

# 平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的计算

刘齐茂<sup>1,2</sup> 燕柳斌<sup>2</sup>

(1. 广西工学院土木建筑系, 柳州 545006) (2. 广西大学土木建筑学院, 南宁 530004)

**摘要** 提出一种平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的精确计算方法. 在有限单元法和纽马克- $\beta$ 法的基础上推导了平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的计算公式, 用 matlab 语言编制了平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的计算程序, 实现了平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的精确计算. 最后给出一个二层平面框架结构算例, 数值结果表明本文所提的地震力的设计敏度和海森矩阵的计算方法是有效的和高效的.

**关键词** 地震力设计敏度, 地震力海森矩阵, 纽马克- $\beta$ 法, 平面框架

## 引言

结构动力响应设计敏度和海森矩阵的计算是结构动力响应优化设计的关键技术之一, 设计敏度和海森矩阵即是一阶导数和二阶导数信息, 它反映设计变量或参数的改变对目标函数或约束函数的影响, 一阶导数和二阶导数信息被用于确定最优解的搜索方向, 建立近似方程或用于构造优化迭代计算公式及进行结构的动力设计修改. 现有计算方法主要有有限差分法、解析法和半解析法<sup>[1]</sup>. 解析法效率高, 精度有保障, 但结构的动力响应的导数的求解有时非常困难, 完全利用解析法几乎不可能, 通常要借助有限差分法或半解析法, 如 M. Bogomolni<sup>[2]</sup>等采用有限差分法计算结构的动力设计敏度, 但有限差分法通常用数值差商近似代替微商, 导致结构重分析次数成倍的增加, 降低了求解的效率, 并且求解的精度与差分步长有关, 差分步长的确定比较困难. 我国林家浩<sup>[3]</sup>较早对结构动力优化中的灵敏度问题进行了分析研究, 林树枝等<sup>[4]</sup>提出了结构动力响应灵敏度分析的振型叠加法, 邹时智等<sup>[5,6]</sup>提出了一种结构动力响应灵敏度分析的 Laplace 变换法, 潘振宽等<sup>[7,8]</sup>提出了一种动力学设计灵敏度分析方法. 地震力是指地震时强烈的地面运动引起的结构惯性力, 其大小不完全决定于地震时地面运动的强烈程度, 还决定于结构的动力特性, 在结构设计中, 通常算得的地震力后, 将地震力

作用于结构按静力学方法计算结构的内力和变形, 因此在抗震结构动力响应优化设计中地震力通常出现在约束函数或目标函数中, 当采用某些数学规划法如牛顿法、拟牛顿法<sup>[9]</sup>进行抗震结构优化设计时, 就象需要计算重力的设计敏度和海森矩阵一样, 地震力的设计敏度和海森矩阵的计算也是不可避免的, 因此有必要分析地震力的设计敏度和海森矩阵. 目前, 关于地震力的设计敏度和海森矩阵计算的报道在国内外文献中尚未见到. 本文提出一种平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的计算方法, 在有限单元法<sup>[10]</sup>和纽马克- $\beta$ 法<sup>[11]</sup>的基础上推导了平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的计算公式, 用 matlab 语言编制了平面框架结构地震力的设计敏度和海森矩阵的计算程序, 并给出了一个二层平面框架的计算实例, 计算结果表明本文所提的地震力的设计敏度和海森矩阵的计算方法是可行的, 该算法可推广到其他的结构形式.

## 1 平面杆系总的刚度矩阵、总的质量矩阵、总的阻尼矩阵对设计变量的一阶和二阶导数

### 1.1 杆单元刚度矩阵对设计变量的一阶和二阶导数

平面杆单元如图 1 所示, 单元编号为  $e$ , 局部坐标系  $\bar{x}\bar{y}$  的正向由结点  $i$  指向结点  $j$ , 在局部坐标系下结点  $i$  的位移有两个线位移  $\bar{u}_i, \bar{v}_i$  和一个角位移  $\bar{\theta}_i$ , 结点  $j$  的位移有两个线位移  $\bar{u}_j, \bar{v}_j$  和一个角位移  $\bar{\theta}_j$ , 整体坐标系为  $xoy$ , 在整体坐标系下结点  $i$  的

位移有两个线位移  $u_i, v_i$  和一个角位移  $\theta_i = \bar{\theta}_i$ , 结点  $j$  的位移有两个线位移  $u_j, v_j$  和一个角位移  $\theta_j = \bar{\theta}_j$ , 局部坐标系和整体坐标系的夹角为  $\varphi$ , 单元长度为  $l_e$ , 单元截面为矩形截面(宽  $b_e$  和高  $h_e$  称为单元  $e$  的设计变量).

