第 6 卷第 4 期 2008 年 12 月
1672-6553/2008/06(4)/301-6
动力学与控制学报
JOURNAL OF DYNAMICS AND CONTROL
Vol. 6 No. 4
Dec. 2008

时滞状态反馈控制系统的稳定性增益区域*

王京祥　王在华
（解放军理工大学理学院，211101　南京）

摘要　研究了一阶时滞微分方程的状态反馈 P 控制、PI 控制问题，目的是确定反馈增益的范围使得系统的平衡态是渐近稳定的. 对 P 控制状态反馈控制模型，利用 Lambert W 函数的主分支给出了确定反馈增益的显式判据以及系统的最优反馈增益；在 PI 状态反馈控制模型中，运用稳定性切换原理并结合 D－划分法确定了在反馈增益平面上系统的稳定性区域，并利用 Lambert W 函数采用数值方法给出了系统的最优增益曲线. 和现有方法相比较，本文方法更直观、计算更简单.

关键词　时滞，　反馈增益，　P/PI 控制，　稳定性切换，　D－划分法，　Lambert W 函数

引 言

由于现代控制理论的发展，反馈控制技术得到了广泛的工程应用，其中 PID（Proportional－Integral－Derivative）控制是工业过程控制中所采用的最主要的控制策略[1-3]. 积分控制器的优点之一是其在跟踪和抗干扰等方面具有非常好的鲁棒性，它的另一个优点是采用计算机控制而容易实现. 如果系统信号受到高频噪声的干扰，微分控制器的效果就很不好. 因此，PI 控制在工业过程控制中应用最广. 然而 PI 控制有时会减慢系统的收敛速度，特别地，积分控制器本质上是一个不稳定的器件，从而即使受控系统本身是稳定的，闭环系统也可能不稳定. 因此，即使系统是稳定的，有时也有必要对系统施加控制.

考察如下带有时滞的系统，其传递函数为

$$G(s)=\frac{k}{1+Ts}e^{-s\tau}$$

其中 $\tau\geqslant 0$ 为时滞、$k>0$ 为系统的稳态增益因子、$T>0$ 为时间常数. 指数因子 $e^{-s\tau}$ 的出现可以使得系统失稳，因而有必要研究该系统的镇定问题[1-3]. 今对系统施加 PI 控制，其传递函数为 $C(s)$，

$$C(s)=k_p+\frac{k_i}{s}$$

控制框图如图 1 所示. 那么，闭环系统的传递函数为

$$H(s)=G(s)C(s)=\frac{N(s)}{D(s)}e^{-s\tau}$$

我们的目的是确定反馈增益 k_p 和 k_i 的值，使得闭环系统稳定，即使得特征拟多项式

$$D(s)+N(s)e^{-s\tau}=0$$

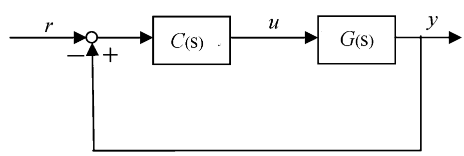

图 1　控制框图

Fig. 1　Feedback control system

的所有根都具有负实部. 处理这类问题的方法很多，如频域中根轨迹法[4]和 Nyquist[5]判据以及各种 H_∞ 控制理论[6,7]等方法在解决 SISO（单输入单输出）系统非常有效；另外，著名的 Lyapunov 函数或泛函法[8-10]，以及以此为基础的线性矩阵不等式（LMI）方法[11-13]得到广泛应用.

在文献[1]中，Silva 等采用推广的 Pontryagin 定理和 Hermite－Bilehler 定理对这一问题进行了细致的分析，求得所有使系统稳定的反馈增益值. 这一方法又被应用到积分过程的 PID 控制中[14]中. 应用该方法时，需要验证两个含有正弦函数和余弦函数的超越函数仅有简单实根，这需要非常精细的分析技巧[5]. 从而启发我们去发展更加方便有效的方法来确定闭环系统的反馈增益. 为此，本文提出一种新方法，它以稳定性切换[15]原理和 D－划分法[5]为基础，可以更加方便地求出使系统渐近稳定的反馈增益值.

