

基于 LMI 约束优化的再入飞行器预测控制*

张军¹ 梁建国¹ 邵晓巍² 毕贞法¹

(1. 上海宇航系统工程研究所, 上海 201108) (2. 上海交通大学空天学院, 上海 200240)

摘要 针对飞行器再入过程中的复杂多约束, 提出一种基于线性矩阵不等式(LMI)约束优化的纵向制导方法. 首先对再入飞行器的纵向运动方程伪线性化建模, 保证在标准轨道邻域内点点可控, 简化了非线性模型; 然后在每个制导周期内利用 LMI 求解有约束的凸优化问题, 从而获得在线反馈控制律和全量控制量, 用于实际再入轨道的制导; 同时给出了切换闭环系统稳定性的证明. 仿真结果表明, 所设计的制导律对再入初始点状态偏差等具有较强的鲁棒性.

关键词 再入飞行器, 纵向制导, LMI, 约束, 伪线性化

引言

在重复使用飞行器的再入过程中, 运行环境非常复杂, 包含着严格的约束条件: 热, 过载, 动压, 攻角, 倾斜角等, 这些约束条件对再入的轨道设计和制导律提出很高的要求, 只有满足这些要求才能使飞行器适应再入过程中的热力学环境, 从而安全着陆^[1-4]. 再入制导方法分两大类: 标准轨道制导法和预测制导法. 标准轨道制导法是工程实际中常用的方法, 常采用传统的设计方法确定反馈增益系数; 当标准轨道确定以后, 可以离线计算出反馈增益系数^[1]. 然而, 当实际再入过程中气动参数和大气密度等条件与设计标准轨道的理想值相差较大时^[5,6], 离线计算的增益不能提供足够的鲁棒性能, 并且状态和控制也难以满足预先设计好的约束条件, 因此在再入制导中也必须考虑约束条件(主要是控制约束)和时变制导控制律以适应环境^[7]. 目前, 模型预测控制(MPC)是显式处理状态和控制约束的有效方法之一^[8,9], 本质上是一种滚动的优化控制, 鲁棒性强. 国外研究已经把模型预测控制应用到 F-16 飞机, 卫星姿态控制等领域, 效果很好; 基于 LMI 优化的预测控制在线求解效率更高^[10], 因此研究基于 LMI 约束优化预测的再入飞行器制导方法具有重要意义.

本文对再入飞行器设计纵向制导律; 对纵向运动方程伪线性化建模, 保证在标准轨道邻域内点点

可控, 并简化了复杂的原始非线性模型; 然后在每个采样周期内利用 LMI 求解有约束的凸优化问题, 从而获得在线反馈控制律和全量控制量, 用于实际再入轨道的制导. 仿真结果表明, 所设计的制导律对再入初始偏差和气动参数, 以及大气密度等具有较强的鲁棒性, 能够保证落点精度.

1 问题描述

忽略了地球自转速度, 升力式再入飞行器的三自由度运动学方程为^[5,6]:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{V \cos \gamma \sin \psi}{r \cos \phi} \\ \dot{\phi} = \frac{V \cos \gamma \cos \psi}{r} \\ \dot{r} = V \sin \gamma \\ \dot{V} = -D - \sin \gamma / r^2 \\ \dot{\gamma} = \frac{1}{V} [L \cos \sigma + (\frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2}) \cos \gamma] \\ \dot{\psi} = \frac{1}{V} [\frac{L \sin \sigma}{\cos \gamma} + \frac{V^2}{r} \cos \gamma \sin \psi \tan \phi] \end{cases} \quad (1)$$

其中变量 $x = [\theta, \phi, r, V, \gamma, \psi]^T$ 分别为经度、纬度、地心距、速度、速度倾角、航向角; 为减少计算误差, 这里用 $R_0 = 6378 \text{ km}$, V 用 $V_c = \sqrt{g_0 R_0}$ 归一化变量. 控制量 $u = [\sigma, \alpha]$ 分别为倾斜角, 攻角. $\sigma = 0$ 表示升力在当地铅垂面内. D, L 分别表示气动阻力加速度和升力加速度, 是 α 的函数.

2008-02-19 收到第 1 稿, 2008-06-24 收到修改稿.