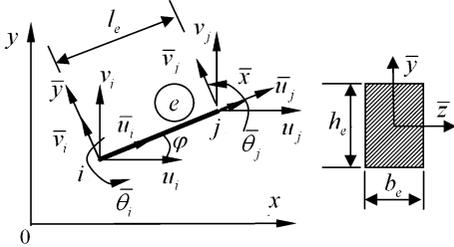


图 1 平面杆单元及单元的设计变量

Fig. 1 Planar beam element and its design variables

根据参考文献[12],在局部坐标系下单元的刚度矩阵为

$$\bar{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{Eb_e h_e}{l_e} & 0 & 0 & \frac{-Eb_e h_e}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Eb_e h_e^3}{l_e^3} & \frac{Eb_e h_e^3}{2l_e^2} & 0 & \frac{-Eb_e h_e^3}{l_e^3} & \frac{Eb_e h_e^3}{2l_e^2} \\ 0 & \frac{Eb_e h_e^3}{2l_e^2} & \frac{Eb_e h_e^3}{3l_e} & 0 & \frac{-Eb_e h_e^3}{2l_e^2} & \frac{Eb_e h_e^3}{6l_e} \\ -\frac{Eb_e h_e}{l_e} & 0 & 0 & \frac{Eb_e h_e}{l_e} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-Eb_e h_e^3}{l_e^3} & \frac{-Eb_e h_e^3}{2l_e^2} & 0 & \frac{Eb_e h_e^3}{l_e^3} & \frac{-Eb_e h_e^3}{2l_e^2} \\ 0 & \frac{Eb_e h_e^3}{2l_e^2} & \frac{Eb_e h_e^3}{6l_e} & 0 & \frac{-Eb_e h_e^3}{2l_e^2} & \frac{Eb_e h_e^3}{3l_e} \end{bmatrix} \quad (1)$$

等式(1)两边分别对设计变量求导一次两次得  $\frac{\partial \bar{K}^e}{\partial b_e}, \frac{\partial \bar{K}^e}{\partial h_e}$  和  $\frac{\partial^2 \bar{K}^e}{\partial b_e \partial b_e}, \frac{\partial^2 \bar{K}^e}{\partial h_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 \bar{K}^e}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 \bar{K}^e}{\partial h_e \partial b_e}$ .

根据参考文献[12],单元坐标转换矩阵为

$$T^e = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

通过式(2)计算单元坐标转换矩阵后,可求得在整体坐标系下单元的刚度矩阵为

$$K^e = T^{eT} \bar{K}^e T^e \quad (3)$$

等式两边分别对设计变量求导一次两次得  $\frac{\partial K^e}{\partial b_e}, \frac{\partial K^e}{\partial h_e}$  和  $\frac{\partial^2 K^e}{\partial b_e \partial b_e}, \frac{\partial^2 K^e}{\partial h_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 K^e}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 K^e}{\partial h_e \partial b_e}$ . 显然,编号为  $e$  单元的单元刚度矩阵对其他单元设计变量的一阶和二阶导数必然为零矩阵.

### 1.2 总的刚度矩阵对设计变量的一阶和二阶导数

得到在整体坐标系下各个单元刚度矩阵及其对设计变量的一阶和二阶导数后,即可通过“对号入座法”集成杆系总的刚度矩阵  $K$  及其对设计变量的一阶导数  $\frac{\partial K}{\partial b_e}, \frac{\partial K}{\partial h_e}$  和二阶导数  $\frac{\partial^2 K}{\partial b_e \partial b_e}, \frac{\partial^2 K}{\partial h_e \partial h_e},$

$\frac{\partial^2 K}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 K}{\partial h_e \partial b_e}$ . 由于编号为  $e$  单元的单元刚度矩阵对其他单元(如编号为  $k$  的单元)设计变量的一阶和二阶导数为零矩阵,故当  $e \neq k$  时,矩阵  $\frac{\partial^2 K}{\partial b_e \partial b_k},$

$\frac{\partial^2 K}{\partial h_e \partial h_k}, \frac{\partial^2 K}{\partial b_e \partial h_k}, \frac{\partial^2 K}{\partial h_k \partial b_e}$  必为零矩阵.

### 1.3 杆单元质量矩阵对设计变量的一阶和二阶导数

在局部坐标系下单元的集中质量矩阵为

$$\bar{M}^e = \frac{\rho b_e h_e l_e}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,  $\rho$  为单元材料的密度.