2008-01-31 收到第 1 稿，2008-05-16 收到修改稿.
*全国优秀博士学位论文作者专项基金资助

本文由四部分组成. 在第二部分,对系统施加 P 状态反馈控制模型中,利用 Lambert W 函数[16,17]的主分支给出了确定反馈增益的显式判据以及系统的最优反馈增益,其对应的最大实部特征根的实部最小;在第三部分,对系统施加 PI 状态反馈控制模型中,运用稳定性切换原理并结合 D-划分法在反馈增益平面给出了系统的稳定性区域的划分,并利用 Lambert W 函数的性质和数值方法得到了系统的最优增益曲线. 最后在第四部分对本文作了简单的总结.

1 P 控制系统的反馈增益

对应于 P 控制,控制器的传递函数为 $C(s)=k_p$,闭环控制系统的传递函数是

$$H(s)=G(s)C(s)=\frac{kk_p}{Ts+1}e^{-s\tau}$$

其中,$N(s)=kk_p$,$D(s)=Ts+1$ 为多项式. 从而系统的特征拟多项式为

$$\delta(s)=Ts+1+kk_pe^{-s\tau} \tag{1}$$

我们要确定对哪些 k_p 和 τ 的值,该特征多项式的所有根都具有负实部. 为此,我们首先利用 *Lambert W* 函数给出一个显式判据,从而很方便的求得 k_p 和 τ 的取值范围.

1.1 Lambert *W* 函数及其基本性质

定义 1 Lambert W 函数 $w=W(z)$ 定义为 $we^w=z$ 的解,这里 $W: C\to C$, W 将 z 平面映射到 w 平面.

Lambert W 函数是一个多值函数,它有无穷多个分支,通常记为 $W_k, k=0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm\infty$,其中在原点解析的唯一分支 W_0 被称为主支. 关于 Lambert W 函数的详细讨论见文献[18-20]. 下面仅介绍 Lambert W 函数的一个重要的性质.

引理 1[20] 记 $Re(z)$ 为复数 z 的实部,则对于任意的 $z\in C$,有

$$\max_{k=0,\pm1,\pm\infty} Re(W_k(z))=Re(W_0(z))$$

由引理 1,特征拟多项式为

$$s=p+qe^{-s\tau},\quad (p,q\in C) \tag{2}$$

的所有根均有负实部的充要条件是

$$Re(s_0)=\frac{1}{\tau}Re[W_0(\tau qe^{-p\tau})]+Re[p]<0 \tag{3}$$

1.2 反馈增益的确定

将系统的特征方程 $\delta(s)=0$ 变形为

$$s=p+qe^{-s\tau},\ (p=-\frac{1}{T},q=-\frac{1}{T}kk_p)$$

那么,所有特征根均有负实部的充要条件是

$$\frac{1}{\tau}Re\left[W_0(-\frac{1}{T}\tau kk_pe^{\frac{\tau}{T}})\right]-\frac{1}{T}<0$$

由于 Lambert W 函数是常用数学软件 Maple, Matlab 中的标准函数,可以直接调用,因而可以很方便地用来确定待定反馈增益及时滞的稳定性区域.

例 1 取 $k=1,T=4,\tau=1$ 则 k_p 与 $Re(s)$ 的关系如图 2 所示,当 $Re(s)=0$ 时 k_p 的值为 -1 和 6.9345,即当 $k_p=-1$ 和 $k_p=6.9345$ 时系统发生稳定性切换,且当 $-1<k_p<6.9345$ 时,系统的零解渐近稳定,而 $k_p<-1$ 或 $k_p>6.9345$ 时不稳定.

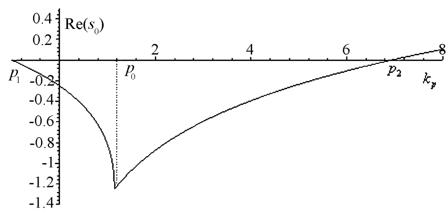

图 2 $k=1,T=4,\tau=1$ 时,k_p 与 $Re(s_0)$ 的关系图

Fig. 2 The plot of vs for Eq (3) with $k=1,T=4,\tau=1$

图中的 p_0 对应的 $Re(s)$ 最小,对相同的初始条件,系统以最快的速度收敛到平衡点,因而 p_0 是控制设计中优先采用的增益值. 下面我们给出 $Re(s)$ 取最小值的条件.

