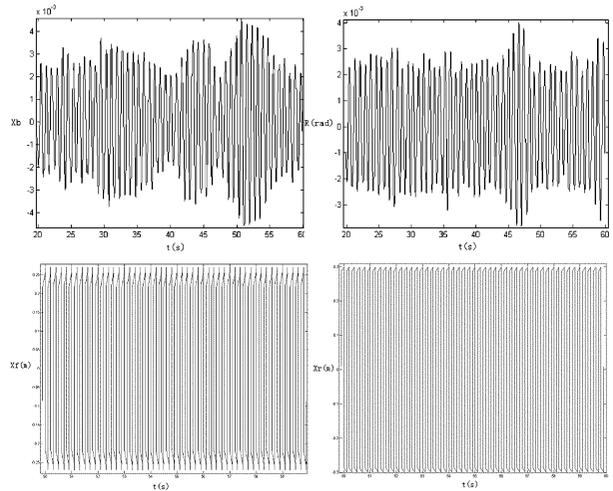


图 4 时域内的振动响应

Fig. 4 The vibration response in time domain

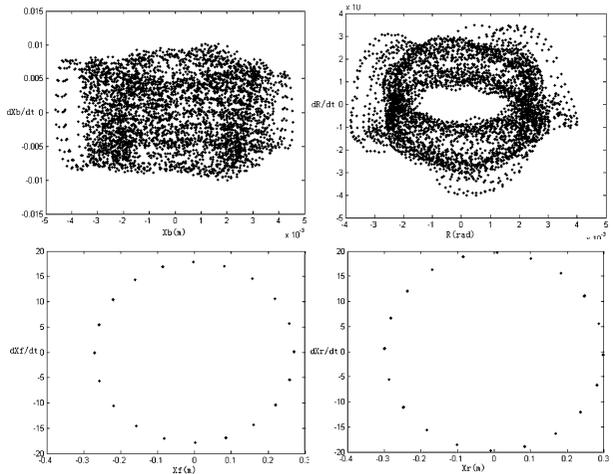


图 5 四自由度的 Poincare 图

Fig. 5 Poincare maps of four degrees

4 结论

本文研究了在两个正弦激励下考虑非线性的四自由度汽车悬架系统的混沌并研究了数值仿真结果. 我们发现, 混沌响应可能存在于频响图的非稳定区域, 并且给汽车行驶产生很大的不利因素. 尽管汽车的力学模型仅仅是一个简化模型而且我

们所选的控制参数和汽车的实际数据有一定的差别,我们的结果仍然在汽车的动力学设计中是有效的.另外,在实验中确认此类模型的混沌存在还有待于进一步研究.

参 考 文 献

- 1 Q Zhu. Chaos and bifurcation in a nonlinear vehicle model. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 275: 1136 ~ 1146
- 2 方明霞,冯奇.汽车迟滞非线性动力系统仿真研究.噪声与振动控制,2006,11:1000 ~ 3703 (Fang M X, Feng Q. Simulating research of automobile hysteresis nonlinear dynamic system. *Noise and Vibration Control*, 2006, 11: 1000 ~ 3703 (in Chinese))
- 3 冯奇,沈荣瀛.工程中的混沌振动.上海:上海交通大学出版社,1998 (Feng Q, Sheng R Y. Chaotic vibration on engineering. Shanghai: Press of Shanghai Communication University, 1998 (in Chinese))
- 4 S. Ikenaga, F. L. Lewis, J. Campos, L. Davis. Active suspension control of ground vehicle based on a full - vehicle model. Proceedings of America Control Conference, Chicago, IL, USA, 2000: 859 ~ 86
- 5 乐源,谢建华,丁旺才.一类两自由度碰撞振动系统的Hopf分岔和混沌.动力学与控制学报,2004,2(3):36 ~ 41 (Le Y, Xie J H, Ding W C. A class of the collision of two degrees of freedom vibration systems Hopf bifurcation and chaos. *Journal of Dynamics and Control*, 2004, 2(3): 36 ~ 41 (in Chinese))

CHAOS IN NONLINEARITY CONSIDERED 4-DEGREE AUTOMOBILE SYSTEM *

Xiao Haibin Fang Mingxia

(School of Aerospace Engineering & Applied Mechanics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract Considering the automobile suspension system with sinusoid excitation and hysteretic characteristic, we establish the dynamics model of 1/2 automobile suspension system with four degrees of freedom. The Poincare map is obtained by numerical emulation with the help of Matlab. The chaos response generated easily in the automobile suspension system is studied. The chaotic movement has adverse effect on the ride comfort of automobile and one is harmful to automobile moving.

Key words automobile suspension, hysteretic nonlinear, sinusoid excitation, chaos