

# 对接梁 Benchmark 模型的建模与动态特性分析\*

肖世富 刘信恩

(中国工程物理研究院总体工程研究所, 绵阳 621900)

**摘要** 采用相对描述方式建立了 Sandia 国家实验室结构连接件与界面研究中提出的对称连接梁 Benchmark 问题的对称和反对称动力学模型, 解析分析了系统的模态特性. 解析模型中连接段采用挠性根部法模拟其变形势能, 根部挠性参数则根据试验结果识别. 并采用虚拟材料法模拟连接段进行了有限元分析. 两种方法均获得了该 Benchmark 模型与其模态试验结果一致的动态特性.

**关键词** Benchmark 模型, 对接梁, 挠性根部法, 虚拟材料法

## 引言

连接与界面的模拟一直是困扰工程结构分析的主要难题之一. 2000 年, 美国 Sandia 国家实验室征求知名工程研究人员、学者和项目管理者建议, 提出了研究连接与界面建模问题的 Benchmark 模型<sup>[1,2]</sup>: 对称连接梁模型(如图 1 所示), 分别加工整体梁和螺栓连接梁以进行对比研究, 不同团队对此 Benchmark 模型的动力学特性进行了深入的实验与数值研究, 取得了重要进展<sup>[1,3-6]</sup>. 结合其长期积累的研究成果, Sandia 的研究团队于 2003 年提出了连接件建模的总路线图<sup>[7-9]</sup>, 建议通过试验研究间隙接触引起的微/宏观滑移和能量耗损现象, 然后从唯象的观点出发, 采用 Iwan 模型建立连接单元等方法来模拟间隙接触产生的各种非线性现象.

目前, 对称连接梁 Benchmark 模型动力学特性的研究尚缺乏解析理论分析结果. 同时, 连接件精细建模技术, 要求很高的软、硬件能力, 例如, 其结构连接件动力学分析模型中, 一个连接件的自由度就达到了 500 万. 对于很多工程分析课题, 很难达到如此高的软、硬件能力, 需发展适合实际能力的建模技术. 笔者所在团队从上世纪九十年代后期以来, 经过多年的工程分析工作积累, 逐渐发展了一套以虚拟材料模拟连接件的动力学建模方法<sup>[10]</sup>, 该方法可根据实际的软硬件能力建立合适的求解规模, 适宜数值结合试验研究连接结构的宽频带随机动力学问题, 可获得满意的结果. 本文首先根据对称连接梁

Benchmark 问题的结构特点, 将其分解为对称模态模型和反对称模态模型, 采用相对描述方式建立系统的对称和反对称动力学模型<sup>[11,12]</sup>, 解析分析其动态特性; 然后采用虚拟材料法模拟连接段, 用有限元分析结构的动态特性; 再与文献中的试验结果进行比较, 以验证两种分析方法的有效性.

## 1 动力学建模与动态特性分析

对于图 1 所示 Sandia 国家实验室结构连接件与界面研究中提出的对称连接梁 Benchmark 模型,

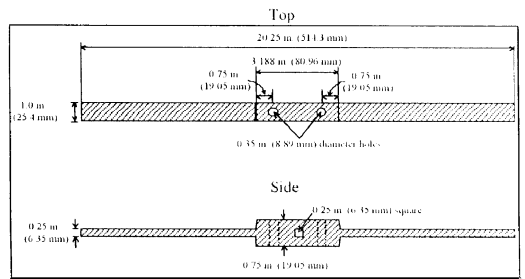


图 1 Sandia 对接梁 Benchmark 模型的构形

Fig. 1 Configuration of Sandian benchmark model of jointed beam

本文首先采用如下的建模方法解析分析系统的动态特性: 根据系统的对称性, 从梁的轴向几何中心将其分解为对称模态模型和反对称模态模型, 分别建立其动力学方程(组)并解析分析系统的对称和反对称动态特性; 对于分解的模型, 采用相对描述方式建立系统的动力学模型<sup>[11,12]</sup>, 即将连接段处理为平动(对称)/转动(反对称)刚体, 采用简化的方法考虑连接段的变形能与惯性, 其惯性由平均平

2008-06-23 收到第 1 稿, 2008-07-15 收到修改稿.