首先,由 Lambert W 函数的定义知,对主支 $W_0(z)$,当 $z>-1/e$ 时,$W_0(z)$ 的值为实数,且关于 z 单调递增. 进一步,我们有

命题 1 若 $z\in Re$,则当 $z=-1/e$ 时,$Re(W_0(z))$ 达到最小值.

证明:如果 $Re(W_0(z))=W_0(z)$,则由 $W_0(z)$ 在 $z\in(-1/e,+\infty)$ 上的单调性知,$W_0(-1/e)$ 是 $Re(W_0(z))$ 在 $z\in(-1/e,+\infty)$ 上的最小值.

如果 $Re(W_0(z))\neq W_0(z)$,则 $z<-1/e$. 函数的导数为 $W_0'(z)=W_0(z)/(z(1+W_0(z)))$. 当 $z\neq-\pi/2$ 时,$Re(W_0(z))\neq0$,因此当 $z<-\pi/2$ 或 $-\pi/2<z<-1/e$ 时,$Re(W_0(z))$ 为关于 z 的严格单调函数. 进一步,在这两个区间里分别取两点比较函数值的大小可知,当 $z<-1/e$ 时,$Re(W_0(z))$ 为关于 z 的严格递减函数,$W_0(-1/e)$ 是 $Re(W_0(z))$ 在 $z\in(-\infty,-1/e)$ 上的最小值. 因此,当 $z=-1/e$

时,$Re(W_0(z))$达到最小值.

推论 1　当 k_p 与 τ 满足关系 $-\frac{1}{T}\tau k k_p e^{\frac{\tau}{T}} = -\frac{1}{e}$时,$Re(s)$达到最小值.

当 $k=1, T=4, \tau=1$ 时,由推论 1 可求得 $Re(s)$取最小值的增益 $k_p = 1.1460$. 图 3 显示了 $k_p = 1.146$ 与 $k_p = 5$ 时系统的时间历程.

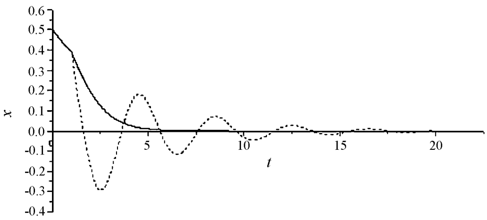

图 3　系统(1)的时间历程,$k_p = 1.1460$(实线),$k_p = 5$(虚线)

Fig. 3　Time histories of Eq. (1) with $k_p = 1.1460$ (solid) and $k_p = 5$ (dotted)

2　*PI* 控制系统的反馈增益

对系统施加 *PI* 控制,设控制器的传递函数为

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

则闭环控制系统的特征拟多项式为:

$$\delta(s) = Ts^2 + s + (kk_i + kk_p s)e^{-\tau s} \tag{4}$$

不妨假定无时滞对应的系统是渐近稳定的. 当 $\tau = 0$ 时,特征多项式为

$$\delta_*(s) = Ts^2 + (kk_p + 1)s + kk_i$$

由 Hurwitz 判据得系统稳定的条件为:

$$k_p > -\frac{1}{k}, k_i > 0, T > 0 \tag{5}$$

2.1　稳定性区域

我们利用稳定性切换的思想和 D-划分法来确定 $k_p - k_i$ 平面使系统稳定的区域,下面简要介绍一下稳定性切换与 D-划分法.

定义 2[5] 对于特征拟多项式(3.1),寻求系数空间 $k_p - k_i$ 中的一些曲线 $\Gamma_l(l=1,2,\cdots,p)$,在这些曲线上特征拟多项式(3.1)至少有一个零点在虚轴上,他们把系数空间划分为若干个区域 $D_l(l=1,2,\cdots,q)$,在这些区域内的每一个点特征方程有相同数目的、具有正实部的零点(这里指的零点数目). 这种通过划分系数空间而获得使系统稳定的参量空间的方法称为 D-划分法,曲线 $\Gamma_l(l=1,2,\cdots,p)$为临界 D-曲线.