* 国家高技术研究发展计划(863 计划)资助项目

$$D = \frac{\rho(r)(V_c V)^2 S_{ref} C_D}{2mg_0} \quad (2)$$

$$L = \frac{\rho(r)(V_c V)^2 S_{ref} C_L}{2mg_0} \quad (3)$$

$$C_D = b_0 + b_1 \alpha + b_2 \alpha^2, C_L = a_0 + a_1 \alpha \quad (4)$$

$$\rho(r) = \rho_{ref} e^{-\frac{r-r_{ref}}{h_{ref}}} \quad (5)$$

式中 $\rho(r)$ 是大气密度, S_{ref} 是飞行器参考面积, m 是飞行器质量, M_a 是马赫数, C_D 和 C_L 是阻力系数和升力系数。

在再入段的整个轨迹中,包含着轨迹约束^[8,9]:热约束 $\dot{Q} \leq \dot{Q}_{max}$;过载约束: $\sqrt{L^2 + D^2} \leq \eta$;动压约束: $q \leq q_{max}$;倾斜角约束: $|\sigma| \leq \sigma_{max}$;攻角约束: $|\alpha| \leq \alpha_{max}$. 这些约束条件为制导控制律设计带来了困难,不少研究没有考虑约束情况^[1,4],认为设计标准轨道已经将再入过程中的各种约束条件考虑在内,因此只要控制飞行器沿着标准轨道飞行,就能保证飞行器再入过程中的热力学环境,从而使飞行器安全着陆,这在理想情况下是可以的,而实际中,各种干扰和模型不确定等因素往往会导致实际飞行轨道偏离标准轨道有较大的范围,易造成部分状态和控制超出约束条件,为了保障再入飞行器安全,因此在制导控制中应该考虑约束条件. 为了设计纵向制导律,仅考虑纵平面内的运动.

对上面约束的非线性系统可统一表示:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad x \in X, u \in U \quad (6)$$

X, U 分别为状态和控制的凸闭集合. 把标准轨道的平衡点 (x_{ol}, u_{ol}) 平移到原点后,在标准轨道线性化得到偏差模型:

$$\dot{x} - \dot{x}_{ol} = \Delta \dot{x}(t) = \dot{A}_1(x, t) \Delta x(t) + \dot{B}_1(x, t) \Delta u(t)$$

$$\dot{A}_1(x, t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{x=x_{ol}(t), u=u_{ol}(t)}$$

$$\dot{B}_1(x, t) = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{x=x_{ol}(t), u=u_{ol}(t)}$$

这样基于标称轨道线性化带来了模型误差,只是适用于标准轨道平衡点的邻域内,难以适应再入飞行器制导系统的大范围误差调整能力,从而使得跟踪精度下降. 这里采用 SDRE 理论中的建模伪线性化模型直接建模,避免了雅克比线性化方法带来的误差.

首先将被控对象(6)转化为 SDC(state dependent coefficient)形式^[11]

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)u \quad (7)$$

其中 $f(x) = xA(x), B(x) = g(x)$,从形式上可以看出, $A(x)$ 伪线性化是等式变换,它的选取不是唯一.

定义: 如果满足 $(A(x), B(x))$ 在状态域 X 内点点可控,则称系统(6)是可控的. 对于优化目标 $J = \frac{1}{2} \int_t^\infty [x^T(t)Q_1(x)x(t) + u^T(t)R(x)u(t)] dt$, 设计优化控制律

$$u(x) = -K(x)x = -R^{-1}B^T(x)P(x)x \quad (8)$$

$P(x)$ 满足如下 state dependent Ricatti 方程的正定解:

$$A^T(x)P(x) + P(x)A(x) + Q_1(x) - P(x)B(x)R^{-1}(x)B^T(x)P(x) = 0$$

定理 1: 对于一类非线性系统(6),如果能写成 SDC 形式(7),并在原点附近的邻域内满足可控条件,则满足式(8)的控制律 $u(x)$ 使得闭环系统在原点邻域内局部渐近稳定^[11].

为简化计算量,制导系统主要完成 r, γ, s 三个主要变量跟踪,系统模型变为(9)^[12],其中 s 为再入飞行器到航向校正圆柱的距离.

$$\dot{r} = \sin\gamma/D$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{V^2 D} [L \cos\sigma + (\frac{V^2}{r} - \frac{1}{r^2}) \cos\gamma]$$

$$\dot{s} = -\frac{\cos\gamma}{rD}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin\gamma}{D\gamma} & 0 \\ \frac{L(\cos\sigma + \sigma)}{V^2 Dr} & \frac{-\cos\gamma}{V^2 r^2 D\gamma} & 0 \\ -\frac{(\cos\gamma + \gamma)}{Dr^2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{L}{V^2 D} & \frac{\cos\gamma}{Dr\alpha} \\ 0 & \frac{\gamma}{Dr\alpha} \end{bmatrix} \quad (9)$$

因为 $[B, AB]$ 总是满秩,因此标准轨道邻域内点点可控的.