\* 国家自然科学基金委员会 - 中国工程物理研究院联合基金资助项目 (10876100) 与中国工程物理研究院双百人才基金课题资助项目 (ZX04002)

动/平均转动惯性近似,变形能由连接外部截面的平动/转动挠性变形能模拟;被连接细长梁的相对变形则采用 Euler-Bernoulli 梁理论进行建模处理.

1.1 对称模态模型动力学建模与动态特性分析

采用如图 2 所示方法建立浮动坐标系描述细长梁的相对变形. 设 Benchmark 模型中梁的总长为  $L$ ;连接的细长梁长  $L_1$ ,横截面积为  $A_1$ ,转动惯量为  $I_1$ ,密度为  $\rho_1$ ,弹性模量为  $E_1$ ;连接段长为  $R = (L - 2L_1)/2$ ,质量为  $\bar{m}$ ;对称模态模型模拟的平动刚度为  $K_{st}$ ;转动刚度为  $K_{sr}$ .

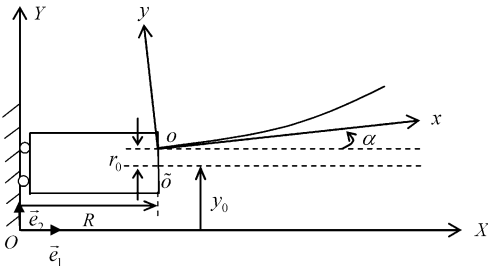


图2 对称模态模型坐标系及其变量

Fig.2 Coordinates and Variables of the symmetric-modal-model

细长梁在惯性坐标系  $O - XY$  中的位矢为

$$\vec{r} = (R + x)\vec{e}_1 + (y_0 + r_0 + x\alpha + y)\vec{e}_2 \quad (1)$$

对称模态模型的总动能为

$$T_s = (1/2)\bar{m}\dot{y}_0^2 + (1/2)\int_0^{L_1}\rho_1 A_1 (\dot{y}_0 + \dot{r}_0 + x\dot{\alpha} + \dot{y})^2 dx \quad (2)$$

其总势能为

$$U_s = (1/2)K_{st}r_0^2 + (1/2)K_{sr}\alpha^2 + (1/2)\int_0^{L_1}E_1 I_1 (y'')^2 dx \quad (3)$$

由 Hamilton 最小作用量原理可得到系统的线性动力学方程组

$$\begin{cases} E_1 I_1 y^{(4)} + \rho_1 A_1 (\ddot{y}_0 + \ddot{r}_0 + x\ddot{\alpha} + \ddot{y}) = 0 \\ \bar{m}\ddot{y}_0 + \rho_1 A_1 L_1 (\ddot{y}_0 + \ddot{r}_0 + L_1 \ddot{\alpha}/2) + \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \ddot{y} dx = 0 \\ \rho_1 A_1 L_1 (\ddot{y}_0 + \ddot{r}_0 + L_1 \ddot{\alpha}/2) + \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 \ddot{y} dx + K_{st} r_0 = 0 \\ (\rho_1 A_1 L_1^2/2)(\ddot{y}_0 + \ddot{r}_0 + 2L_1 \ddot{\alpha}/3) + \int_0^{L_1} \rho_1 A_1 x \ddot{y} dx + K_{sr} \alpha = 0 \\ y(0,t) = 0, y'(0,t) = 0; y''(L_1,t) = 0, y'''(L_1,t) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

动力学方程组(4)可以刻画系统的整体刚体平动模态、细长梁相对连接段的平动与转动模态以及细长梁的各阶相对变形模态. 若重点关注细长梁

的变形模态,可将方程组(4)第一式方程中梁挠度的加速度项  $\ddot{y}$  用其余项表出,然后代入后三个方程式中的积分项,利用边界条件分步积分,消除积分项后,联立求解出两个平动自由度的加速度表达式  $\ddot{y}_0, \ddot{r}_0$  和转动自由度的加速度表达式  $\ddot{\alpha}$  后再代入第一式,即可得到细长梁变形模态满足的动力学方程

$$\begin{cases} E_1 I_1 y^{(4)} + \rho_a A_1 \ddot{y} = \rho_1 A_1 E_1 I_1 [(1/\bar{m})y''''(0,t) - (1/K_{sr})x\ddot{y}''(0,t) + (1/K_{st})\ddot{y}''(0,t)] \\ y(0,t) = 0, y'(0,t) = 0; y''(L_1,t) = 0, y'''(L_1,t) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