系统的零解在同一个区域 $D_l(l=1,2,\cdots,q)$内各自具有相同的稳定性.

定义 3　设系统的稳定性依赖于系统内的某个参量的取值,随着参量取值的变化系统由稳定变为不稳定或由不稳定变为稳定的现象称为稳定性切换.

系统特征根 s 连续依赖于参量 k_p, k_i. 当参量变化而引起系统的稳定性改变时,特征根的实部会连续地由正变到负或由负变到正,在此变化过程中将经历零实部(此时称系统为临界稳定). 设(4)有实部为零的根 $j\omega$,代入(4)得

$$\delta(\omega) = \delta_r(\omega) + j\delta_i(\omega) \tag{6}$$

其中

$$\delta_r(\omega) = -T\omega^2 + kk_i\cos(\tau\omega) + kk_p\omega\sin(\tau\omega)$$

$$\delta_i(\omega) = \omega + kk_p\omega\cos(\tau\omega) - kk_i\sin(\tau\omega)$$

由上式可得

$$\begin{cases} k_p = (\sin(\tau\omega)T\omega - \cos(\tau\omega))/k \\ k_i = \omega(\sin(\tau\omega) + \cos(\tau\omega)T\omega)/k \end{cases} \tag{7}$$

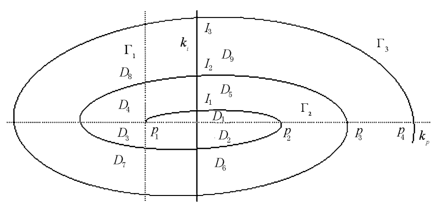

图 4　系统的 - 划分示意图

Fig. 4　D - subdivision of the system

我们的目标是在系数平面 $k_p - k_i$ 上寻找使系统渐进稳定的区域. 首先,由式(5)可知直线 $k_p = -1/k$ 和 $k_i = 0$ 也是系统的 D-边界,记为 Γ_1, Γ_2. 而(7)确定的曲线为一条 D-边界记为 Γ_3,由式(7)可知其起点为$(-1/k, 0)$. 参数平面的 D 划分示意图如图 4 所示. 特征根 s 为参量 k_p, k_i 的可导函数,由隐函数求导得:

$$\begin{cases} \dfrac{ds}{dk_p} = \dfrac{-kse^{-s\tau}}{2Ts + 1 + (k_p - \tau k_i - \tau k_p s)ke^{-s\tau}} \\ \dfrac{ds}{dk_i} = \dfrac{-ke^{-s\tau}}{2Ts + 1 + (k_p - \tau k_i - \tau k_p s)ke^{-s\tau}} \end{cases} \tag{8}$$

当图中的点由一个区域跨过 D 边界进入另一区域时,特征根 s 的实部随参量 k_p 或 k_i 的变化方向就可由 $S = \mathrm{sgn}\left\{Re\left(\frac{ds}{dk_p}\right)\Big|_{s=j\omega}\right\}$或 $S = \mathrm{sgn}\left\{Re\left(\frac{ds}{dk_i}\right)\Big|_{s=j\omega}\right\}$确定. 若 $S>0(S=1)$,则特征方程增加对正实部的特征根. 注意到条件(5),只需讨论系统在图 4 区域

$D_{4l+1}(l=0,1,2,\cdots)$内的稳定性.

取点沿 k_i 轴穿过 $D-$边界,在边界点有 $k_p=0$,即 $\sin(\tau\omega)T\omega=\cos(\tau\omega)$,故

$$k_i=\frac{\omega(\sin(\tau\omega)+\cos(\tau\omega)T\omega)}{k}=\frac{\omega\sin(\tau\omega)(1+T^2\omega^2)}{k}$$

又 $\sin(\tau\omega)T\omega=\cos(\tau\omega)$ 可化为 $T\tau\omega=\tau\cot(\tau\omega)$. 因此,只要求出 $Tv=\tau\cot(v)$ 的所有解 v,便可得到 k_i 轴上每个边界点处相应的各个 ω 值. 此时,直接计算有

$$Re\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}k_i}\right)\bigg|_{s=j\omega}=\frac{f_1(\omega)}{f_2(\omega)}>0 \qquad (9)$$

其中

$$f_1(\omega)=k\omega(\omega^2\tau T^2+T+\tau)/\sqrt{1+T^2\omega^2}$$

$$f_2(\omega)=\tau^2T^2\omega^4+(4T^2+2T\tau+\tau^2)\omega^2+1$$

从而当 k_i 由小到大每次穿越边界点后,特征方程增加一对正实部的特征根. 因此,系统的渐近稳定性区域只可能是 D_l.