2 主要结果

系统(7)是线性时变系统,在整个再入走廊内参数变化较大,为保证系统的鲁棒性和自适应性,这里采用时变反馈律实现控制. 此外, Q_1, R 可在一

定程度进行调整,使得控制和状态满足约束,但是需要大量的人工经验.由于系统存在控制明显的硬约束和状态约束,采用能处理显式约束的模型预测控制方法^[8,9],对于原点是平衡点的调节问题,取无限时域预测的优化指标为:

$$J_{\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} x^T(k+i|k)Q_1(x)x(k+i|k) + u^T(k+i|k)Ru(k+i|k), Q_1 \geq 0, R > 0$$

$$s. t \begin{cases} x(k+i+1|k) = A(x, k)x(k+i|k) + B(x, k)u(k+i|k) \\ u(i|k) \leq u_{max} \\ Gx(i|k) \leq |x_{max}| \end{cases} \quad (10)$$

式中 $x(k+i|k)$ 是基于 k 时刻在 $k+i$ 时刻的状态预测值, $u(i|k)$ 是基于 k 时刻的第 i 步控制输入; Q_1, R 为对应的状态和控制二次加权矩阵,反映系统的动态响应特性.为减少计算量,这里控制时域长度为 1,预测模型 $x(k+1) = A(x, k)x(k) + B(x, k)u(k)$ (原系统离散化后的)是时变的,并且可测的.

基于 LMI 约束凸优化(内点法)的模型预测控制,可以高效率快速在线求解控制输入^[10],是目前预测控制主要研究方法之一,因此针对再入大气层飞行器大时变参数的情况,给出下面方法和结果.

定理 2:对于时变系统 $x(k+1) = A(x, k)x(k) + B(x, k)u(k)$, $x(k|k)$ 是在 k 时刻的状态测量值,原点是平衡点,若满足下面约束优化问题的解 F, Q, γ 存在, $Q = Q^T \in R^{3 \times 3} > 0, Y \in R^{3 \times 3}, \gamma \in R^{1 \times 1} > 0$,则在 $u = Fx(k) = YQ^{-1}x(k)$ 作用下,闭环系统具有渐近稳定性,同时输入和状态满足约束.

$$\min_{Y, Q, \gamma} \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x^T(k) \\ x(k) & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} Q & QA^T(x) + Y^TB^T(x) & QQ_1^{1/2} & Y^TR^{1/2} \\ A(x)Q + B(x)Y & Q & 0 & 0 \\ Q_1^{1/2}Q & 0 & \gamma I & 0 \\ R^{1/2}Y & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} > 0 \quad (13)$$

$$\gamma(k) \leq \gamma(k-1) \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 I & Y \\ Y^T & Q \end{bmatrix} \geq 0 \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} |x_{max}|^2 I & G \\ G^T & Q^{-1} \end{bmatrix} \geq 0 \quad (16)$$

这样将时变系统的约束优化问题(10)转化为 LMI 多约束优化问题:其中(12)是性能指标最小约束,(13)和(14)是稳定性约束,(15)是输入约束;输入约束和稳定约束都转化为对状态空间的约束来处理,而对状态空间约束利用凸不变集来实现,由此带来一定的保守性.

证明:考虑在 k 时刻,预测模型为 $x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k)$,取 Lyapunov 函数 $V(x(k)) = x^T(k)P(k)x(k) P(k) > 0$,作为指标 J_{∞} 上界,利用二次不等式稳定性条件

$$V(x(k+i+1|k)) - V(x(k+i|k)) < -(x^T(k+i|k)Qx(k+i|k) + u^T(k+i|k)Ru(k+i|k)) \quad (17)$$

并令 $Q = \gamma P^{-1} > 0, Y = FQ^{-1}$,即可得到性能指标和稳定性约束 LMI(12-13).

若相邻采样时刻系统模型参数范围变化不大,上面的约束即可保证整个闭环系统渐近稳定性.对于再入飞行器来说,相邻采样时刻系统模型参数范围变化较大,即 k 时刻的状态 $x(k)$ 属于 $[A(x, k), B(x, k)]$ 工作点的邻域内,而 $k+1$ 时刻的状态 $x(k+1)$ 属于 $[A(x, k+1), B(x, k+1)]$ 的工作点邻域内,存在明显的模型切换,为保证稳定性,加上下面的约束:

$$\gamma(k+1) \leq \gamma(k)$$

当取 $V(x(k)) = x^T(k)Px(k)$ 为 Lyapunov 函数,当 $k \rightarrow \infty$,不管模型如何切换,始终有 $\gamma(k) \rightarrow 0, x(k) \rightarrow 0$,意味系统渐近稳定.