引进无量纲化参数

$$\begin{cases} \xi = x/L_1, z = y/L_1, c_m = \rho_1 A_1 L_1 / \bar{m} \\ \beta_1 = \sqrt{\rho_1 A_1 L_1^4 / E_1 I_1}, \varepsilon_{st} = E_1 I_1 / K_{st} L_1^3, \varepsilon_{sr} = E_1 I_1 / K_{sr} L_1 \end{cases} \quad (6)$$

且仍不妨记  $x$  为  $\xi$ ,则线性动力学模型(5)无量纲化为

$$\begin{cases} z^{(4)} + \beta_1^2 \ddot{z} = c_m z''''(0,t) - \varepsilon_{st} \beta_1^2 x \ddot{z}''(0,t) + \varepsilon_{sr} \beta_1^2 \ddot{z}''(0,t) \\ z(0,t) = 0, z'(0,t) = 0; z''(1,t) = 0, z'''(1,t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

设

$$z(x,t) = w(x)e^{i\omega t} \quad (8)$$

将(8)代入(7)得到微分特征方程

$$\begin{cases} w^{(4)} - \lambda^4 w = c_m w''''(0) + \varepsilon_{sr} \lambda^4 x w''(0) - \varepsilon_{st} \lambda^4 w''(0) \\ w(0) = 0, w'(0) = 0; w''(1) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中  $\lambda = \sqrt{\beta_1 \omega}$ .

引入线性变换

$$v = w + (c_m/\lambda^4 - \varepsilon_{st})w''(0) + \varepsilon_{sr}w''(0)x \quad (10)$$

则(9)变换为

$$\begin{cases} v^{(4)} - \lambda^4 v = 0 \\ v(0) - (c_m/\lambda^4 - \varepsilon_{st})v''(0) = 0, \\ v'(0) - \varepsilon_{sr}v''(0) = 0; v''(1) = 0, v'''(1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

由(9)或(11)可得到满足的代数特征方程

$$1 + \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda + \lambda \varepsilon_{sr} (\cos\lambda \operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda \operatorname{ch}\lambda) + (\lambda^4 \varepsilon_{st} - c_m) [\varepsilon_{sr} (1 - \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda) - (1/\lambda) (\cos\lambda \operatorname{sh}\lambda + \sin\lambda \operatorname{ch}\lambda)] = 0 \quad (12)$$

特征方程(11)相应的特征向量为

$$v_j(x) = [(\eta_j - \psi_j) + \lambda_j \varepsilon_{sr}] \cos\lambda_j x + [\zeta_j - (\zeta_j - \psi_j) \lambda_j \varepsilon_{sr}] \sin\lambda_j x + [(\eta_j + \psi_j) + \lambda_j \varepsilon_{sr}] \operatorname{ch}\lambda_j x - [\zeta_j - (\zeta_j + \psi_j) \lambda_j \varepsilon_{sr}] \operatorname{sh}\lambda_j x, j = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

式中  $\lambda_j$  为代数特征方程(12)中的第  $j$  阶特征值,而

$$\xi_j = \frac{1 - \cos\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j}{\cos\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j - \sin\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j}, \eta_j = \frac{1 + \cos\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j}{\cos\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j - \sin\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j},$$

$$\psi_j = \frac{\sin\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j}{\cos\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j - \sin\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j}, \zeta_j = \frac{\cos\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j + \sin\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j}{\cos\lambda_j \operatorname{sh}\lambda_j - \sin\lambda_j \operatorname{ch}\lambda_j},$$

$$j = 1, 2, 3, \dots$$

通过变换式(10)反变换即可得到特征方程(9)的特征向量. 显然,对于整体梁与螺栓连接梁,其代数特征方程和特征向量的形式是完全相同的,即分别为式(12)和式(13),只是对于两种不同梁,其中的挠性参数的值不相同,需分别根据各自的模态试验结果进行识别. 下述反对称情形的结论与此一致.

### 1.2 反对称模态模型动力学建模与动态特性分析

类似图 2 或参考文[9],可建立反对称模态模型的动力学方程. 由于反对称模态中连接段变形较小,可不考虑平动挠性,其变形能全由转动挠性模拟. 此时,其动能为

$$T_a = (1/2)\bar{J}\dot{\theta}^2 + (1/2)\int_0^{L_1} \rho_1 A_1 [\dot{r}_0 + x\dot{\alpha} + \dot{y} + (R+x)\dot{\theta}]^2 dx \quad (14)$$

式中  $\theta$  为连接段的整体转角变量; $\bar{J}$  为连接段的转动惯量.