区域 D_l 内所有点的稳定性是相同的,任取其中一点,其对应系统的稳定性可以有多种方法来确定. 一种办法是以时滞 τ 作为参数,利用稳定性切换求出时滞的稳定性区间[15][21]. 另一种方法是利用 Hassard 定理[21]. 一种更直接的方法是 Nyquist 图示法[21].

2.2 用数值方法求系统的最优增益曲线

下面利用 LambertW 函数并采用数值方法在系统的稳定区域里确定系统的最优增益曲线. 由(4)式可得,特征根必是下列某一个方程的解:

$$s=W_j(-(Ts^2+k(k_i+k_ps)e^{-\tau s})e^s) \qquad (10)$$

其中 $j=0,\pm1,\cdots$. 为此,构造函数 $F(s)$ 如下

$$F(s)=s-W_0(-(Ts^2+k(k_i+k_ps)e^{-\tau s})e^s)$$

其中 W_0 为 LambertW 函数的主分支. 由函数 $F(s)$ 的构造及引理 1 知,此时函数 $F(s)$ 的根 s 应该为系统(4)在点(k_p,k_i)处的具有最大实部的特征根. 对 $F(s)$ 利用 Halley 迭代法[16]求得最大实部特征根. 对给定的容许误差 ε,取定初始值 s_0,依次计算迭代

$$s_{l+1}=s_l-\frac{F(s_l)}{F'(s_l)}\left(1-\frac{F(s_l)F^*(s_l)}{2(F'(s_l))^2}\right)^{-1} \qquad (11)$$

其中 $l=0,1,2,\cdots$. 当

$$|s_{1+1}-s_l|<\varepsilon \qquad (12)$$

时迭代终止.

当增益值变化时,最大实部特征根的实部大小也在变化,可以通过数值方法求得系统的最优增益曲线.

算法 1:求系统的最优增益曲线.

第一步:构造函数 $F(s)$.

第二步:对稳定区域进行矩形分割,k_p 轴步长为 Δ_l,k_i 轴步长为 Δ_2,记网格点为 $\varphi(m,n)=(k_p(m),k_i(n))$,$m=1,2,\cdots,p$,$n=1,2,\cdots,q$,其中 p,q 由稳定区域边界及步长确定.

第三步:对 $m=1$,由点列 $\varphi(1,n)$,$n=1,2,\cdots,q$ 及函数 $F(s)$ 可确定根 s_n,$n=1,2,\cdots,q$.

第四步:取出 s_i 中最小的记 $S_l=\{\min(s_n)\mid n=1,2,\cdots,q\}$. 并记 n_1 为 s 取到 S_1 时的 n 的值并取出点 $\varphi(1,n_1)$.

第五步 返回第三步,并令 $m=m+1$,直至 $m=p$. 由此得点列 $\varphi(m,n_m)$,$m=1,2,\cdots,p$,其连线即为最优增益曲线.

例 2 取 $k=1$,$\tau=1$,$T=4$ 则对应(7)式有

$$\begin{cases}k_p=4\omega\sin(\omega)-\cos(\omega)\\ k_i=\omega\sin(\omega)-4\omega^2\cos(\omega)\end{cases}$$

在参数平面画出曲线 Γ_3,从而得 D 划分图如图 5 所示,其中边界 Γ_1:$k_p=-1$,Γ_2:$k_i=0$.