等式(4)两边对设计变量求导一次两次可得  $\frac{\partial \bar{M}^e}{\partial b_e}, \frac{\partial \bar{M}^e}{\partial h_e}$  和  $\frac{\partial^2 \bar{M}^e}{\partial b_e \partial b_e}, \frac{\partial^2 \bar{M}^e}{\partial h_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 \bar{M}^e}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 \bar{M}^e}{\partial h_e \partial b_e}$ .

在整体坐标系下单元的集中质量矩阵为

$$M^e = T^{eT} \bar{M}^e T^e \quad (5)$$

等式(5)两边分别对设计变量求导一次两次得  $\frac{\partial M^e}{\partial b_e}, \frac{\partial M^e}{\partial h_e}$  和  $\frac{\partial^2 M^e}{\partial b_e \partial b_e}, \frac{\partial^2 M^e}{\partial h_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 M^e}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 M^e}{\partial h_e \partial b_e}$ . 显然,编号为  $e$  单元的单元集中质量矩阵对其他单元设计变量的一阶和二阶导数必然为零矩阵.

### 1.4 总的质量矩阵对设计变量的一阶和二阶导数

得到在整体坐标系下各个单元集中质量矩阵及其对设计变量的一阶和二阶导数后,即可通过“对号入座法”集成杆系总的质量矩阵  $M$  及其对设计变量的一阶导数  $\frac{\partial M}{\partial b_e}, \frac{\partial M}{\partial h_e}$  和二阶导数  $\frac{\partial^2 M}{\partial b_e \partial b_e},$

$\frac{\partial^2 M}{\partial h_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 M}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 M}{\partial h_e \partial b_e}$ . 由于编号为  $e$  单元的单元集中质量矩阵对其他单元(如编号为  $k$  的单元)设计变量的一阶和二阶导数为零矩阵,故当  $e \neq k$  时,矩阵  $\frac{\partial^2 M}{\partial b_e \partial b_k}, \frac{\partial^2 M}{\partial h_e \partial h_k}, \frac{\partial^2 M}{\partial b_e \partial h_k}, \frac{\partial^2 M}{\partial h_k \partial b_e}$  必为零矩阵.

### 1.5 总的阻尼矩阵对设计变量的一阶和二阶导数 阻尼矩阵采用瑞雷阻尼

$$C = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad (6)$$

其中,  $\alpha_1 = \frac{2(\zeta_1 \omega_1 - \zeta_2 \omega_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}$ ,  $\alpha_2 = \frac{2(\zeta_2 \omega_2 - \zeta_1 \omega_1)}{\omega_2^2 - \omega_1^2}$ . 取  $\zeta_1 = \zeta_2 = 0.05$ ,  $\omega_1, \omega_2$  分别为结构的一阶和二阶固有频率.

等式(6)两边分别对设计变量求导一次两次得  $\frac{\partial C}{\partial b_e}, \frac{\partial C}{\partial h_e}$  和  $\frac{\partial^2 C}{\partial b_e \partial b_e}, \frac{\partial^2 C}{\partial h_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 C}{\partial b_e \partial h_e}, \frac{\partial^2 C}{\partial h_e \partial b_e}$ . 当  $e \neq k$  时,矩阵  $\frac{\partial^2 C}{\partial b_e \partial b_k}, \frac{\partial^2 C}{\partial h_e \partial h_k}, \frac{\partial^2 C}{\partial b_e \partial h_k}, \frac{\partial^2 C}{\partial h_k \partial b_e}$  为零矩阵.

## 2 平面框架结构地震力的设计敏感度和海森矩阵的计算公式及流程图

用平面杆单元将平面框架结构划分为  $m$  个单元,设计变量依次为  $b_i, h_i (i = 1, 2, \dots, m)$ ,为了公式推导的方便引入设计变量向量,

$$d = [b_1 \quad h_1 \quad b_2 \quad h_2 \quad \dots \quad b_m \quad h_m] \quad (7)$$

在地面水平加速度时程  $\ddot{x}_g$  的激励下的运动微分方程组用矩阵的形式表示为

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -ME_u \ddot{x}_g \quad (8)$$

初始条件为

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (9)$$

其中,  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  为在整体坐标系下杆系的结点相对于地面的位移向量、结点相对于地面的速度向量和结点相对于地面的加速度向量,  $E_u$  为向量,在结点线位移  $u$  为 1,在结点线位移  $v$  和角位移  $\theta$  方向上为 0.