反对称模态模型的总势能为

$$U_a = (1/2)K_{ar}\alpha^2 + (1/2)\int_0^{L_1} E_1 I_1 (y'')^2 dx \quad (15)$$

式中  $K_{ar}$  为反对称模态模型的转动刚度.

同理,由 Hamilton 最小作用量原理可得到反对称模态模型的线性动力学方程组

$$\begin{cases} E_1 I_1 y^{(4)} + \rho_1 A_1 [(R+x)\ddot{\theta} + x\ddot{\alpha} + \ddot{y}] = 0 \\ \bar{J}\ddot{\theta} + \int_0^b \rho_1 A_1 (R+x) [(R+x)\ddot{\theta} + x\ddot{\alpha} + \ddot{y}] dx = 0 \\ \int_0^b \rho_1 A_1 x [(R+x)\ddot{\theta} + x\ddot{\alpha} + \ddot{y}] dx + K_{sr}\alpha = 0 \\ y(0,t) = 0, y'(0,t) = 0; y''(L_1,t) = 0, y'''(L_1,t) = 0 \end{cases} \quad (16)$$

化简(16)有

$$\begin{cases} E_1 I_1 y^{(4)} + \rho_1 A_1 \ddot{y} = \rho_1 A_1 E_1 I_1 \{ [(R+x)/\bar{J}] \times \\ [Ry'''(0,t) - y''(0,t)] - (1/K_{ar})xy'''(0,t) \} \\ y(0,t) = 0, y'(0,t) = 0; y''(L_1,t) = 0, y'''(L_1,t) = 0 \end{cases} \quad (17)$$

将(17)无量纲化有

$$\begin{cases} z^{(4)} + \beta_1^2 \ddot{z} = c_i(a+x) [az'''(0,t) - \\ z''(0,t)] - \varepsilon_{ar}\beta_1^2 z''(0,t)x \\ z(0,t) = 0, z'(0,t) = 0; z''(1,t) = 0, z'''(1,t) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

式中  $a = R/L_1, c_i = \rho A_1 L_1^3 / \bar{J}, \varepsilon_{ar} = E_1 I_1 / K_{ar} L_1$ .

将(8)代入(18)有

$$\begin{cases} w^{(4)} - \lambda^4 w = c_i(a+x) [aw'''(0) - w''(0)] + \varepsilon_{ar}\lambda^4 xw''(0) \\ w(0) = 0, w'(0) = 0; w''(1) = 0, w'''(1) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

引入线性变换

$$v = w + (c_i/\lambda^4)(a+x) [aw'''(0) - w''(0)] + \varepsilon_{ar} xw''(0) \quad (20)$$

则(19)变换为

$$\begin{cases} v^{(4)} - \lambda^4 v = 0 \\ v(0) + (c_i a/\lambda^4)v''(0) - (c_i a^2/\lambda^4)v'''(0) = 0, \\ v'(0) + (c_i/\lambda^4 - \varepsilon_{ar})v''(0) - (c_i a/\lambda^4)v'''(0) = 0; \\ v''(1) = 0, v'''(1) = 0 \end{cases} \quad (21)$$

特征方程(19)、(21)的特征值满足的代数特征方程为

$$\begin{aligned} & 1 + \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda + (2c_i a/\lambda^2) \sin\lambda \operatorname{sh}\lambda + (\lambda \varepsilon_{ar} + \\ & c_i/\lambda^3) (\cos\lambda \operatorname{sh}\lambda - \sin\lambda \operatorname{ch}\lambda) + \\ & (c_i a^2/\lambda) (\cos\lambda \operatorname{sh}\lambda + \sin\lambda \operatorname{ch}\lambda) - \\ & c_i a^2 \varepsilon_{ar} (1 - \cos\lambda \operatorname{ch}\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

特征方程(21)相应的特征向量为

$$\begin{aligned} v_j(x) = & [(1 + c_i a/\lambda_j^2) - (c_i a^2/\lambda_j)] (\xi_j + \psi_j) \cos\lambda_j x + \\ & [(\eta_j + \psi_j) - (c_i a/\lambda_j^2)] (\xi_j - \psi_j) + \\ & (c_i a^2/\lambda_j) \zeta_j \sin\lambda_j x - [(1 - c_i a/\lambda_j^2) - \\ & (c_i a^2/\lambda_j) (\xi_j - \psi_j)] \operatorname{ch}\lambda_j x + [(\eta_j - \psi_j) + \\ & (c_i a/\lambda_j^2) (\xi_j + \psi_j) + (c_i a^2/\lambda_j) \zeta_j] \operatorname{sh}\lambda_j x \end{aligned} \quad (23)$$

式中  $\lambda_j$  为代数特征方程(22)中的第  $j$  阶特征值. 通过变换式(20)作反变换即可得到特征方程(19)的特征向量.