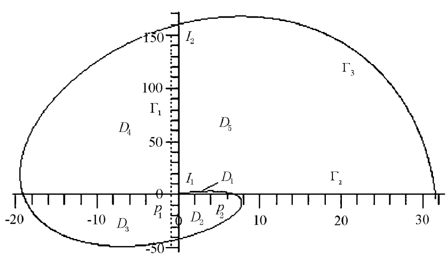

图 5 $k=1$,$\tau=1$,$T=4$ 时系统的 $D-$划分图

Fig. 5 D − subdivision of the system for $k=1$, $\tau=1$, $T=4$

在区域 D_1 内任取一点,不妨取(0,1/2),在此点的 Nyquist 图如图 6 所示,Nyquist 图不包含原点,故系统在(0,1/2)处稳定,从而 D_1 为系统的稳定区域.

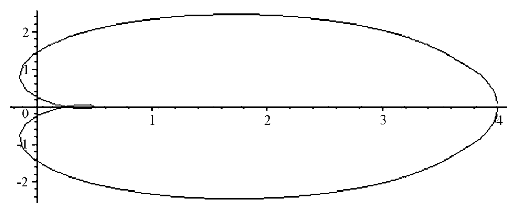

图 6 在点(0,1/2)处的 *Nyquist* 图

Fig. 6 The Nyquist plot for (0,1/2)

进一步,取 $\Delta_1 = 0.01$,$\Delta_2 = 0.01$,对区域 D_1 进行划分,依照算法得到系统的最优增益曲线,如图 7 中 L 所示.

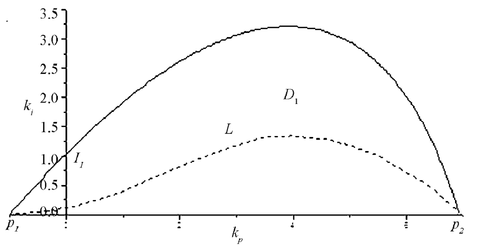

图 7　$k=1,\tau=1,T=4$ 时,系统(4)的稳定区域及最优增益曲线

Fig. 7　The stable region of Eq. (4) for $k=1,\tau=1,T=4$, and the optimal feedback curve

在最优增益曲线上取点(3,1.39),在稳定区域内取点(3,1),以及点(4.93,2.89),则系统在此三点对应的时间历程如图 8 所示.

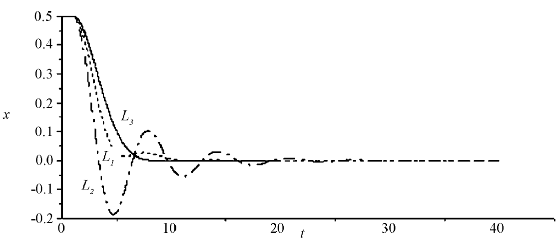

图 8　系统对应(2.08,0.81),(3,1.2),(3,2)时的时间历程,其曲线分别为 L_1, L_2, L_3

Fig. 8　Time histories of Eq. (4) for (2.08,0.81),(3,1.2) and (3,2), denoted by L_1, L_2, L_3

3　结论

本文研究了一阶时滞系统的状态反馈控制问题,运用稳定性切换原理并结合 D-划分法等方法确定了使系统渐近稳定的反馈增益的取值范围. 研究表明,尽管利用 D-划分法将反馈增益平面划分成许许多多的子区域,但在无时滞对应的系统是渐近稳定条件下,使受控系统渐近稳定的区域只有一个. 和现有方法相比较,本文方法更直观、计算更简单. 当增益值在该稳定性区域内取不同值时,受控系统的最大实部特征根的实部大小也在变化,利用 Lambert W 函数的性质采用数值方法求得了系统的最优增益曲线,对该曲线上的增益值,系统最大实部特征根的实部最小,从而系统不仅渐近稳定,而且具有最大的稳定性裕度. 本文方法可以推广到更一般的时滞系统.