在任意时刻  $t + \Delta t$  体系均满足下列方程:

$$M\ddot{x}(t + \Delta t) + C\dot{x}(t + \Delta t) + Kx(t + \Delta t) = -ME_u \ddot{x}_g(t + \Delta t) \quad (10)$$

假设在初始时刻地面水平加速度  $\ddot{x}_g(0) = 0$ , 并且初始条件:  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$ , 因此根据式(8)或式(10)可计算初始加速度向量  $\ddot{x}(0)$ , 即结构在初始时刻为静止状态,结构的动力响应,动力响应

的一阶和二阶导数均为零,因此初始条件的计算变得很简单.

结构所受到的地震力向量  $F(t + \Delta t)$  等于质量矩阵乘以结点的绝对加速度的反号,见式(16). 用纽马克  $-\beta$  法计算地震力向量的计算步骤:

a. 0 初始计算:

a. 1  $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 0, F(0) = 0$ .

a. 2 由积分参数  $\delta$  和  $\beta$ , 取  $\delta \geq 0.5, \beta = 0.25$

$(0.5 + \delta)^2$ , 计算积分常数  $a_0 = \frac{1}{\beta \Delta t^2}, a_1 = \frac{\delta}{\beta \Delta t}, a_2 =$

$\frac{1}{\beta \Delta t}, a_3 = \frac{1}{2\beta} - 1, a_4 = \frac{\delta}{\beta} - 1, a_5 = \frac{\Delta t}{2} (\frac{\delta}{\beta} - 2), a_6 = \Delta t$

$(1 - \delta), a_7 = \delta \Delta t$ .

a. 3 形成刚度矩阵  $K$ 、质量矩阵  $M$ , 阻尼矩阵为  $C$ .

a. 4 形成有效的刚度矩阵  $K^*$ ,

$$K^* = K + a_0 M + a_1 C \quad (11)$$

b. 0 计算  $t + \Delta t$  时刻的响应:

b. 1 计算  $t + \Delta t$  时刻的有效荷载:

$$F^*(t + \Delta t) = -ME_u \ddot{x}_g(t + \Delta t) + M[a_0 x(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_3 \ddot{x}(t)] + C[a_1 x(t) + a_4 \dot{x}(t) + a_5 \ddot{x}(t)] \quad (12)$$

b. 2 求解方程,

$$K^* x(t + \Delta t) = F^*(t + \Delta t) \quad (13)$$

求得  $t + \Delta t$  时刻的结点位移  $x(t + \Delta t)$ .

b. 3 求解  $t + \Delta t$  时刻的加速度:

$$\ddot{x}(t + \Delta t) = a_0 [x(t + \Delta t) - x(t)] - a_2 \dot{x}(t) - a_3 \ddot{x}(t) \quad (14)$$

b. 4 求解  $t + \Delta t$  时刻的速度:

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + a_6 \ddot{x}(t) + a_7 \ddot{x}(t + \Delta t) \quad (15)$$

b. 5 求解  $t + \Delta t$  时刻地震力向量:

$$F(t + \Delta t) = -M[\ddot{x}(t + \Delta t) + E_u \ddot{x}_g(t + \Delta t)] \quad (16)$$

重复 b. 1 至 b. 5 步即可求得各时刻的地震力向量.

### 2.1 在 $t + \Delta t$ 时刻地震力对设计变量一阶导数的计算公式推导

等式(13)两边对设计变量  $d_i$  求导,得

$$\frac{\partial K^*}{\partial d_i} x(t + \Delta t) + K^* \frac{\partial x(t + \Delta t)}{\partial d_i} = \frac{\partial F^*(t + \Delta t)}{\partial d_i} \quad (17)$$

移项,得计算在  $t + \Delta t$  时刻结点位移响应设计变量的一阶导数公式如下

$$\mathbf{K}^* \frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i} = \frac{\partial \mathbf{F}^*(t+\Delta t)}{\partial d_i} - \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial d_i} \mathbf{x}(t+\Delta t) \quad (18)$$

在式(17)和式(18)中,(等式(11)和等式(12)两边分别对设计变量求导获得如下两式)

$$\frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial d_i} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial d_i} + a_0 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} + a_1 \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial d_i} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}^*(t+\Delta t)}{\partial d_i} &= -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} \mathbf{E}_u \ddot{\mathbf{x}}_g(t+\Delta t) + \\ &\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} [a_0 \mathbf{x}(t) + a_2 \dot{\mathbf{x}}(t) + a_3 \ddot{\mathbf{x}}(t)] + \\ &\mathbf{M} [a_0 \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_i} + a_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} + a_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i}] + \\ &\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial d_i} [a_1 \mathbf{x}(t) + a_4 \dot{\mathbf{x}}(t) + a_5 \ddot{\mathbf{x}}(t)] + \\ &\mathbf{C} [a_1 \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_i} + a_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} + a_5 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i}] \quad (20) \end{aligned}$$