### 1.3 参数识别及与试验对比

对于图 1 所示的 Benchmark 模型,根据文[2, 4]第 1、3 阶模态试验结果(对称)识别式(12)、(13)中的挠性参数  $\varepsilon_{r1}, \varepsilon_{s1}$ ,根据第 3 阶模态试验结果(反对称)识别式(22)、(23)中的挠性参数  $\varepsilon_{ar}$ . 整体梁的识别结果为  $\varepsilon_{sr} = 1.3597 \times 10^{-2}, \varepsilon_{st} = 6.8809 \times 10^{-5}, \varepsilon_{ar} = 1.1329 \times 10^{-2}$ ;螺栓连接梁的识别结果为  $\varepsilon_{sr} = 4.5599 \times 10^{-2}, \varepsilon_{st} = 6.0291 \times 10^{-4}, \varepsilon_{ar} = 4.6766 \times 10^{-2}$ . 识别结果表明,对于对称模型,平动挠性参数很小,表明其对系统对称模态影响较小,可以忽略. 忽略平动挠性后,整体梁识别的转动

挠性参数为  $\varepsilon_{sr} = 1.3651 \times 10^{-2}$ ; 螺栓连接梁识别的转动挠性参数为  $\varepsilon_{sr} = 4.6089 \times 10^{-2}$ . 然后根据识别的参数分别预测第 4 阶模态(反对称)和第 5 阶模态(对称), 预测结果如表 1 所示. 表 1 预测频率中, 每栏上面的值为双参数分析频率, 下面的值为单参数分析频率.

表 1 解析预测频率及其与试验的相对误差

Table 1 Analytical Frequency and its relatively error vs. experimental frequency

No.	Monolithic beam			Jointed beam		
	Experimental frequency (Hz)	Analytical frequency (Hz)	error (%)	Experimental frequency (Hz)	Analytical frequency (Hz)	error (%)
1	139.04	139.04 139.04	0.00%	132.26	132.26 132.26	0.00%
2	341.32	341.32	0.00%	336.80	336.80	0.00%
3	757.99	757.99 759.19	0.00% 0.16%	715.43	715.44 725.37	0.00% 1.39%
4	1092.64	1099.76	0.65%	1052.37	1060.83	0.80%
5	1962.57	1979.10 1990.26	0.84% 1.41%	1846.62	1812.73 1909.53	-1.84% 3.41%

表 1 的比较结果表明:

- 整体梁和螺栓连接梁固有频率的预测误差均在 5% 以内, 具有较高的预测精度;
- 整体梁固有频率的预测精度高于螺栓连接梁的预测精度, 螺栓连接非线性对高阶频率具有一定程度的影响;
- 本文的解析方法是有效的.

## 2 有限元分析与参数识别

下面采用虚拟材料法模拟连接段建立系统的有限元分析模型, 采用 ANSYS 商业软件分析其动态特性. 建立的有限元模型如图 3 所示, 其中采用

别. 根据文献[2,4]模态试验结果识别的参数和分析结果如表 2 所示.

表 2 有限元计算频率及其与试验的相对误差

Table 2 Frequency calculated by FEM and its relatively error vs. experimental frequency

No.	Monolithic beam $E_2 = 200\text{GPa}$			Jointed beam $E_2 = 56\text{GPa}$		
	Experimental frequency (Hz)	Calculated frequency (Hz)	error (%)	Experimental frequency (Hz)	Calculated frequency (Hz)	error (%)
1	139.04	139.66	0.45	132.26	132.32	0.05
2	341.32	341.30	-0.01	336.80	338.29	0.44
3	757.99	757.93	-0.01	715.43	713.62	-0.25
4	1092.64	1100.67	0.73	1052.37	1072.78	1.94
5	1962.57	1971.29	0.44	1846.62	1838.77	-0.43

表 2 的比较结果表明, 虚拟材料法模拟对接梁 Benchmark 模型具有很好的精度, 该分析方法是有效的.