参　考　文　献

1　G J Silva, A Datta, S P Bhattacharyya. PI stabilization of first-order systems with time delay. *Automatica*, 2001, 37: 2025 ~ 2031

2　G J Silva, A Datta, S R Bhattacharyya. PID controllers for time-delay systems. Birkhauser Boston, 2005

3　G J Silva, A Datta, S P Bhattacharyya. New results on the synthesis of PID controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47: 241 ~ 252

4　胡寿松. 自动控制原理(第四版). 北京:科学出版社, 2001(Hu S S. Theory of automatic control (4th edition). Beijing: Science Press, 2001 (in Chinese))

5　秦元勋,刘永清,王联,郑祖庥. 带有时滞的动力系统的稳定性(第二版). 北京:科学出版社,1989(Qin Y X, Liu Y Q, Wang L, Zheng Z X. Stability of motion of dynamical systems with time lag (2nd edition). Beijing: Science Press, 1989 (in Chinese))

6　H P Du and N Zhang. Control of active vehicle suspensions with actuator time delay. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 301: 236 ~ 252

7　Z D Wang, F W Yang, W C Daniel. Robust variance-constrained control for stochastic systems with multiplicative noises. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 328: 487 ~ 502

8　H Bouzaouache, B N Braiek. On the stability analysis of nonlinear systems using polynomial Lyapunov functions. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2007, 00164 (4): 378 ~ 475

9　N N Subbotina. The value functions of singularly perturbed time-optimal control problems in the framework of Lyapunov functions method. *Mathematical and Computer Modelling*, 2007, 45: 1284 ~ 1293

10　赵俊峰,李伟. 一个经济周期模型的分岔与混沌. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 39 ~ 43(Zhao J F, Li W. Bifurcation and chaos in a business cycle model. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4): 39 ~ 43(in Chinese)

11　C Lin, Q G Wang, T H Lee. An improvement on multivariable PID controller design via iterative LMI approach. *Automatica*, 2004, 40: 519 ~ 525

12　F Zheng, Q G Wang, T H Lee. On the design of multivariable PID controllers via LMI approach. *Automatica*, 2002, 38: 517 ~ 526

13　J D Chen. Delay-dependent robust H1 control of uncertain neutral systems with state and input delays: LMI optimization approach. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 33: 595 ~ 606

14 L L Ou, Y C Tang, D Y Gu, W D Zhang. Stability Analysis of PID controllers for integral processes with time delay. American Control Conference, Portland, 2005

15 Z H Wang, H Y Hu. Stability switches of time-delayed dynamic systems with unknown parameters. *Journal of Sound and Vibration*, 2000, 233: 215 ~ 233

16 Z H Wang, H Y Hu. Calculation of the rightmost characteristic root of retarded time – delay systems via Lambert W function. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 318 (4 – 5): 757 ~ 767

17 R M Corless, G H Gonnet, D E G Hare, D J Jeffrey, D E Knuth. On the Lambert W function. *Advances in Computational Mathematics*, 1996, 5: 329 ~ 359

18 F M Asl, A G Ulsoy. Analysis of a system of linear delay differential equations. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2003, 125: 215 ~ 223

19 C H Wang, Y C Cheng. A note on the use of the Lambert W function in the stability analysis of time-delay systems. *Automatica*, 2005, 41: 1979 ~ 1985

20 H Shinozaki, T Mori. Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: some extreme point results. *Automatica*, 2006, 42: 1979 ~ 1985

21 H Y Hu, Z H Wang. Dynamics of Controlled Mechanical Systems with Delayed feedback. Springer-Verlag, Berlin, 2002

STABLE REGION OF THE FEEDBACK GAINS IN A CONTROLLED SYSTEM WITH DELAYED FEEDBACK *

Wang Jingxiang Wang Zaihua

(*Institute of Science, PLA University of Science & Technology, Nanjing* 211101, *China*)

Abstract The problem of P and PI feedback control to a time delay system was investigated, with the emphasis on the determination of the feedback gains that ensured the asymptotical stability of the delayed system. By means of Lambert W function, the feedback gain of P control can be expressed explicitly, so that the optimal feedback gain can be easily obtained. For the system under a PI control, the stable region of the feedback gains was determined on the basis of stability switches and D-subdivision, and the optimal feedback gains that enabled the system to admit maximal stable margin were figured out numerically by using Lambert W function. From the viewpoint of computation, the present method is much simpler than the available methods.

Key words time delay, feedback gain, P/PI control, stability switch, D-subdivision, Lambert W function

Received 31 January 2008, revised 16 May 2008.

* This work was supported by FANEDD of China