由式(18)求得 $\frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i}$ 后,等式(14)两边对设计变量进一步求导,可求解 $t+\Delta t$ 时刻结点加速度响应设计变量的一阶导数如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i} &= a_0 \left[ \frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i} - \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_i} \right] - \\ &a_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} - a_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} \quad (21) \end{aligned}$$

求得 $\frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i}$ 后,等式(15)两边对设计变量进一步求导,可求解 $t+\Delta t$ 时刻结点速度响应设计变量的一阶导数如下

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i} = \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} + a_6 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} + a_7 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i} \quad (22)$$

等式(16)两边对设计变量 $d_i$ 求导,可求解 $t+\Delta t$ 时刻地震力对设计变量的一阶导数如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}(t+\Delta t)}{\partial d_i} &= -\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) - \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i} - \\ &\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} \mathbf{E}_u \ddot{\mathbf{x}}_g(t+\Delta t) \quad (23) \end{aligned}$$

通过式(18)(21)(22)(23)(计算时应按顺序进行)即可求得在 $t+\Delta t$ 时刻结点位移、结点加速度、结点速度、地震力对设计变量的一阶导数,即可获得设计敏感度。

## 2.2 在 $t+\Delta t$ 时刻地震力对设计变量二阶导数的计算公式推导

等式(18)两边对设计变量 $d_i$ 求导,得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{K}^*}{\partial d_i \partial d_j} \mathbf{x}(t+\Delta t) + \frac{\partial^2 \mathbf{K}^*}{\partial d_i} \frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_j} + \\ \frac{\partial^2 \mathbf{K}^*}{\partial d_j} \frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i} + \mathbf{K}^* \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} = \\ \frac{\partial^2 \mathbf{F}^*(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} \quad (24) \end{aligned}$$

移项,得计算在 $t+\Delta t$ 时刻结点位移响应设计变量的二阶导数公式如下

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^* \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{F}^*(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}^*}{\partial d_i \partial d_j} \mathbf{x}(t+ \\ \Delta t) - \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial d_i} \frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_j} - \frac{\partial \mathbf{K}^*}{\partial d_j} \frac{\partial \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i} \quad (25) \end{aligned}$$

其中,(等式(19)和等式(20)两边分别对进一步设计变量求导获得如下二式)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}^*}{\partial d_i \partial d_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial d_i \partial d_j} + a_0 \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial d_i \partial d_j} + a_1 \frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial d_i \partial d_j} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{F}^*(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial d_i \partial d_j} \mathbf{E}_u \ddot{\mathbf{x}}_g(t+\Delta t) + \\ &\frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial d_i \partial d_j} [a_0 \mathbf{x}(t) + a_2 \dot{\mathbf{x}}(t) + a_3 \ddot{\mathbf{x}}(t)] + \\ &\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} [a_0 \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_j} + a_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_j} + a_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_j}] + \\ &\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_j} [a_0 \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_i} + a_2 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} + a_3 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i}] + \\ &\mathbf{M} [a_0 \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial d_i \partial d_j} + a_2 \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j} + a_3 \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j}] + \\ &\frac{\partial^2 \mathbf{C}}{\partial d_i \partial d_j} [a_1 \mathbf{x}(t) + a_4 \dot{\mathbf{x}}(t) + a_5 \ddot{\mathbf{x}}(t)] + \\ &\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial d_i} [a_1 \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_j} + a_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_j} + a_5 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_j}] + \\ &\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial d_j} [a_1 \frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial d_i} + a_4 \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i} + a_5 \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i}] + \\ &\mathbf{C} [a_1 \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial d_i \partial d_j} + a_4 \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j} + a_5 \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j}] \quad (27) \end{aligned}$$

由式(25)求得 $\frac{\partial^2 \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j}$ 后,等式(21)两边对设计变量进一步求导,可求解在 $t+\Delta t$ 时刻加速度对设计变量的二阶导数如下

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} &= a_0 \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} - \frac{\partial^2 \mathbf{x}(t)}{\partial d_i \partial d_j} \right] - \\ &a_2 \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j} - a_3 \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j} \quad (28) \end{aligned}$$