输入约束:

由于存在(17)不等式关系,因此 $V(x(k)) = x^T(k|k)Q^{-1}x(k|k) \leq 1$,是不变椭圆集合,利用范数定义可得到 LMI(15-16).若是跟踪问题,则 $u = -YQ^{-1}(x_{ol} - x(k)), x_{ol}$ 是期望标准轨道.

具体步骤:

①在当前采样时刻 k ,计算实际轨道对应 $A(x, k), B(x, k), x$;

②求解优化问题(11),得到 $u = Fx(k) = -YQ^{-1}(x_{ol} - x(k))$,作用到系统(1);

③在下一个采样时刻,重复步骤 1,2.

3 仿真研究

文献[13]中给出的 RLV 模型和参数进行纵向制导仿真.再入初始状态为 $r = 80000m, \theta = 0^\circ, \phi = 0^\circ, V = 7802(m/s), \gamma = -1^\circ, \psi = 90^\circ$.设计状态加

权矩阵 $Q = \text{diag}\{1, 1, 4, 4, 5, 1\}$, 控制加权矩阵 $R = \text{diag}\{25, 5\}$; 约束条件 $|\alpha| \leq 40^\circ$, $|\sigma| \leq 50^\circ$; 再入初始偏差满足 $|\Delta r| = 1000\text{m}$, $|\Delta\theta| = 0.1^\circ$, $|\Delta\phi| = 0.1^\circ$, $|\Delta V| = 20\text{m/s}$, $|\Delta\gamma| = -0.1^\circ$, $|\Delta\psi| = 0.01^\circ$, 下面的仿真结果给出了纵向运动的主要状态变量相对标准轨道的偏差随时间的变化曲线, 可以看出各状态偏差随时间渐近趋于零, 并且输入倾斜角满足约束. 同样预测控制对于气动参数, 以及大气密度等变化具有较强的鲁棒性, 这里由于篇幅限制, 不再列出仿真结果.