## 3 讨论

本文根据 Sandia 对称连接梁 Benchmark 模型特点, 将其分解为对称模态模型和反对称模态模型, 采用相对描述方式建立了各自的动力学模型, 解析分析了系统的动态特性; 并采用虚拟材料法模拟连接段进行了有限元分析. 两种方法均获得了该 Benchmark 模型与其模态试验结果一致的动态特性, 表明两种分析方法是有效的.

另外, 本文虽然没有分析系统的阻尼性能, 但只要在解析分析时, 增加细长梁的粘性阻尼项和连接段的阻尼项, 也可以识别分析系统的阻尼特性.

## 参 考 文 献

- Hartwigsen CJ. Dynamics of jointed beam structures; computational and experimental studies. M. Sc. Thesis, Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Illinois at Urbana - Champaign, 2002
- Song Y, Hartwigsen CJ, Bergman LA, Vakakis AF. A three-dimensional nonlinear reduced-order predictive joint model. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*,



图 3 系统有限元模型

Fig. 3 Finite element model of the system

Solid45 实体单元离散, 整体自由度为 2940. 分析参数为: 细长梁和连接段的密度为  $\rho_1 = \rho_2 = 7750\text{kg/m}^3$ ; 泊松比为  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ; 细长梁弹性模量为  $E_1 = 200\text{GPa}$ ; 连接段弹性模量需根据模态试验结果识

- 2003,2(1):59~73
- 3 Song Y, Hartwigsen CJ, McFarland DM, Vakakis AF, Bergman LA. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*,2004,273:249~276
- 4 Hartwigsen CJ, Song Y, McFarland DM, Bergman LA, Vakakis AF. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration. *Journal of Sound and Vibration*,2004,277:327~351
- 5 Song Y, McFarland DM, Bergman LA, Vakakis AF. Effect of pressure distribution on energy dissipation in a mechanical Lap joint. *AIAA Journal*,2005,43(2):420~425
- 6 Urbina A, Paez T. Statistical validation of structural dynamics models. *J of the IEST*,2003,46:141~148
- 7 Gorbatikh L, Popova M. Modeling of a locking mechanism between two rough surfaces under cyclic loading. *I J of Mechanical Sciences*,2006,48(9):1014~1020
- 8 Ahmadian H, Jalali H. Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*,2007,21(2):1041~1050
- 9 Ahmadian H, Jalali H. Generic element formulation for modeling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*,2007,21(5):2318~2334
- 10 肖世富,陈滨,杜强,冯加权,陈大林. 宽带随机激励下非线性连接结构振动响应分析. 第十三届全国结构工程学术会议论文集,北京:清华大学出版社,2004:405~411 (Xiao SF, Chen B, Du Q, Feng JQ, Chen DL. Vibration response analysis of a nonlinear connection structure undergoing broad-band random excitation. Proceedings of the 13th national conference on structure engineering, Beijing: Tsinghua University Press,2004:405~411 (in Chinese))
- 11 肖世富,陈滨. 挠性根部梁的动力学建模. 力学与实践,2005,27(5):21~24,38 (Xiao SF, Chen B. Dynamic modeling of beams with flexible support. *Mechanics in Engineering*,2005,27(5):21~24,38 (in Chinese))
- 12 Xiao SF, Yang M. Nonlinear dynamic modeling, instability and post-buckling analysis of a rotating beam with a flexible support. *I J of Structure, Stability and Dynamics*,2006,6(4):475~491

## MODELING AND MODAL ANALYSIS ON BENCHMARK MODEL OF JOINTED BEAM\*

Xiao Shifu Liu Xin-en

(Institute of Systems Engineering, CAEP, Mianyang 621900, China)

**Abstract** For the famous benchmark model of jointed beam proposed by the Sandia workshop on the modeling and simulation of structures with jointed interfaces, a symmetric-modal-model and an antisymmetric-modal-model were developed by the flexible support method in a relative description style separately. Then the modes were analyzed and the flexible parameters of the support were identified from the experimental data. A FEA was also carried out, in which the joint was modeled as a virtual material with identified parameters. The modes of the jointed beam predicted by the analytical method and FEM are well coincident with the experimental results.

**Key words** Benchmark problem, jointed beam, flexible support method, virtual material method