求得 $\frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j}$ 后,等式(22)两边对设计变量进一步求导,可求解在 $t+\Delta t$ 时刻速度对设计变量的二阶导数如下

$$\frac{\partial^2 \dot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} = \frac{\partial^2 \dot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j} + a_6 \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t)}{\partial d_i \partial d_j} + a_7 \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} \quad (29)$$

等式(23)两边对设计变量  $d_j$  求导,可求得在  $t + \Delta t$  时刻地震力对设计变量二阶导数:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{F}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial d_i \partial d_j} \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t) + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_i} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_j} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial d_j} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \ddot{\mathbf{x}}(t+\Delta t)}{\partial d_i \partial d_j} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial d_i \partial d_j} \mathbf{E}_u \ddot{x}_g(t+\Delta t) \quad (30)$$

通过式(25)(28)(29)(30)(计算时应按顺序进行)即可求得在  $t + \Delta t$  时刻结点位移、结点加速度、结点速度、地震力对设计变量的二阶导数,即可获得地震力的海森矩阵。

**2.3 地震力向量设计敏感度和海森矩阵的计算流程图**  
在纽马克- $\beta$ 法的基础上设计地震力向量对设计变量一阶和二阶导数的计算流程图如图2所示。

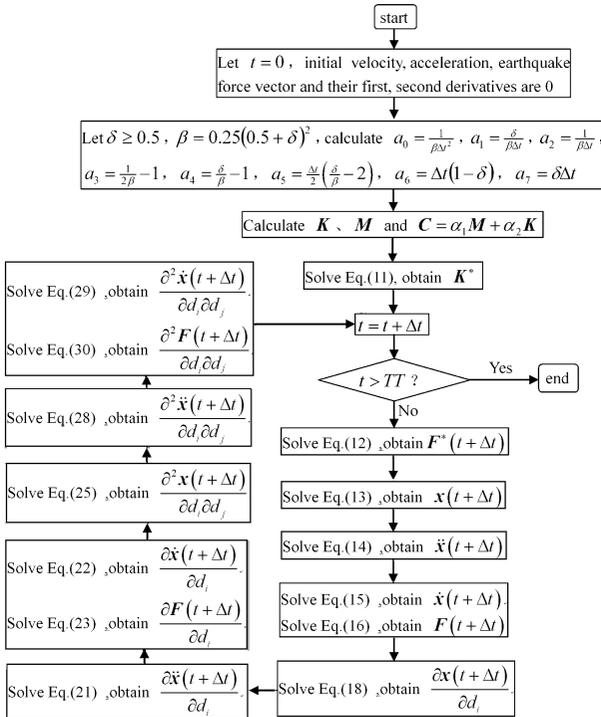


图2 地震力向量对设计变量的一阶和二阶导数的计算流程图  
Fig. 2 Computer chart of first and second derivatives of earthquake force vector with respect to design variables

**3 算例**

图3为一个二层平面框架结构。每层高均为4m,单跨为8m,使用材料的弹性模量  $E = 30\text{GPa}$ ,

密度  $\rho = 2500\text{kg/m}^3$ ,用6个平面杆单元将结构离散,单元编号为①~⑥,结点的整体编码为1,2,3,4,5,6,沿着杆轴线的箭头表示该杆单元的局部坐标系轴的正向,整体坐标系为  $xoy$ 。结点1和6与地面固接,因此结点1和6相对于地面的结点位移均为零。在整体坐标系下结点相对于地面的位移向量为  $\mathbf{x} = [u_2 \ v_2 \ \theta_2 \ u_3 \ v_3 \ \theta_3 \ u_4 \ v_4 \ \theta_4 \ u_5 \ v_5 \ \theta_5]^T$ ,  $\mathbf{E}_u = [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]^T$ ,平面框架的设计变量为  $b_i, h_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 。

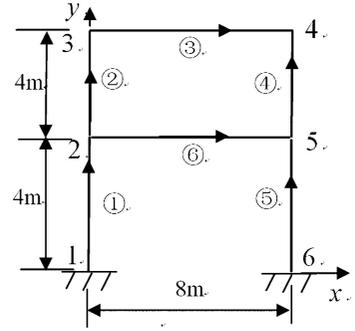


图3 二层平面框架结构  
Fig. 3 two-storey planar frame

输入的水平地面加速度  $\ddot{x}_g$  为 El Centro 强震记录(1940年),地面水平加速度峰值为  $0.349g$ ,记录时长为8s,步长  $\Delta t = 0.02\text{s}$ ,如图4所示。