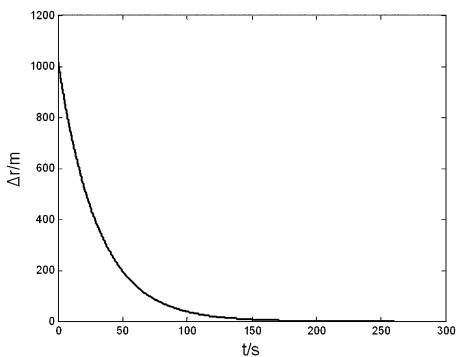


图 1 高度偏差变化

Fig.1 Altitude error change

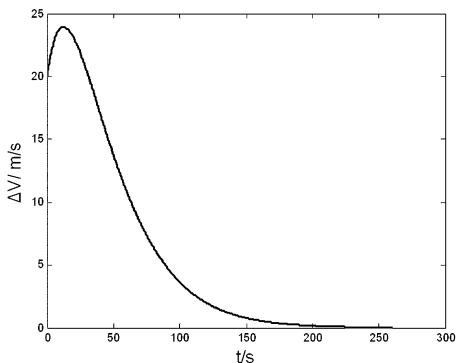


图 2 速度偏差变化

Fig.2 Velocity error change

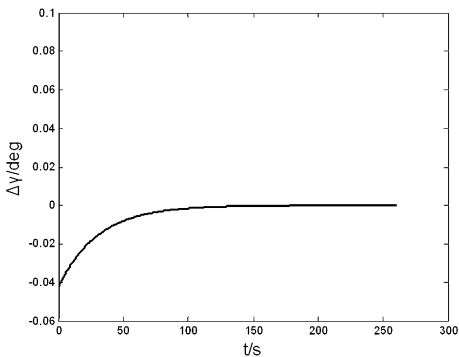


图 3 速度倾角偏差变化

Fig.3 flight path angle error change

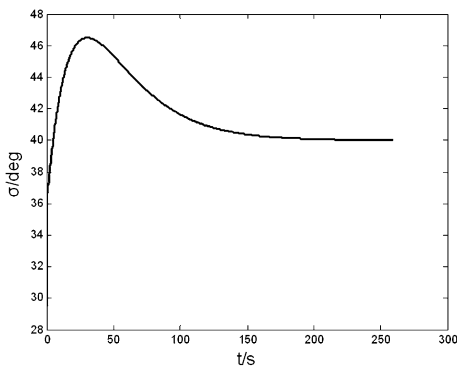


图 4 倾斜角变化

Fig.4 bank angle changes

4 结论

对再入飞行器设计纵向制导律, 对纵向运动方程进行伪线性化建模, 保证点点可控, 并简化了模型. 在每个采样周期内利用 LMI 求解有约束的凸优化问题, 从而获得在线反馈控制律和全量控制量, 用于实际再入轨道的制导. 仿真结果表明, 所设计的制导律对再入初始偏差和气动参数, 以及大气密度等具有较强的鲁棒性.

参 考 文 献

- 1 Harpold, Jon. Graves and Claude A J shuttle entry guidance. *Journal of the Astronautical Sciences*, 1979, XXV II (3) :239 ~ 268
- 2 Lu Ping. Entry guidance for the X-33 vehicle. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 1998, 35(3) :342 ~ 349
- 3 Dukeman G A. Profile-following entry guidance using linear quadratic regulator theory. AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, Monterey, 2002:4457
- 4 汤国建, 赵汉元. 飞船再入制导最佳反馈增益系数规律. 国防科技大学学报, 2000, 22(3) :53 ~ 56 (Tang Guojian, Zhao Hanyuan. A study of the optimal feedback gain coefficients of reentry guidance for spacecraft. *Journal National University of Defense Technology*, 2000, 22(3) :53 ~ 56 (in Chinese))
- 5 P Lu. Regulation about time-varying trajectories: Precision entry guidance illustrated. *J Guidance, Control and Dynamics*, 1999, 22:784 ~ 790
- 6 Zuojun Shen, Ping Lu. On-board entry planning for sub-orbit flight. *Acta Astronautica*, 2005(56) :573 ~ 591
- 7 赵艳彬, 王萍萍. 挠性飞行器姿态稳定鲁棒变结构控制. 动力学与控制学报, 2005, 3(3) :1 ~ 6 (Zhao Yanbin,

- Wang Pingping. Application of variable structure robust attitude controller to flexible spacecraft. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(3): 1 ~ 6 (in Chinese)
- 8 Tamas Keviczky. Receding horizon control of an F-16 aircraft: a comparative study. *Control Engineering Practice*, 2006, 14: 1023 ~ 1033
- 9 Manye D Q. Constrained model predictive control: stability and optimality. *Automatica*, 2000, 36(9): 789 ~ 814
- 10 Kothare, M. V. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 1996, 32(9): 1361 ~ 1379
- 11 J R Cloutier, . State-dependent riccati equation techniques: An Overview in Proc. ACC, Albuquerque, NM, 1997: 932 ~ 936
- 12 高晨, 李惠峰, 张平. 高速无人飞行器再入轨迹跟踪控制. 第一届中国导航、制导与控制学术会议, 北京, 2007: 286 ~ 289 (Gao Chen, Li Huifeng, Zhang Ping. Re-entry tracking control of high-speed unmanned vehicle. Proceedings of 1st Chinese Guidance, Navigation and Conference, Beijing, 2007: 286 ~ 289 (in Chinese))
- 13 John M C. Optimal nonlinear guidance with Inner-Loop feedback for hypersonic re-entry. American Control Conference, M, Minnesota, 2006: 5782 ~ 5787

OPTIMAL PREDICTIVE GUIDANCE BASED ON LINEAR MATRIX INEQUALITIES CONSTRAINTS FOR RE-ENTRY VEHICLES*

Zhang Jun¹ Liang Jianguo¹ Shao Xiaowei² Bi Zhenfa¹

(1. Aerospace System Engineering Shanghai, Shanghai 201108, China)

(2. Institute of Aerospace Science and Technology, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China)

Abstract A method based on linear matrix inequalities (LMI) constraints was presented for the re-entry longitudinal guidance law with intricate constraints. The nonlinear longitudinal dynamic equations were modeled pseudo-linearly for controllability in the standard trajectory neighborhood area, and then the guidance law was designed by solving LMI convex optimal. In each control period the feedback control law and input were obtained. The control input was used to guide the actual reentry trajectory, and closed-loop systems stability was proved. Simulation results show that the proposed guidance law is robust to deviations from reentry initial states.

Key words re-entry vehicles, longitudinal guidance, linear matrix inequalities, constraints, pseudolinear