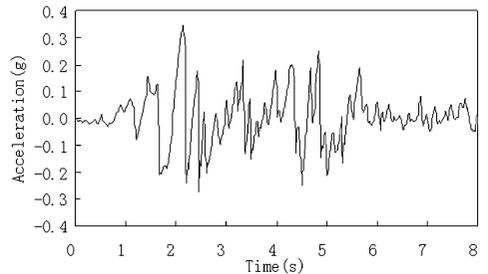
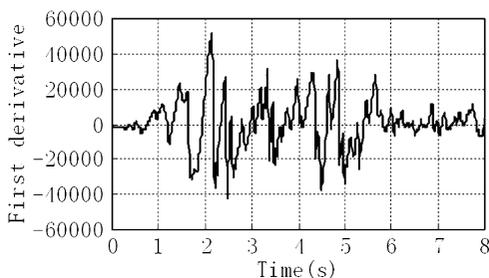
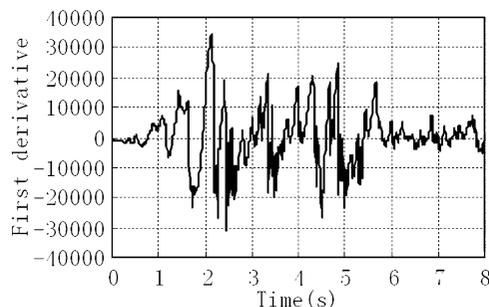
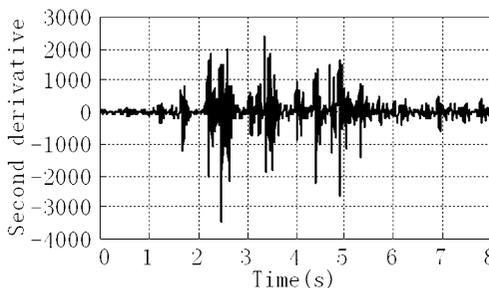
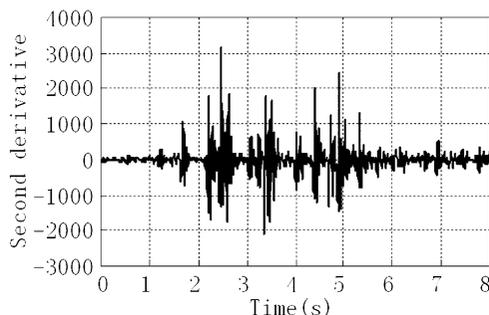


图4 El Centro 地震波  
Fig. 4 El Centro earthquake record

在  $t = 0$  时刻,结点位移及其对设计变量的一阶和二阶导数均为0,结点速度为及其对设计变量的一阶和二阶导数均为0,结点加速度及其对设计变量的一阶和二阶导数均为0,结点地震力及其对设计变量的一阶和二阶导数均为0。积分参数  $\delta = 0.8$ ,设计变量  $b_i = 2m (i = 1, 2, \dots, 6)$ ,  $h_i = 3m (i = 1, 2, \dots, 6)$ 。按上述求地震力的设计敏感度和海森矩阵的流程图2进行计算,即可获得地震力的设计敏感度和海森矩阵。由于篇幅有限,只列出了部分地震力的设计敏感度和海森矩阵时间历程曲线的结果,如图5~图8所示。

图5 结点2水平地震力对设计变量  $b_1$  的一阶导数Fig. 5 First derivatives of horizontal earthquake force of node 2 with respect to design variable  $b_1$ 图6 结点2水平地震力对设计变量  $h_1$  的一阶导数Fig. 6 First derivatives of horizontal earthquake force of node 2 with respect to design variable  $h_1$ 图7 结点2水平地震力对设计变量  $b_1 b_1$  的二阶导数Fig. 7 Second derivatives of horizontal earthquake force of node 2 with respect to design variables  $b_1 b_1$ 图8 结点2水平地震力对设计变量  $b_2 h_1$  的二阶导数Fig. 8 Second derivatives of horizontal earthquake force of node 2 with respect to design variables  $b_2 h_1$ 

## 4 结论

本文在有限单元法和纽马克- $\beta$ 法的基础上通过严密的数学推导得到了平面框架结构地震力的设计敏感度和海森矩阵的计算公式,提出了一种平面框架结构地震力的设计敏感度和海森矩阵的精确计算方法,该方法只需要进行一次动力响应分析就可完成,计算效率远远高于中心差分法.算例表明该算法是有效的,本文的设计敏感度和海森矩阵的精确计算方法同样适用于其它动力荷载的情况,是一种通用的动力响应设计敏感度和海森矩阵计算方法.

## 参 考 文 献

- 1 陈建军,车建文,崔明涛等. 结构动力优化设计述评与展望. 力学进展,2001,31(2):182~192(Chen Jianjun, Che Jianwen, Cui Mingtao et al. A review on structural dynamic optimum design. *Advances in Mechanics*, 2001, 31(2):182~192(in Chinese))
- 2 M Bogomolni, U Kirsch, I Sheinman. Efficient design sensitivities of structures subjected to dynamic loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2006, 43:5485~5500
- 3 林家浩. 结构动力优化中的灵敏度分析. 振动与冲击, 1985,4(1):1~6(Lin Jiahao. Sensitivity analysis in structural dynamic optimization. *Journal of Vibration and Shock*, 1985,4(1):1~6(in Chinese))
- 4 林树枝,程耿东. 动力响应灵敏度分析的振形空间法. 地震工程与工程振动,1990,10(3):57~64(Lin Shuzhi, Cheng Gengdong. Mode shape space method of dynamic response sensitivity analysis. *Earthquake Engineering and Engineering Vibration*, 1990,10(3):57~64(in Chinese))
- 5 张传立,邹时智,宋天霞. 结构动力响应灵敏度分析的Laplace变换法. 华中理工大学学报,1995,23(7):27~30(Zhang chuanli, Zou Shizhi, Song Tianxia. A method of Laplace transformation for sensitivity analysis of the structural dynamic response. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 1995, 23(7):27~30(in Chinese))
- 6 邹时智,宋天霞. 非线性结构动力响应中的灵敏度分析. 华中理工大学学报,1996,24(9):71~74(Zou Shizhi, Song Tianxia. A sensitivity analysis of the nonlinear structural dynamic response. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 1996, 24(9):71~74(in Chinese))

- nese))
- 7 潘振宽,丁洁玉,王钰. 基于隐式微分代数方程的多体系系统动力学设计灵敏度分析方法. 动力学与控制学报, 2004,2(2):66~69(Pan Zhenkuan, Ding Jieyu, Wang Yu. Design sensitivity analysis of multibody system dynamics described by implicit differential/algebraic equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2004,2(2):66~69(in Chinese))
  - 8 丁洁玉,潘振宽,陈立群. 基于微分/代数方程的多体系系统动力学设计灵敏度分析的伴随变量方法. 动力学与控制学报, 2006,4(3):205~209(Ding Jieyu, Pan Zhenkuan, Chen Liqun. Adjoint variable method for multibody system dynamics described by differential/algebraic equations. *Journal of Dynamics and Control*, 2006,4(3):205~209(in Chinese))
  - 9 G V Reklaitis, A Ravindran, K M Ragsdell. *Engineering Optimization Methods and Applications*. New York: John Wiley & Sons, 1983:98~119
  - 10 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 北京:中国水利水电出版社, 1998:459~467(Zhu Bofang. *Finite element method principle and application*. Beijing: China Water Power Press, 1998:459~467(in Chinese))
  - 11 Anil K Chopra. 结构动力学理论及其在工程中的应用(第2版). 北京:清华大学出版社, 2005:609~627(Anil K Chopra. *Structural dynamics theory and application in earthquake engineering*(the second edition). Beijing: Tsinghua University Press, 2005:609~627(in Chinese))
  - 12 刘尔烈,崔恩第,徐振铎. 有限单元法及程序设计. 天津:天津大学出版社, 2004:4~72(Liu Er Lie, Cun Endi, Xu Zhenduo. *Finite element method and programmer*. Tianjin: Tianjin University Press, 2004:4~72(in Chinese))

## EARTHQUAKE FORCE DESIGN SENSITIVITY AND HESSIAN MATRIX CALCULATION OF PLANAR FRAME

Liu Qimao<sup>1,2</sup> Yan Liubin<sup>2</sup>

(1. *Department of Civil Engineering, Guangxi University of Technology, Liuzhou 545006, China*)

(2. *College of Civil and Architecture Engineering, Guangxi University, Nanning 530004, China*)

**Abstract** This paper presented an accurate method of calculating the earthquake force design sensitivity and Hessian matrix of the planar frame. The formulas for the earthquake force design sensitivity and Hessian matrix of the planar frame were deduced based on the finite element method and Newmark- $\beta$  method, and the corresponding calculating program was implemented with matlab language. Finally, a two-story planar frame was demonstrated as an example. The results indicate the method is effective.

**Key words** earthquake force design sensitivity, earthquake force Hessian matrix, Newmark- $\beta$  method, planar frame